Mathématiques ECS 1re année

LE COMPAGNON

Françoise Benoist
Professeur agrégée
de mathématiques en ECS2
au lycée Gay-Lussac (Limoges)

Benoît Rivet
Professeur agrégé de mathématiques
en classes préparatoires
au lycée Gay-Lussac (Limoges)

Samuel Maffre
Professeur agrégé
de mathématiques en ECS1
au lycée Gay-Lussac (Limoges)

Lionel Dorat
Professeur agrégé
de mathématiques en ECS1
au lycée Camille Vernet (Valence)

Brice Touzillier
Professeur agrégé
de mathématiques en ECS2
au lycée Michelet (Vanves)

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2011
ISBN 978-2-10-056931-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

1. Nombres réels 1

1.1 Addition et symbole somme 1
1.2 Multiplication et coefficients binomiaux 6
1.3 Inégalités 12
Synthèse 15
Tests et exercices 16
Corrigés des exercices 20

2. Ensembles et applications 29

2.1 Logique 29
2.2 Modes de raisonnement 32
2.3 Ensembles 38
2.4 Applications 42
Synthèse 48
Tests et exercices 49
Corrigés des exercices 53

3. Nombres complexes 62

3.1 Propriétés fondamentales 62
3.2 Forme trigonométrique d'un complexe 65
3.3 Équations dans $\mathbb{C}$ 70
Synthèse 73
Tests et exercices 74
Corrigés des exercices 77

4. Polynômes réels ou complexes 85

4.1 Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ 85
4.2 Division euclidienne de polynômes 92
4.3 Dérivées successives 95
4.4 Racines d'un polynôme 97
Synthèse 105
Tests et exercices 106
Corrigés des exercices 110

5. Systèmes linéaires 124

5.1 Définitions 124
5.2 Opérations élémentaires 125
5.3 Mise en œuvre de la méthode du pivot de Gauss 125
Synthèse 130
Tests et exercices 131
Corrigés des exercices 132

6. Espaces vectoriels 135

6.1 Structure d'espace vectoriel 135
6.2 Sous-espaces vectoriels 137
6.3 Familles de vecteurs 143
6.4 Somme de sous-espaces vectoriels 149
Synthèse 153
Tests et exercices 154
Corrigés des exercices 156

7. Applications linéaires 164

7.1 Applications linéaires 164
7.2 Noyau et image d'une application linéaire 167
7.3 Opérations sur les applications linéaires 172
7.4 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire 176
7.5 Projections et symétries 177

Synthèse 185
Tests et exercices 186
Corrigés des exercices 188

8. Espaces vectoriels de dimension finie 196

8.1 Dimension 196
8.2 Sous-espaces d'un espace de dimension finie 201
8.3 Rang 203
Synthèse 207
Tests et exercices 208
Corrigés des exercices 210

9. Matrices 218

9.1 Matrices et applications linéaires 218
9.2 Opérations sur les matrices 222
9.3 Rang d'une matrice 227
9.4 Matrices carrées 230
9.5 Changement de base 237
9.6 Retour sur les systèmes linéaires 241
Synthèse 243
Tests et exercices 244
Corrigés des exercices 248

10. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées 258

10.1 Eléments propres d'un endomorphisme 258
10.2 Endomorphismes diagonalisables 261
10.3 Réduction des matrices carrées 263
10.4 Applications de la diagonalisation 269
Synthèse 271
Tests et exercices 272
Corrigés des exercices 275

11. Généralités sur les suites réelles 287

11.1 Définitions 287
11.2 Suites convergentes 291
11.3 Limites infinies 298
11.4 Quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels 302
Synthèse 306
Tests et exercices 307
Corrigés des exercices 312

12. Exemples de suites 321

12.1 Suites arithmético-géométriques 322
12.2 Relation linéaire de récurrence d'ordre 2 323
12.3 Relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 325
Synthèse 331
Tests et exercices 332
Corrigés des exercices 336

13. Étude asymptotique des suites 345

13.1 Suite négligeable devant une autre 345
13.2 Suites équivalentes 348
Synthèse 353
Tests et exercices 354
Corrigés des exercices 357

14. Étude locale des fonctions 363

14.1 Limite et continuité en un point 363
14.2 Limite à gauche, à droite. Prolongement par continuité 366
14.3 Propriétés 369
14.4 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point 374
14.5 Branches infinies des courbes 377
Synthèse 381
Tests et exercices 382
Corrigés des exercices 386

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

15. Étude globale des fonctions 392

15.1 Rappels et compléments sur quelques propriétés globales des fonctions 392
15.2 Fonctions monotones 395
15.3 Fonctions continues sur un intervalle 397
15.4 Théorème de la bijection 400
Synthèse 403
Tests et exercices 404
Corrigés des exercices 408

16. Dérivation 416

16.1 Conception locale de la dérivée 416
16.2 Propriétés globales de la dérivée 421
16.3 Dérivées successives 428
16.4 Fonctions convexes 430
Synthèse 433
Tests et exercices 434
Corrigés des exercices 438

17. Intégration sur un segment et primitives 448

17.1 Construction de l'intégrale sur un segment 448
17.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment 451
17.3 Primitives et intégrales 454
17.4 Calcul des intégrales 459
Synthèse 462
Tests et exercices 463
Corrigés des exercices 467

18. Formules de Taylor et développements limités 479

18.1 Formules de Taylor 479
18.2 Développements limités 483
Synthèse 488
Tests et exercices 489
Corrigés des exercices 492

19. Séries numériques 501

19.1 Généralités 501
19.2 Séries à termes positifs 504
19.3 Séries géométriques et exponentielles 507
Synthèse 513
Tests et exercices 514
Corrigés des exercices 518

20. Fonctions de deux variables 528

20.1 Rappels sur le plan. Éléments de topologie 528
20.2 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, continuité 534
20.3 Calcul différentiel 538
Synthèse 543
Tests et exercices 544
Corrigés des exercices 547

21. Dénombrement 554

21.1 Définition et propriété 555
21.2 Dénombrements usuels 558
21.3 Exemple : jeu de carte et dénombrement 564
Synthèse 567
Tests et exercices 568
Corrigés des exercices 571

22. Statistiques 580

22.1 Cadre mathématique 582
22.2 Représentation graphique 583
22.3 Caractéristiques de position 585
22.4 Caractéristiques de dispersion 589
Synthèse 590

23. Espaces probabilisés finis 591

23.1 Le problème du chevalier de Méré 592
23.2 Probabilité sur un ensemble fini 593
23.3 Probabilité conditionnelle 598
23.4 Indépendance 603

Synthèse 605
Tests et exercices 606
Corrigés des exercices 609

24. Variables aléatoires finies 621

24.1 Loi d'une variable aléatoire 622
24.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire 626
24.3 Lois usuelles 632
Synthèse 643
Tests et exercices 645
Corrigés des exercices 647

25. Espace probabilisés infinis 656

25.1 σ-algèbre des événements 657
25.2 Probabilité 658
25.3 Probabilité conditionnelle 664
25.4 Indépendance 667
Synthèse 668
Tests et exercices 669
Corrigés des exercices 672

26. Variables aléatoires infinies 680

26.1 Variable aléatoire discrète 680
26.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire 683
26.3 Lois usuelles 688
Synthèse 695
Tests et exercices 696
Corrigés des exercices 699

27. Couples de variables aléatoires discrètes 706

27.1 Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires 706
27.2 Indépendance 708
27.3 Espérance et covariance 709
27.4 Somme de variables aléatoires 714
Synthèse 717
Tests et exercices 718
Corrigés des exercices 722

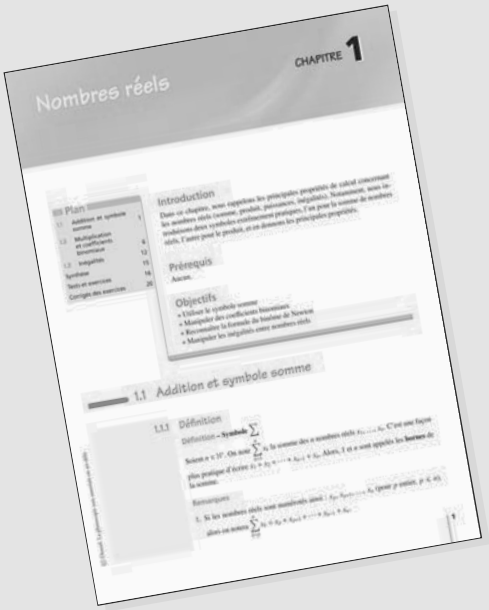
28. Éléments d'algorithmique 735

28.1 Environnement PASCAL 735
28.2 Structures de base 738
28.3 Fonctions et procédures 743
28.4 Les Tableaux 745
28.5 Simulations en probabilité 747
28.6 Logiciel 749
Synthèse 750
Tests et exercices 751
Corrigés des exercices 756

Index 765

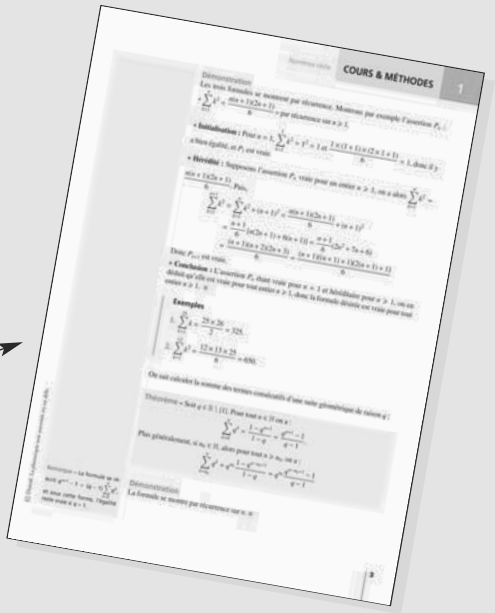
© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Pour bien utiliser cet ouvrage



La page d'entrée de chapitre

Elle propose une introduction au cours, un rappel des prérequis et des objectifs, ainsi qu'un plan du chapitre.



Le cours

- Le cours aborde les notions du programme de façon synthétique et structurée afin d'en faciliter l'apprentissage.
- Des encarts détaillent étape par étape les méthodes essentielles, et sont suivis d'exemples d'application.

Pictogramme

- Des commentaires pédagogiques vous accompagnent dans le cours et dans les corrigés d'exercices. Ils sont identifiés par ce pictogramme :

Mise en garde contre des erreurs fréquentes.



La synthèse

En fin de chapitre, elle vous propose un récapitulatif des savoirs, des savoir-faire et des mots-clés.

Tester ses connaissances

Quelques QCM et Vrai ou Faux ? pour tester votre connaissance du cours.

Exercices d'application

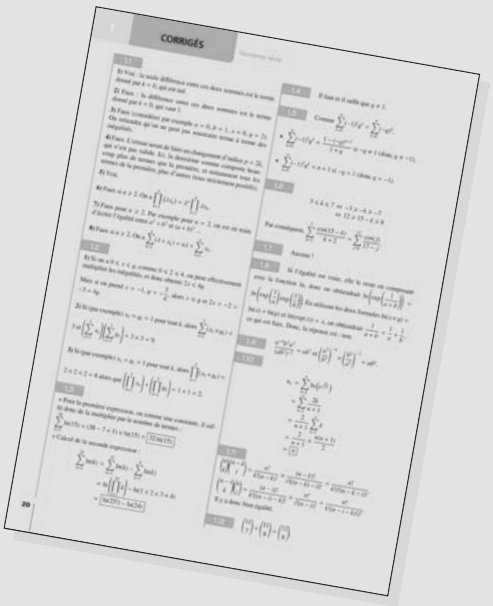
Ils vous proposent d'utiliser vos connaissances du cours pour résoudre des problèmes simples. Leur difficulté est indiquée sur une échelle de 1 à 3.





Exercices d'approfondissement

Des énoncés qui vous proposent de résoudre des problèmes demandant une réflexion plus poussée, souvent extraits d'annales de concours. Leur difficulté est indiquée sur une échelle de 1 à 3.



Les corrigés des exercices

Tous les tests de connaissances, les exercices d'application et d'approfondissement sont corrigés.
Les solutions sont regroupées en fin de chapitre.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Nombres réels

CHAPITRE 1

Plan

1.1 Addition et symbole somme 1
1.2 Multiplication et coefficients binomiaux 6
1.3 Inégalités 12
Synthèse 15
Tests et exercices 16
Corrigés des exercices 20

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les principales propriétés de calcul concernant les nombres réels (somme, produit, puissances, inégalités). Notamment, nous introduisons deux symboles extrêmement pratiques, l'un pour la somme de nombres réels, l'autre pour le produit, et en donnons les principales propriétés.

Prérequis

Aucun.

Objectifs

- Utiliser le symbole somme
- Manipuler des coefficients binomiaux
- Reconnaître la formule du binôme de Newton
- Manipuler les inégalités entre nombres réels

1.1 Addition et symbole somme

1.1.1 Définition

Définition – Symbole $\sum$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\sum_{k=1}^{n} x_k$ la somme des n nombres réels $x_1, \ldots, x_n$. C'est une façon plus pratique d'écrire $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$. Alors, 1 et n sont appelés les **bornes** de la somme.

Remarques

1. Si les nombres réels sont numérotés ainsi : $x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ (pour p entier, $p \leqslant n$), alors on notera $\sum_{k=p}^{n} x_k = x_p + x_{p+1} + \cdots + x_{n-1} + x_n$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

2. Dans l'expression $\sum_{k=1}^{n}$, la lettre k représente une variable muette, c'est-à-dire qu'elle n'a pas d'existence pratique. Elle peut être remplacée par toute autre lettre ne désignant pas une variable ou une donnée du problème traité :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{p=1}^{n} x_p = \dots$$

Par contre, le 1 et le n dans cette somme ne sont pas modifiables.

3. Dans l'expression $\sum_{k=1}^{n}$, la lettre k désigne une valeur qui parcourt **tous les entiers** de 1 à n.

4. Il faut s'habituer à rencontrer des notations assez diverses utilisant le symbole $\sum$. Par exemple la somme $\sum_{k=1}^{n} a_k$ peut aussi être notée $\sum_{k\in[\![1,n]\!]} a_k$ ou $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$. Plus généralement, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels indexée par l'ensemble fini I, on note $\sum_{i\in I} x_i$ la somme de tous les termes de la famille.

5. Lorsque l'on souhaite séparer dans une somme les termes d'indice pair et les termes d'indice impair, on rencontre différentes notations, notamment :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} a_{2k} + \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} a_{2k+1} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}} a_k$$

6. Pour $p \leqslant n$, dans une somme $\sum_{k=p}^{n}$, il y a $n - p + 1$ termes.

Exemples

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé, alors $\sum_{k=0}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-0+1 \text{ termes}} = (n+1)\alpha$.

2. $\sum_{k\in[\![3,5]\!]} k^2 = \sum_{3\leqslant k\leqslant 5} k^2 = \sum_{k=3}^{5} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$.

3. On a : $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \sum_{\substack{3\leqslant k\leqslant 13\\ k \text{ impair}}} k = \sum_{p=1}^{6}(2p+1) = \sum_{q=2}^{7}(2q-1)$. En effet, un nombre impair se note $2p + 1$ (ou $2q - 1$, ou ...), et alors $3 \leqslant k \leqslant 13$ revient à $3 \leqslant 2p + 1 \leqslant 13$, donc à $1 \leqslant p \leqslant 6$, donc la somme d'indice p a pour bornes 1 et 6.

4. $\sum_{k=n}^{n} \cos(k) = \cos(n)$ et $\sum_{k=n}^{n+1} \cos(k) = \cos(n) + \cos(n+1)$.

Théorème – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démonstration

Les trois formules se montrent par récurrence. Montrons par exemple l'assertion P_n : « $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » par récurrence sur $n \geqslant 1$.

• **Initialisation :** Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$, donc il y a bien égalité, et P_1 est vraie.

• **Hérédité :** Supposons l'assertion P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, on a alors $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Puis,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion :** L'assertion P_n étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour $n \geqslant 1$, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, donc la formule désirée est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. ■

Exemples

1. $\sum_{k=1}^{25} k = \frac{25 \times 26}{2} = 325.$
2. $\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 650.$

On sait calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q :

Théorème – Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Plus généralement, si $n_0 \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\sum_{k=n_0}^{n} q^k = q^{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q} = q^{n_0} \frac{q^{n-n_0+1} - 1}{q - 1}$$

Démonstration

La formule se montre par récurrence sur n. ■

Remarque – La formule se réécrit $q^{n+1} - 1 = (q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k$, et sous cette forme, l'égalité reste vraie si $q = 1$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} e^{2k} = \sum_{k=3}^{10} (e^2)^k = e^6 \frac{1-(e^2)^8}{1-e^2}$ (car $e^2 \neq 1$).
2. $\displaystyle\sum_{k=12}^{25} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{5^{12}} \frac{1-\frac{1}{5^{14}}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5^{14}-1}{4\times 5^{25}}$

1.1.2 Changement d'indice

On peut transformer l'indice d'une somme en réindexant les nombres que l'on somme.

Proposition – *Soit* $s = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k$. *Il y a deux types de changements d'indices :*

- *poser* $i = k + q$ *avec* $q \in \mathbb{N}$ *quelconque, et alors* $s = \displaystyle\sum_{i=p+q}^{n+q} x_{i-q}$,
- *poser* $i = -k + q$ *avec* $q \in \mathbb{N}$ *quelconque, et alors* $s = \displaystyle\sum_{i=q-n}^{q-p} x_{q-i}$.

Méthode 1 Bornes d'une somme après changement d'indice

Pour ne pas se tromper sur les bornes, lors d'un changement d'indice, il vaut mieux écrire ce que donne le changement d'indice sur les inégalités $p \leqslant k \leqslant n$:

- si $i = k + q$, $p \leqslant k \leqslant n$ devient $p + q \leqslant k + q \leqslant n + q$, donc $p + q \leqslant i \leqslant n + q$ (d'où les bornes pour la somme sur l'indice i),
- si $i = -k + q$, $p \leqslant k \leqslant n$ devient $-p \geqslant -k \geqslant -n$, donc $q - p \geqslant -k + q \geqslant q - n$, donc $q - n \leqslant i \leqslant q - p$.

Un changement d'indice du style $i = 2k$ est interdit (car $2k$ ne parcourt que des entiers pairs, alors qu'un indice de somme i prend toutes les valeurs d'entiers entre les bornes de la somme, y compris les impairs).

Exemples d'application

1. Si on pose $j = i + 1$, on a $\displaystyle\sum_{i=3}^{54} \ln(i+1) = \sum_{j=4}^{55} \ln(j)$, car $3 \leqslant i \leqslant 54$ donne $4 \leqslant i + 1 \leqslant 55$, donc $4 \leqslant j \leqslant 55$.
2. Pour $n \geqslant 1$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$. Posons $j = n - k$ dans cette somme. Comme on a $0 \leqslant k \leqslant n$, on en déduit $0 \leqslant n - k \leqslant n$, donc $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (n-j) = \sum_{j=0}^{n} n - \sum_{j=0}^{n} j = n(n+1) - S_n$. Donc $2S_n = n(n+1)$ et on retrouve bien $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque – Par abus de notation, il peut arriver dans ce livre que l'on note $\sum_{i=3}^{54} \ln(i+1) \underset{j=i+1}{=} \sum_{j=4}^{55} \ln(j)$ pour indiquer que l'on a fait le changement de variable $j = i+1$.

1.1.3 Découpage

On a l'égalité $x_1 + \cdots + x_n = (x_1 + \cdots + x_p) + (x_{p+1} + \cdots + x_n)$ si $p < n$. Cela se réécrit :

Cette formule semble au premier abord analogue à la formule de Chasles pour les intégrales. Il y a une différence fondamentale : la borne inférieure de la deuxième somme vaut 1 de plus que la borne supérieure de la première somme.

Proposition – *Pour* $1 \leqslant p < n$, *on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k$.

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = \sum_{k=0}^{0} \sqrt{k} + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sqrt{0} + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=10}^{20} k^3 = \sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{9} k^3 = \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 - \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2 = 210^2 - 45^2 = 42075$.

Remarque – Plus généralement, si I_1 et I_2 sont deux ensembles **disjoints**, et bien sûr **finis**, alors $\displaystyle\sum_{i \in I_1 \cup I_2} x_i = \left(\sum_{i \in I_1} x_i\right) + \left(\sum_{i \in I_2} x_i\right)$.

Exemple

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{-1}{k^2}$ (puisque $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair). On continuera la transformation de cette somme dans l'exercice 1.35.

Pour transformer l'addition de deux sommes en une seule, on vérifie avant tout que les sommes ont les mêmes bornes.

1.1.4 Propriétés de linéarité

Proposition – *Soient n un entier non nul,* λ, $x_1, \ldots, x_n$ *et* $y_1, \ldots, y_n$ *des réels, alors on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{j=1}^{n} y_j$$

Démonstration

La première propriété traduit la distributivité : $(\lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n) = \lambda(x_1 + \cdots + x_n)$, et la deuxième traduit l'associativité :

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{j=1}^{n} y_j = \begin{array}{c}(x_1 + \cdots + x_n) \\ + \\ (y_1 + \cdots + y_n)\end{array} = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \quad \blacksquare$$

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3 = 2\frac{n(n+1)}{2} + 3n = n^2 + 4n.$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$
3. En utilisant toutes les règles vues précédemment, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &\underset{j=k+1}{=} \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=p+1}^{n+1}\frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{p} + \sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{j=p+1}^{n}\frac{1}{j}\right) \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=p+1}^{n} 0 = \frac{1}{p} - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Ces sommes de différences de termes consécutifs sont dites **télescopiques** ; cette technique est souvent demandée aux concours.

1.2 Multiplication et coefficients binomiaux

1.2.1 Définition

Définition – Symbole $\prod$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k$ le produit des n nombres $x_1, \ldots, x_n$, au lieu de $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n$. Là encore, 1 et n sont appelés les **bornes** du produit.

Remarques

1. Les mêmes remarques que pour la somme restent vraies, notamment sur le nom de l'indice, les notations alternatives, le nombre de facteurs.
2. Le changement d'indice et le découpage se font de la même façon que pour une somme.

Exemples

1. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, la factorielle de n par : $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.
2. Une conséquence de la règle du découpage est la formule suivante :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \quad (n+1)! = (n+1) \times n!$$

qui s'utilise de manière très fréquente. Elle s'adapte sous différentes formes (par exemple, si $n \geqslant 1$, $(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1)!$, ou bien $\dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$).

1.2.2 Puissances

Définition – Puissance entière

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $x^n = \prod_{i=1}^{n} x = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x \times x}_{n \text{ facteurs}}$, et pour x **non nul**, $x^{-n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{1}{x^n}$.

On pose **par convention** $x^0 = 1$ pour tout réel x.

Définition – Puissance réelle

Soient x un réel **strictement positif** et α un réel quelconque. On définit le nombre appelé « x puissance α », noté x^α, par

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Remarques

1. La règle du découpage donne alors pour $x \in \mathbb{R}$ et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n \geqslant p$, que $\prod_{k=p}^{n} x = x^{n-p+1}$.
2. Les propriétés de l'exponentielle et du logarithme font que ces deux définitions coïncident si α est entier.
3. Le domaine de définition de la formule x^α est :

α entier positif	α entier strictement négatif	α réel
$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$

4. Si $\alpha \geqslant 0$, l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ peut se prolonger par continuité en 0, en posant $0^\alpha = 0$ pour $\alpha > 0$, et $0^0 = 1$. Si $\alpha \geq 1$, le prolongement est dérivable en 0.
5. Pour $x \geqslant 0$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et c'est l'unique solution positive de l'équation $y^2 = x$, d'inconnue y.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir $x^{\frac{1}{n}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ ou $x \in \mathbb{R}$ par une autre approche (voir chapitre 2 paragraphe 4.3).

Rappelons que l'on a alors les règles sur les puissances (à savoir manipuler) :

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Proposition – *Pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, x et y tels que les expressions écrites aient du sens, on a :*

1. $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$
4. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$
5. $(x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$
6. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$
7. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$
8. $y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$

1.2.3 Propriétés du produit

Proposition – *Soient n un entier naturel non nul, λ un entier naturel, $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des réels, alors on a :*

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i^\lambda) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^\lambda \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} (x_i \times y_i) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n} y_j\right)$$

Remarques

1. Dans la proposition précédente, on peut supposer $\lambda \in \mathbb{Z}$, à condition que les x_i soient tous non nuls (pour ne pas diviser par 0).
2. On peut supposer aussi $\lambda \in \mathbb{R}$, à condition de supposer tous les x_i strictement positifs.

On peut faire un lien entre produit et somme, grâce à la fonction ln ou exp :

Proposition – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictements positifs, et $y_1, \ldots, y_n$ des réels quelconques, alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \exp(y_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)$$

1.2.4 Coefficients binomiaux

Définition – Coefficient binomial

On appelle **coefficient binomial** tout nombre $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$.

On note alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, et on le lit « p parmi n ».

Exemple

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Remarque – La formule du découpage permet de réécrire

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))}{p!}$$

Proposition – Formule de symétrie

Pour tous entiers (n, p) *avec* $p \leqslant n$, *on a* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Proposition – Formule de Pascal

Pour tous entiers n *et* p *tels que* $p+1 \leqslant n$, *on a* $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Démonstration

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $k! \times (k+1) = (k+1)!$ donc $\dfrac{1}{k!} = \dfrac{k+1}{(k+1)!}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{(p+1) \times n!}{(p+1)!(n-p)!} + \frac{(n-p) \times n!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!}\left[(p+1) + (n-p)\right] \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} \\
&= \binom{n+1}{p+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarques

1. Cette formule reste vraie pour $p = n$ (ou $p > n$) si l'on prend comme convention que $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.
2. De cette formule, on déduit par récurrence un résultat non évident *a priori* : un coefficient binomial est un entier naturel.

Cette formule permet de réaliser le triangle de Pascal, dont la $n+1$-ième ligne donne les $n+1$ valeurs de $\binom{n}{p}$ lorsque p parcourt $[\![0, n]\!]$ dans l'ordre croissant :

	$p=0$	1	2	3	4	5
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Ce triangle (facile à reconstruire, chaque terme se calculant en faisant la somme du terme immédiatement au dessus et du terme au dessus à gauche) est surtout utile pour de petites valeurs de n.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

La sixième ligne de ce triangle est 1, 5, 10, 10, 5, 1, donc on peut affirmer les égalités $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$.

Le résultat suivant est très utile dans certains calculs de sommes intervenant dans les exercices de probabilités :

Proposition – *Soit* $1 \leqslant p \leqslant n$, *alors* $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

On fera bien attention à l'hypothèse faite ici, à savoir $p \geqslant 1$. Pour $p = 0$, l'égalité n'a pas de sens, puisque $\binom{n-1}{-1}$ n'existe pas !

Démonstration

$$\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n \times (n-1)!}{p \times (p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}. \quad \blacksquare$$

1.2.5 Identités remarquables

Théorème – Formule du binôme de Newton

Pour tous réels x et y, pour tout entier naturel n, on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k}$$

Démonstration

Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons la formule du binôme par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

• **Initialisation :** si $n = 0$, $(x+y)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$

(car $0! = 1$), donc la formule est bien vraie au rang 0.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie pour $(x+y)^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p} (x+y) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{p+1} y^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n+1-p} \\
&\underset{k=p+1}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n+1-p}
\end{aligned}$$

Or $\binom{n+1}{0} = 1$ et $\binom{n}{(n+1)-1} = \binom{n}{n} = 1$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{(n+1)-1} x^{n+1} y^{n+1-(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + x^{n+1}
\end{aligned}$$

et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p y^{n+1-p} = \binom{n}{0}x^0 y^{n+1-0} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}x^p y^{n+1-p}$

$$= y^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}x^p y^{n+1-p}$$

Ainsi, $(x+y)^{n+1} = y^{n+1} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}\right)x^p y^{n+1-p} + x^{n+1}$.

Enfin, il suffit d'utiliser la formule de Pascal :

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0}x^0 y^{n+1-0} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n+1}{p}x^p y^{n+1-p} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^{n+1-(n+1)}$$

Donc la formule est vraie au rang $n+1$.

• **Conclusion :** La formule étant vraie au rang 0, et héréditaire pour tout entier naturel n, elle est vraie pour tout entier n, par récurrence. ■

Pour des réels (x_k) et (y_k) quelconques, on n'a aucune formule pour la somme d'un produit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est *a priori* différent de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$.

Exemples

1. $(1+1)^n = 2^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ et $(1-1)^n = 0 = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p$

2. Plus généralement, pour tous réel x et entier n, $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

Voici une généralisation de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

Proposition – *Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n, on a :*

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}\\
&\underset{p=k+1}{=} \sum_{p=1}^{n} a^p b^{n-p} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}\\
&= a^n b^{n-n} + \sum_{p=1}^{n-1} a^p b^{n-p} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} + a^0 b^{n-0}\right)\\
&= a^n - b^n \qquad ■
\end{aligned}$$

Remarque – Une autre démonstration aurait été possible : on part de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, écrite sous la forme $q^n - 1 = (q-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$, on pose $q = \dfrac{a}{b}$ si $b \neq 0$ (si $b = 0$, le résultat est direct), puis on multiplie par b^n.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

1.3 Inégalités

1.3.1 Inégalités et additions

Des inégalités **dans le même sens** peuvent s'additionner :

Proposition – *Soient a, b, c, d des réels, alors si les deux inégalités $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ sont vraies, on a aussi : $a + c \leqslant b + d$.*

Remarque – Majorer une somme est une activité très fréquente en mathématique.

Corollaire – Soient n un entier naturel non nul, $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des réels, alors on a :

$$\text{si pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant y_i \text{ alors } \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Méthode 2 Encadrer une somme

Pour encadrer une somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, la première idée à avoir est de considérer que $1 \leqslant k \leqslant n$ (vu les bornes de la somme) et d'en déduire un encadrement de x_k.
Puis on somme ces encadrements grâce à la proposition précédente.

Exemple d'application

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{n+k}$ pour tout entier n. Déterminons la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à l'aide d'un encadrement :

Solution

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $1 \leqslant k \leqslant n$, donc $n + 1 \leqslant n + k \leqslant n + n = 2n$, puis $\dfrac{1}{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n+k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), donc $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n+k} \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2n} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Sommons alors ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{n+k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}(n-1+1)}{n+1} = \frac{n\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{1+\frac{1}{n}}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{n}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$, d'où l'encadrement $\dfrac{\sqrt{n}}{1+\frac{1}{n}} \geqslant u_n \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

Puis, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$ (et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\frac{1}{n}} = +\infty$), le théorème de comparaison donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1.3.2 Inégalités et produits

Rappelons que multiplier une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité :

Proposition – *Si* $0 \leqslant x$ *et* $a \leqslant b$*, alors* $ax \leqslant bx$.

En revanche, multiplier par un nombre négatif renverse le sens des inégalités :

Proposition – *Si* $x \leqslant 0$ *et* $a \leqslant b$*, alors* $ax \geqslant bx$*. Et même,* $a \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant -a$.

De plus, des inégalités **dans le même sens** de nombres **positifs** peuvent aussi se multiplier :

Proposition – *Soient a, b, c, d des réels, si les deux inégalités* $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{cases}$ *sont vraies, alors on a :* $0 \leqslant ac \leqslant bd$.

Corollaire – Soient n un entier naturel non nul, $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des réels, alors on a :

$$\text{si pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ 0 \leqslant x_i \leqslant y_i \text{ alors } 0 \leqslant \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i$$

Rappelons aussi (c'est tellement fondamental) le comportement de certaines fonctions puissances vis à vis des inégalités (ce qui revient à utiliser la définition de « croissant » ou « décroissant ») :

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, donc :

Proposition – $0 < x \leqslant y \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $x \leqslant y < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x} < 0$

Mais, $x < 0 < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < 0 < \dfrac{1}{y}$ *(donc* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *n'est pas décroissante sur* $\mathbb{R}^*$*).*

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc :

Proposition – $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant y^2$ et $x \leqslant y \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant y^2 \leqslant x^2$

Remarque – Si on sait juste $x \leqslant 0 \leqslant y$, on ne peut pas comparer x^2 et y^2.

1.3.3 Valeur absolue

Définition – Valeur absolue

Soit x un réel. On définit la **valeur absolue** de x, notée $|x|$, par : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

$|2| = 2$ et $|-5| = 5$.

Proposition – *Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, alors :*

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a \Leftrightarrow x \in [-a, a] \qquad |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

Remarque – La proposition précédente admet une version avec inégalités strictes et intervalles ouverts.

Proposition – *Soient x et y deux réels, alors* $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

Remarques

1. En particulier, pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$ (et non pas x).
2. La version avec inégalité est : $x^2 \leqslant y^2 \Leftrightarrow |x| \leqslant |y|$.

Proposition – Inégalité triangulaire
Soient x et y deux réels, alors $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ et $|x - y| \leqslant |x| + |y|$.

Corollaire – Plus généralement, soient n un entier naturel non nul, $x_1, \ldots, x_n$ des réels, alors on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Remarque – Le résultat de ce corollaire est très utile en pratique, car on cherche souvent à majorer la valeur absolue d'une somme.

1.3.4 Inégalités et fonctions

Méthode 3 Étudier le signe d'une expression

Pour déterminer le signe d'une expression $f(x)$, on peut :

- factoriser $f(x)$, puis faire un tableau de signe,
- utiliser les variations de $x \mapsto f(x)$,
- résoudre deux des trois (in)équations suivantes : $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) < 0$.

Exemple d'application

Donnons le signe de $f(x) = 4e^x - x^2e^x$ en fonction du réel x.

Solution

On a $f(x) = e^x(4 - x^2) = e^x(2 - x)(2 + x)$. Dressons le tableau de signe :

x		-2		2	
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$2+x$	$-$	0	$+$		$+$
e^x	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $f(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-2, 2]$.

Méthode 4 Montrer $g(x) \leqslant f(x)$ pour tout x

Pour montrer que $g(x) \leqslant f(x)$ pour $x \in I$ (avec I intervalle), une possibilité est d'étudier le signe de la fonction $h : x \in I \mapsto f(x) - g(x) \in \mathbb{R}$ en faisant l'étude de ses variations et en cherchant le signe de ses maximums et/ou minimums.

Exemple d'application

Montrons que $\sin(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

Solution

Posons donc $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x - \sin(x)$. Alors, pour tout réel x, $h'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$, donc h est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $x = 0$ est un minimum de h sur $\mathbb{R}_+$, autrement dit $h(x) \geqslant h(0)$ pour $x \geqslant 0$, et comme $h(0) = 0$, on a bien $x - \sin(x) \geqslant 0$.

Remarque – Rappelons qu'une fonction croissante est une fonction qui préserve les inégalités, une fonction décroissante est une fonction qui renverse les inégalités. L'étude de cette propriété (notamment le lien avec la dérivée, le cas échéant) sera faite plus en détail au chapitre 16.

Synthèse

Savoirs

- Les formules des sommes usuelles
- Les résultats sur les coefficients binomiaux
- Les formules sur les puissances
- La formule du binôme de Newton

Savoir-faire

- Manipuler le symbole $\sum$ (et le symbole $\prod$)
- Manipuler des inégalités

Mots-clés

- Formule du binôme de Newton
- Puissances

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

1.1 **Vrai ou faux ?**

1) $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k$.

2) $\sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

3) Si $a \leqslant b$ et $x \leqslant y$, alors $a - x \leqslant b - y$.

4) $\sum_{k=1}^{50} \frac{e^{2k}}{(2k)^{13}} = \sum_{p=2}^{100} \frac{e^p}{p^{13}}$.

5) $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$.

6) $\prod_{k=1}^{n} (\lambda x_k) = \lambda \prod_{k=1}^{n} \lambda x_k$.

7) $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$.

8) $\sum_{k=1}^{n} (\lambda + x_k) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} x_k$.

1.2 Donner un contre-exemple à chacune des propositions suivantes (elles sont toutes fausses) :

1) Si $x \leqslant y$ alors $2x \leqslant 4y$.

2) $\sum_{k=1}^{3} (x_k \times y_k) = \left(\sum_{k=1}^{3} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{3} y_k\right)$.

3) $\prod_{k=1}^{3} (x_k + y_k) = \left(\prod_{k=1}^{3} x_k\right) + \left(\prod_{k=1}^{3} y_k\right)$.

1.3 Simplifier les écritures suivantes :

$$\sum_{k=7}^{38} \ln(15) \quad ; \quad \sum_{k=5}^{25} \ln(k)$$

1.4 À quelle condition a-t-on $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$?

1.5 Simplifier $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k$.

1.6 Effectuer le changement d'indice $j = 15 - k$ dans la somme :

$$\sum_{k=3}^{7} \frac{\cos(15 - k)}{k + 2}$$

1.7 **QCM**

Parmi les formules suivantes (pour $a > 0$, $b > 1$), lesquelles sont vraies ?

a) $\ln(a) - \ln(b) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

b) $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$

c) $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

1.8 Soit a et b deux réels non nuls tels que $a + b \neq 0$. A-t-on $\exp\left(\frac{1}{a+b}\right) = \exp\left(\frac{1}{a}\right)\exp\left(\frac{1}{b}\right)$?

1.9 Soient a et b deux réels non nuls. Simplifier les deux expressions : $\frac{a^{-4}b^3a^3}{(ab^2)^{-2}}$ et $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-4} \times \left(\frac{b^2}{a^3}\right)^{-3}$.

1.10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simplifiée de $u_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{2k}{n+1}}\right)$.

1.11 Pour n, k, i entiers naturels avec $i + k \leqslant n$, montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{i} = \binom{n-i}{k}\binom{n}{i}$.

1.12 Simplifier $\binom{11}{7} + \binom{11}{8}$ à l'aide de la formule de Pascal.

1.13 À l'aide du triangle de Pascal, déterminer $\binom{7}{4}$

1.14 Soit $n \geq 1$. Donner la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(-1)^{n-1-k}$$

1.15 À l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(2 + x)^6$.

1.16 Factoriser $A = 2^3 - x^6$ et $B = 1 + y^5$.

1.17 **QCM**

Soit $1 \leqslant a \leqslant 3$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$. A-t-on :

a) $1 \leqslant a - b \leqslant 2$?

b) $0 \leqslant a - b \leqslant 3$?

c) $1 \leqslant a - b \leqslant 3$?

1.18 Trouver les réels x tels que

$$(x^2 - 3x + 2)^2 - (x^2 + 5x - 2)^2 < 0$$

1.19 Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|ab| \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}$$

1.20 Trouver les réels x tels que $|x - 4| \leqslant 2$.

1.21 Que vaut $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2}}{x}$?

1.22 Trouver les réels $x > 0$ vérifiant l'équation

$$|1 + \ln(x)| + 3\ln(x) - \ln^2(x) = 0$$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 19.

■ Sommes et produits

1.23

Écrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes :

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 \; ; \; \sum_{i=n}^{2n} i \; ; \; \sum_{i=10}^{30} (2i-1) \; ; \; \sum_{n=-2}^{20} n^2.$$

Dans chaque cas, déterminer le nombre de termes dans la somme, puis la calculer.

1.24 ◎

Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

$$S = \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \cdots + \ln(368);$$
$$T = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots - a^{19} + a^{20};$$
$$U = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 22;$$
$$V = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 96 + 97;$$
$$W = 1000 + 1010 + 1020 + 1030 + \cdots + 1150.$$

Dans chaque cas, calculer la somme.

1.25

Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

$$A = \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+3} + \frac{3}{3+4} + \cdots + \frac{524}{524+525};$$
$$B = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots - \frac{236}{237} + \frac{237}{238}.$$

1.26

Écrire les nombres suivants en faisant un changement d'indice de sorte que la première valeur de l'indice de la nouvelle somme soit 0 :

$$A = \sum_{i=10}^{20} i^{i-8} \; ; \; B = \sum_{k=-4}^{50} \frac{e^k}{k+1} \; ; \; C = \sum_{n=2}^{45} e^3.$$

1.27

Simplifier au maximum l'écriture des nombres suivants :

$$A = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{i} - \sum_{k=3}^{21} \frac{1}{k} \; ; \; B = \sum_{j=1}^{100} (73^j - 2j + 4) \; ;$$
$$C = \sum_{i=-2}^{20} (10i + 4) \; ; \; D = \sum_{k=1}^{100} \left(\sum_{i=0}^{k} 2^i \right).$$

1.28

Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n} \; ;$$
$$B_n = 5^3 - 5^4 + \cdots + 5^{257} - 5^{258}.$$

1.29

Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^j}{3^{j+1}}; B_n = \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} ; C_n = \sum_{i=-1}^{n} \frac{5 \times 2^i}{3^{i+1}}$$

1.30

Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{i=-n}^{-1} 2i \; ; \; B_n = \sum_{i=-n}^{n} (i+1).$$

1.31

Calculer en fonction de n chacune des quantités suivantes :

$$\prod_{k=1}^{n} n \; ; \; \prod_{k=1}^{n} k \; ; \; \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

1.32

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n} x^k$. En déduire $\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

1.33 Sommes télescopiques

1) En utilisant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $T = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k}$.

2) En utilisant que $\frac{2}{k^2-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$, calculer $U = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

3) En utilisant que $k = (k+1) - 1$, calculer $V = \sum_{k=1}^{n} k.k!$ et $W = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

4) Calculer $X = \sum_{i=1}^{10} \ln\left(\frac{i}{i+1}\right)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

1.34 ◎

Notons $U_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sin(x)U_n$, puis en déduire une expression de U_n en fonction de x et n.

1.35 D'après EML 2007 S

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $U_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

1) En décomposant la somme de S_{2n+1} suivant les indices pairs et impairs, exprimer T_n en fonction de S_{2n+1} et S_n.

2) En décomposant la somme de U_n suivant les indices pairs et impairs, exprimer U_n en fonction de S_n et T_n, puis de S_{2n+1} et S_n.

■ Inégalités et signe

1.36

Soit $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Encadrer v_n, puis donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1.37

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} ke^{-k^2}\left(\cos(\sqrt{k}) + \sin(k^2+1)\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $|S_n| \leqslant n(n+1)$.

1.38

Soit a, b, c des réels avec $a \neq -b$, $-2 \leqslant a \leqslant 1$, $-1 \leqslant b \leqslant 3$ et $-3 \leqslant c \leqslant 2$. Donner un encadrement de $a-b$, $\frac{1}{a+b}$, $c^2(a-b)$.

1.39

1) Montrer : pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

2) En déduire que pour tout entier $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

3) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.

■ Factoriels et coefficients binomiaux

1.40 ◎

Calculer $u_n = \prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $v_n = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ en fonction de $n!$, 2^n et $(2n+1)!$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

1.41

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on définit pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod_{i=0}^{p}(k+i)}$$

Prouver par récurrence sur n que :

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ S_n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right)$$

1.42

En utilisant la relation $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ (valable pour $n \geqslant p \geqslant 1$) ou la formule de Pascal, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k},\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

1.43 ◎

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k}$ où n entier, $n \geqslant 2$.

1.44

Calculer les sommes suivantes pour $n \geqslant 1$:

$$U_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} \text{ et } V_n = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1},$$

en utilisant $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ (qui se calculent facilement).

1.45 ◎

Démontrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} \geqslant \frac{n^k}{k^k}$.

1.46 ◎

1) Pour tout entier naturel non nul n, rappeler la valeur de $S_0(n) = \sum_{k=1}^{n} k$, puis montrer que $S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ vaut

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2) Soit $p \geqslant 0$. Conjecturer une formule générale pour $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{p} (k+i)$, puis la montrer par récurrence sur n.

3) À l'aide de $S_2(n)$, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

4) Écrire $\dfrac{S_p(n)}{(p+1)!}$ sous la forme $\sum_{k=1}^{n} \binom{\cdots}{\cdots}$; en déduire une deuxième façon de calculer $S_p(n)$, en montrant que $\dfrac{S_p(n)}{(p+1)!} = \binom{p+n+1}{p+2}$.

Indications

1.24 Pour calculer V, ajouter et enlever les termes pairs qui manquent pour reconnaître une somme du cours.

1.34 Calculer $\sin(x)U_1$, $\sin(x)U_2$, éventuellement $\sin(x)U_3$, à l'aide de formules trigonométriques, et conjecturer une formule pour $\sin(x)U_n$, à prouver par récurrence sur n.

1.40 Calculer $u_n v_n$ ou multiplier et diviser v_n par tous les nombres pairs qu'il manque pour reconnaître au numérateur $(2n+1)!$.

1.43 On procède comme dans l'exercice précédent. Mais pour reconnaître une formule du binôme de Newton, il faudra rajouter/enlever un terme à la somme ...

1.45 Établir que $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \dfrac{n-i}{k-i}$, puis $\dfrac{n-i}{k-i} \geqslant \dfrac{n}{k}$ pour $i \in [\![0, k-1]\!]$.

1.46 Pour la question 2, montrer par récurrence sur n que $S_p(n) = \dfrac{1}{p+2} \prod_{i=0}^{p+1} (n+i)$.

Pour la dernière question, une fois obtenue l'écriture sous forme de somme, obtenir l'expression désirée par une récurrence sur n.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

1.1

1) Vrai : la seule différence entre ces deux sommes est le terme donné par $k = 0$, qui est nul.

2) Faux : la différence entre ces deux sommes est le terme donné par $k = 0$, qui vaut 1.

3) Faux (considérer par exemple $a = 0$, $b = 1$, $x = 0$, $y = 2$). On retiendra qu'on ne peut pas soustraire terme à terme des inégalités.

4) Faux. L'erreur serait de faire un changement d'indice $p = 2k$, qui n'est pas valide. Ici, la deuxième somme comporte beaucoup plus de termes que la première, et notamment tous les termes de la première, plus d'autres (tous strictement positifs).

5) Vrai.

6) Faux si $n \geqslant 2$. On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda x_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} \lambda x_k$.

7) Faux pour $n \geqslant 2$. Par exemple pour $n = 2$, on est en train d'écrire l'égalité entre $a^2 + b^2$ et $(a+b)^2$...

8) Faux si $n \geqslant 2$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda + x_k) = n\lambda + \sum_{k=1}^{n} x_k$.

1.2

1) Si on a $0 \leqslant x \leqslant y$, comme $0 \leqslant 2 \leqslant 4$, on peut effectivement multiplier les inégalités, et donc obtenir $2x \leqslant 4y$.

Mais si on prend $x = -1$, $y = -\dfrac{3}{4}$, alors $x \leqslant y$ et $2x = -2 > -3 = 4y$.

2) Si (par exemple) $x_k = y_k = 1$ pour tout k, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(x_k \times y_k) = 3$ et $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{3} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{3} y_k\right) = 3 \times 3 = 9$.

3) Si (par exemple) $x_k = y_k = 1$ pour tout k, alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{3}(x_k + y_k) = 2 \times 2 \times 2 = 8$ alors que $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{3} x_k\right) + \left(\prod_{k=1}^{3} y_k\right) = 1 + 1 = 2$.

1.3

• Pour la première expression, on somme une constante, il suffit donc de la multiplier par le nombre de termes :

$$\sum_{k=7}^{38} \ln(15) = (38 - 7 + 1) \times \ln(15) = \boxed{32\ln(15)}.$$

• Calcul de la seconde expression :

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{25} \ln(k) &= \sum_{k=1}^{25} \ln(k) - \sum_{k=1}^{4} \ln(k) \\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^{25} k\right) - \ln(1 \times 2 \times 3 \times 4) \\ &= \boxed{\ln(25!) - \ln(24)}\end{aligned}$$

1.4

Il faut et il suffit que $q \neq 1$.

1.5

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k = \sum_{k=0}^{n}(-q)^k$,

★ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k = \frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}$ si $-q \neq 1$ (donc $q \neq -1$),

★ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k = n+1$ si $-q = 1$ (donc $q = -1$).

1.6

$$\begin{aligned}3 \leqslant k \leqslant 7 &\Leftrightarrow -3 \geqslant -k \geqslant -7 \\ &\Leftrightarrow 12 \geqslant 15 - k \geqslant 8\end{aligned}$$

Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} \frac{\cos(15-k)}{k+2} = \sum_{j=8}^{12} \frac{\cos(j)}{17-j}$.

1.7

Aucune !

1.8

Si l'égalité est vraie, elle le reste en composant avec la fonction ln, donc on obtiendrait $\ln\left(\exp\left(\dfrac{1}{a+b}\right)\right) = \ln\left(\exp\left(\dfrac{1}{a}\right)\exp\left(\dfrac{1}{b}\right)\right)$. En utilisant les deux formules $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(\exp(x)) = x$, on obtiendrait $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, ce qui est faux. Donc, la réponse est : non.

1.9

$\dfrac{a^{-4}b^3a^3}{(ab^2)^{-2}} = ab^7$ et $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^{-4} \times \left(\dfrac{b^2}{a^3}\right)^{-3} = ab^6$.

1.10

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(e^{\frac{2k}{n+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n+1} \\ &= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{2}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \boxed{n}\end{aligned}$$

1.11

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{i!((n-k)-i)!} = \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!}.$$

$$\binom{n-i}{k}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{k!((n-i)-k)!} \times \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{k!(n-i-k)!i!}.$$

Il y a donc bien égalité.

1.12

$\displaystyle\binom{11}{7} + \binom{11}{8} = \binom{12}{8}$.

1.13 On lit sur la huitième ligne du triangle de Pascal, le cinquième coefficient : $\binom{7}{4} = 35$.

En effet, les lignes 6, 7 et 8 du triangle sont :

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

1.14 La formule du binôme de Newton donne :

$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = (1+1)^{n-1} = \boxed{2^{n-1}}$ et $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^{n-1-k} = (1-1)^{n-1} = \boxed{0}$ si $n \geq 2$, $\boxed{1}$ si $n = 1$.

1.15

$$\begin{aligned}(2+x)^6 &= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}2^{n-k}x^k \\ &= 2^6 + 6\times 2^5 x + 15\times 2^4 x^2 \\ &\quad +20\times 2^3 x^3 + 15\times 2^2 x^4 + 6\times 2x^5 + x^6\end{aligned}$$

On lit les coefficients binomiaux sur la septième ligne du triangle de Pascal, par exemple (sinon on peut les calculer directement à partir des factorielles).

1.16 $A = 2^3 - x^6 = (\sqrt{2})^6 - x^6$, donc la formule de factorisation donnée dans le cours donne :

$$A = (\sqrt{2}-x)(2^{\frac{5}{2}} + 4x + 2^{\frac{3}{2}}x^2 + 2x^3 + 2^{\frac{1}{2}}x^4 + x^5)$$

On aurait aussi pu écrire :

$$\begin{aligned}2^3 - x^6 &= 2^3 - (x^2)^3 \\ &= (2-x^2)(4+2x^2+x^4) \\ &= (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(4+2x^2+x^4)\end{aligned}$$

$B = 1+y^5 = 1-(-y)^5$, donc la formule de factorisation donnée dans le cours donne :

$$\begin{aligned}B &= (1-(-y))(1+(-y)+(-y)^2+(-y)^3+(-y)^4) \\ &= (1+y)(1-y+y^2-y^3+y^4)\end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-y$.

1.17 Comme $0 \leqslant b \leqslant 1$, en multipliant par -1, on a $-1 \leqslant -b \leqslant 0$. Comme des inégalités peuvent s'additionner, on obtient $1-1 \leqslant a-b \leqslant 3+0$, donc $0 \leqslant a-b \leqslant 3$. Donc **b)** est vraie.

Les deux autres sont fausses, si on considère par exemple $a = b = 1$.

1.18 L'identité remarquable $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ donne :

$$\begin{aligned}&(x^2-3x+2)^2 - (x^2+5x-2)^2 \\ &= (-8x+4)(2x^2+2x) \\ &= 2(-8x+4)(x+1)x\end{aligned}$$

On fait donc un tableau de signe :

x	$-$	-1	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$
$-8x+4$	$+$		$+$	$+$	0		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$			$+$
$2(-8x+4)(x+1)x$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc l'ensemble cherché est $]-1,0[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

1.19 Comme $|a|^2 = a^2$ et $|b|^2 = b^2$, on a

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{2} - |ab| &= \frac{|a|^2+|b|^2-2|a|.|b|}{2} \\ &= \frac{(|a|-|b|)^2}{2} \geqslant 0\end{aligned}$$

Donc l'inégalité désirée est vraie.

1.20 $|x-4| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x-4 \leqslant 2$, donc en additionnant 4 de chaque côté, on a $|x-4| \leqslant 2 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 6$. L'ensemble cherché est le segment $\boxed{[2,6]}$.

1.21 $\sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2} = \sqrt{2}|x|$, donc $\frac{\sqrt{2x^2}}{x} = \sqrt{2}\frac{|x|}{x}$. Si $x < 0$ (ce qui est notamment le cas lorsque x tend vers $-\infty$), alors $|x| = -x$, donc $\frac{\sqrt{2x^2}}{x} = -\sqrt{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2}}{x} = -\sqrt{2}$.

1.22 Il faut supprimer la valeur absolue, pour cela il faut restreindre le domaine de recherche pour la solution :

➜ Pour x tel que $1+\ln(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire $x \in]0, e^{-1}]$, l'équation devient : $-1-\ln(x)+3\ln(x)-\ln^2(x) = 0$ (car $|1+\ln(x)| = -(1+\ln(x))$), soit en posant $X = \ln(x)$, $-1+2X-X^2 = 0$. Seul $X = 1$ est solution, donc $\ln(x) = 1$, donc $x = e$, qui est à rejeter *a priori*, car ne faisant pas partie du domaine où l'on s'est placé. Donc, il n'y a pas de solution sur $]0, e^{-1}]$.

➜ Pour x tel que $1+\ln(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $x \geqslant e^{-1}$, l'équation devient : $1+\ln(x)+3\ln(x)-\ln^2(x) = 0$ (car $|1+\ln(x)| = 1+\ln(x)$), soit en posant $X = \ln(x)$, $1+4X-X^2 = 0$. Ce qui revient à $X = 2-\sqrt{5}$ ou $X = 2+\sqrt{5}$, et les solutions de l'équation initiale sont $\boxed{x = e^{2-\sqrt{5}}}$ et $\boxed{x = e^{2+\sqrt{5}}}$ car elles sont bien dans $[e^{-1}, +\infty[$, donc à garder.

En effet, $2-\sqrt{5} > -1 \Leftrightarrow 3 > \sqrt{5}$, et comme comparer deux nombres positifs revient à comparer leurs carrés, $2-\sqrt{5} > -1 \Leftrightarrow 9 > 5$, ce qui est vrai. Donc $2+\sqrt{5} > 2-\sqrt{5} > -1$, donc par stricte croissance de la fonction exponentielle, on a bien $e^{2+\sqrt{5}} > e^{2-\sqrt{5}} > e^{-1}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

1.23

Pour le nombre de termes : dans une somme $\sum_{k=a}^{b}$, il y a $b-a+1$ termes.

➜ $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$, la somme a 5 termes.

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5\times(5+1)\times(2\times5+1)}{6} = \boxed{55}.$$

➜ $\sum_{i=n}^{2n} i = n+(n+1)+\cdots+(2n-2)+(2n-1)+2n$, et cette somme a $2n-n+1=n+1$ termes. Pour la calculer, deux possibilités s'offrent à nous : soit on fait un changement d'indice, soit on « ajoute et enlève » les termes qui manquent pour se ramener à la somme du cours.

Méthode 1 : posons $j=i-n$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{2n} i &= \sum_{j=0}^{n}(j+n)\\ &= \sum_{j=0}^{n} j+\sum_{j=0}^{n} n\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+n(n-0+1)\\ &= \boxed{\frac{3}{2}n(n+1)}\end{aligned}$$

Méthode 2 : Ajoutons puis enlevons les termes pour i variant de 0 à $n-1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{2n} i &= \sum_{i=0}^{2n} i-\sum_{i=0}^{n-1} i\\ &= \frac{(2n)(2n+1)}{2}-\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}\\ &= \frac{n(4n+2-(n-1))}{2}\\ &= \frac{3}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

➜ $\sum_{i=10}^{30}(2i-1) = 19+21+\cdots+57+59$ et cette somme a $30-10+1=21$ termes.

$$\begin{aligned}\sum_{i=10}^{30}(2i-1) &\underset{j=i-10}{=} \sum_{j=0}^{20}(2j+19)\\ &= 2\sum_{j=0}^{20} j+19\sum_{j=0}^{20} 1\\ &= 2\frac{20\times(20+1)}{2}+19\times21\\ &= \boxed{819}\end{aligned}$$

➜ $\sum_{n=-2}^{20} n^2 = (-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+\cdots+19^2+20^2$, et cette somme a $20-(-2)+1=23$ termes.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-2}^{20} n^2 &= \sum_{n=-2}^{0} n^2+\sum_{n=1}^{20} n^2\\ &= (-2)^2+(-1)^2+0^2\\ &\quad+\frac{20\times(20+1)\times(2\times20+1)}{6}\\ &= \boxed{2875}\end{aligned}$$

1.24

$$S = \sum_{k=2}^{368}\ln(k) = \ln\left(\prod_{k=2}^{368} k\right) = \boxed{\ln(368!)}.$$

$T = \sum_{k=0}^{20}(-1)^k a^k = \sum_{k=0}^{20}(-a)^k = \boxed{\frac{1-(-a)^{21}}{1+a}}$ si $a\neq-1$. Si $a=-1$, $T=21$.

$$U = \sum_{k=1}^{11} 2k = 2\sum_{k=1}^{11} k = 2\frac{11\times12}{2} = \boxed{132}.$$

$V = \sum_{k=1}^{97}(-1)^{k+1}k$. Pour la calculer, remarquons que V est la somme des nombres impairs moins la somme des nombres pairs, donc si on ajoute et retranche les nombres pairs, on aura la somme de tous les nombres, moins deux fois la somme des nombres pairs (formellement, c'est une égalité du type $a-b=(a+b)-2b$) :

$$\begin{aligned}V &= 1+2+\cdots+97-2(2+4+\cdots+96)\\ &= \sum_{k=1}^{97} k-2\sum_{k=1}^{48} 2k\\ &= \frac{97\times98}{2}-4\frac{48\times49}{2}\\ &= \boxed{49}\end{aligned}$$

Remarque – On a aussi

$$\begin{aligned}V &= (1-2)+(3-4)+\cdots+(95-96)+97\\ &= \underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{48\text{ termes}}+97\\ &= -48+97=49.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W &= \sum_{k=0}^{15}(1000+10k)\\ &= 1000\sum_{k=0}^{15} 1+10\sum_{k=0}^{15} k\\ &= 1000\times16+10\times\frac{15\times16}{2}\\ &= \boxed{17200}\end{aligned}$$

Remarque – On aurait aussi pu partir de $W=\sum_{k=100}^{115} 10k$.

1.25

$$A = \sum_{k=1}^{524}\frac{k}{k+(k+1)} = \sum_{k=1}^{524}\frac{k}{2k+1}$$

$$B = \sum_{k=1}^{237}(-1)^{k+1}\frac{k}{k+1}.$$

1.26

On pose $j = i - 10$, alors $A = \sum_{j=0}^{10} (j+10)^{j+2}$.

On pose $j = k + 4$, alors $B = \sum_{j=0}^{54} \frac{e^{j-4}}{j-3}$.

On pose $j = n - 2$, on a $C = \sum_{j=0}^{43} e^3$.

1.27

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{20} \frac{1}{i} - \left(\sum_{k=3}^{20} \frac{1}{k} + \frac{1}{21} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{21} = \boxed{\frac{61}{42}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{100} 73^j - 2 \sum_{j=1}^{100} j + 4 \sum_{j=1}^{100} 1 \\ &= \sum_{j=0}^{100} 73^j - 1 - 2\frac{100 \times 101}{2} + 4 \times 100 \\ &= \frac{73^{101} - 1}{73 - 1} - 1 - 10100 + 400 \\ &= \boxed{\frac{73^{101} - 698473}{72}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (10 \times (-2) + 4) + (10 \times (-1) + 4) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{20} (10i + 4) \\ &= -16 - 6 + 10\frac{20 \times 21}{2} + 4 \times 21 \\ &= \boxed{2162} \end{aligned}$$

$\sum_{i=0}^{k} 2^i = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1$, donc

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=1}^{100} \left(2^{k+1} - 1 \right) \\ &\underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{99} \left(2^{j+2} - 1 \right) \\ &= 4 \sum_{j=0}^{99} 2^j - \sum_{j=0}^{99} 1 \\ &= 4\frac{2^{100} - 1}{2 - 1} - (99 - 0 + 1) \times 1 \\ &= \boxed{2^{102} - 104} \end{aligned}$$

1.28

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = \sum_{k=0}^{n} 4^k \\ &= \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \boxed{\frac{4^{n+1} - 1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=3}^{258} (-1)^{k+1} 5^k = -\sum_{k=3}^{258} (-5)^k \\ &= -(-5)^3 \frac{(-5)^{258-3+1} - 1}{-5 - 1} \\ &= \boxed{-5^3 \frac{5^{256} - 1}{6}} \end{aligned}$$

1.29

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{2}{3} \right)^j \\ &= \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \boxed{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{3} \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{3} \right)^p \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{n-2+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} \\ &= \boxed{\frac{1}{18} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{5}{3} \sum_{i=-1}^{n} \left(\frac{2}{3} \right)^i \\ &= \frac{5}{3} \times \left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{n-(-1)+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} \\ &= \boxed{\frac{15}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+2} \right)} \end{aligned}$$

1.30

➜ Faisons le changement de variable $j = -i$:
on a $-n \leqslant i \leqslant -1 \Leftrightarrow 1 \leqslant -i \leqslant n$, et donc

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} 2(-j) = \boxed{-n(n+1)}.$$

➜ Faisons le changement de variable $j = i + n$:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{j=0}^{2n} (j - n + 1) \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} + (1 - n)(2n - 0 + 1) \\ &= \boxed{2n + 1} \end{aligned}$$

1.31

$\prod_{k=1}^{n} n = \boxed{n^n}$, $\prod_{k=1}^{n} k = \boxed{n!}$.

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k} \right) &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1)}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n} \\ &= \boxed{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

1.32 Si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Comme c'est une égalité de fonctions, on peut dériver, et on obtient alors en dérivant chaque membre de l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}}$$

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.33

1) En utilisant l'indication, on reconnaît des sommes télescopiques :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &\underset{i=k+1}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i} \\ &= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1} \\ &= \boxed{1-\frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

Puis, $\dfrac{1}{k^3-k} = \dfrac{1}{k}\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{k(k-1)} - \dfrac{1}{k(k+1)}$, donc, avec un raisonnement analogue au précédent :

$$T = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}\right) = \boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}}$$

2) Là encore, l'indication permet de transformer la somme :

$$\begin{aligned} 2U &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &\underset{\substack{i=k-1\\ j=k+1}}{=} \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}-\sum_{j=3}^{n+1}\frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{i=3}^{n-1}\frac{1}{i}-\sum_{j=3}^{n-1}\frac{1}{j}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{U = \dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+2}}$.

3) Grâce à l'indication, on peut écrire :

$$k.k! = (k+1)! - k! \text{ et } \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!},$$

donc on reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^{n}((k+1)!-k!) \\ &= (n+1)!-1! = \boxed{(n+1)!-1} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right) \\ &= \frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!} = \boxed{1-\frac{1}{(n+1)!}} \end{aligned}$$

4) On a $\ln\left(\dfrac{i}{i+1}\right) = \ln(i) - \ln(i+1)$, donc on reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{10}(\ln(i)-\ln(i+1)) \\ &= \ln(1)-\ln(11) = \boxed{-\ln(11)} \end{aligned}$$

1.34 Utilisons la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, réécrite en $\sin(a)\cos(a) = \dfrac{1}{2}\sin(2a)$:

$$\begin{aligned} \sin(x)U_1 &= \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x), \\ \sin(x)U_2 &= \sin(x)\cos(x)\cos(2x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) \\ &= \frac{1}{4}\sin(4x) \end{aligned}$$

Notons P_n : « $\sin(x)U_n = \dfrac{1}{2^n}\sin(2^n x)$ », et montrons P_n par récurrence sur n.

• **Initialisation :** la formule est vraie pour $n = 1$ d'après les calculs précédents.

• **Hérédité :** Supposons P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Alors, comme $U_{n+1} = U_n \times \cos(2^n x)$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(x)U_{n+1} &= \sin(x)U_n\cos(2^n x) \\ &= \frac{1}{2^n}\sin(2^n x)\cos(2^n x) \\ &= \frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\sin(2\times 2^n x) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1}x) \end{aligned}$$

donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence, on en déduit que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Comme $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\sin(x) \neq 0$, donc $U_n = \boxed{\dfrac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)}}$.

1.35

1) On a :

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n+1\\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n+1\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^2}$$

k pair s'écrit $k = 2p$ avec p entier, et si on veut $1 \leqslant k \leqslant 2n+1$, alors $1 \leqslant 2p \leqslant 2n+1$, donc $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant n + \frac{1}{2}$. Mais comme p est entier, on ne garde que $1 \leqslant p \leqslant n$.
k impair s'écrit $k = 2p+1$ avec p entier, et si on veut $1 \leqslant 2p+1 \leqslant 2n+1$, alors $0 \leqslant p \leqslant n$. Donc

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \sum_{1\leqslant 2p+1\leqslant 2n} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{1\leqslant 2p\leqslant 2n} \frac{1}{(2p)^2} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{4p^2} \\ &= T_n + \frac{1}{4} S_n \end{aligned}$$

donc $\boxed{T_n = S_{2n+1} - \frac{1}{4} S_n}$.

2) On a déjà vu le début de ce calcul en exemple dans le cours :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n+1\\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n+1\\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^k}{k^2} \\ &= \sum_{1\leqslant 2p\leqslant 2n+1} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{1\leqslant 2p+1\leqslant 2n+1} \frac{-1}{(2p+1)^2} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{4p^2} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{4} S_n - T_n} \end{aligned}$$

Donc $U_n = \frac{1}{4} S_n - S_{2n+1} + \frac{1}{4} S_n = \boxed{\frac{1}{2} S_n - S_{2n+1}}$.

1.36

On a $1 \leqslant k \leqslant 2n+1$, donc

$$n^2 + 1 \leqslant n^2 + k \leqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

et comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\sqrt{n^2+1} \leqslant \sqrt{n^2+k} \leqslant \sqrt{(n+1)^2} = |n+1| = n+1.$$

Puis, la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Sommons alors ces inégalités (qui sont valables pour $1 \leqslant k \leqslant 2n+1$) :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = v_n \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} &= \frac{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} &= \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} \\ &= \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \end{aligned}$$

donc l'encadrement de v_n est

$$\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \leqslant v_n \leqslant \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

et le théorème d'encadrement donne $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2}$.

1.37

L'inégalité triangulaire donne

$$|S_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| ke^{-k^2} \left(\cos(\sqrt{k}) + \sin(k^2+1) \right) \right|$$

Comme des inégalités s'additionnent, il suffit de majorer $\left| ke^{-k^2} \left(\cos(\sqrt{k}) + \sin(k^2+1) \right) \right| = ke^{-k^2} \left| \cos(\sqrt{k}) + \sin(k^2+1) \right|$.

Comme des inégalités de réels positifs se multiplient, il suffit de majorer chacun des termes du produit.

Or, l'inégalité triangulaire donne

$$\left| \cos(\sqrt{k}) + \sin(k^2+1) \right| \leqslant \left| \cos(\sqrt{k}) \right| + \left| \sin(k^2+1) \right|.$$

Or, pour tout réel x, $|\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\sin(x)| \leqslant 1$ (car $\cos^2 + \sin^2 = 1$), donc $\left| \cos(\sqrt{k}) + \sin(k^2+1) \right| \leqslant 2$.

Puis, $-k^2 \leqslant 0$, donc $e^{-k^2} \leqslant 1$.

On a donc $ke^{-k^2} \left| \cos(\sqrt{k}) + \sin(k^2+1) \right| \leqslant 2k$.

En regroupant, on obtient $|S_n| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

1.38

➜ On a $-3 \leqslant -b \leqslant 1$, donc comme des inégalités peuvent s'additionner, $\boxed{-5 \leqslant a-b \leqslant 2}$.

➜ De même, $-3 \leqslant a+b \leqslant 4$. Mais comme la fonction inverse n'est décroissante que sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^*$, il faut savoir le signe de $a+b$. Si $a+b > 0$, alors $\dfrac{1}{a+b} \geqslant \dfrac{1}{4}$. Si $a+b < 0$, alors $\dfrac{1}{a+b} \leqslant -\dfrac{1}{3}$.

Donc $\boxed{\dfrac{1}{a+b} \geqslant \dfrac{1}{4} \text{ ou } \dfrac{1}{a+b} \leqslant -\dfrac{1}{3}}$.

➜ $-3 \leqslant c \leqslant 2$ donne soit $0 \leqslant c \leqslant 2$, et alors $c^2 \leqslant 4$, soit $-3 \leqslant c \leqslant 0$, donc $c^2 \leqslant 9$. Dans les deux cas, on a $0 \leqslant c^2 \leqslant 9$ (et on ne peut avoir mieux, puisque $c = 0$ et $c = -3$ sont possibles).

Multiplier une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens des inégalités, donc

$$-5c^2 \leqslant c^2(a-b) \leqslant 2c^2.$$

Or $c^2 \leqslant 9$, donc $2c^2 \leqslant 18$ et $-5c^2 \geqslant -45$.
Donc $\boxed{-45 \leqslant c^2(a-b) \leqslant 18}$.

1.39

1) Posons $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto x - \ln(1+x) \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$, donc f' est négatif sur $]-1, 0]$ et positif sur $[0, +\infty[$, donc f admet un minimum global en 0. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x > -1$, $f(x) \geq 0$, donc $x \geq \ln(1+x)$.

2) $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$ d'après la première question, car $\dfrac{1}{k} > 0$, donc est bien strictement plus grand que -1.

Puis, $\ln(k+1) - \ln(k) = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right) \geq -\left(-\dfrac{1}{k+1}\right) = \dfrac{1}{k+1}$, toujours d'après la première question, car $\dfrac{-1}{k+1} > -1$.

3) L'idée est de sommer les inégalités. Mais surtout, on a en fait deux inégalités, et on va les traiter différement. En effet, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ est équivalent à

(1) : $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ et (2) : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$.

Sommons l'inégalité (1) pour k variant de 1 à n, on a :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, or la première somme est une somme télescopique, ce qui donne $\ln(n+1) - \ln(1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et comme $\ln(1) = 0$, on a $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Sommons l'inégalité (2) pour k variant de 1 à $n-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln((n-1)+1) - \ln(1)$$

Faisons le changement d'indice $j = k+1$, on a alors $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leq \ln(n)$. Il ne reste qu'à rajouter le terme pour $j = 1$ de la somme, qui fait 1, et donc on obtient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq \ln(n) + 1$.

En regroupant, on a bien :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$$

Remarque – Pour travailler sur une inégalité du type $a \leqslant b \leqslant c$, il est parfois plus simple de travailler sur $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ séparément.

1.40

Remarque – $u_n = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n)$ est le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ (ou $2n+1$).

$v_n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$ est le produit des entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$.

Donc $u_n \times v_n = (2n+1)!$.

Puis, $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \boxed{2^n n!}$.

$$\begin{aligned} v_n &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) \\ &= \frac{u_n \times v_n}{u_n} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n)} \\ &= \frac{(2n+1)!}{u_n} = \boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}} \end{aligned}$$

1.41

Notons P_n l'assertion « $S_n = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p!} - \dfrac{n!}{(n+p)!}\right)$ » et montrons la par récurrence sur $n \geqslant 1$.

• **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $S_1 = \dfrac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times (p+1)} = \dfrac{1}{(p+1)!}$. Puis,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1!}{(1+p)!}\right) &= \frac{1}{p}\left(\frac{p+1}{(p+1)p!} - \frac{1}{(p+1)!}\right) \\ &= \frac{1}{p}\left(\frac{p+1}{(p+1)!} - \frac{1}{(p+1)!}\right) \\ &= \frac{1}{p}\left(\frac{p}{(p+1)!}\right) = \frac{1}{(p+1)!} \end{aligned}$$

Donc on a bien $S_1 = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p!} - \dfrac{1!}{(1+p)!}\right)$, l'assertion P_1 est vraie.

• **Hérédité :** Supposons P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, donc $S_n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right)$. Alors :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times\cdots\times(n+1+p)} \\
&= S_n + \frac{n!}{(n+1+p)!} \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right) + \frac{n!}{(n+1+p)!} \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!} + \frac{p\times n!}{(n+1+p)!}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{(n+p+1)\times n!}{(n+p+1)!} + \frac{p\times n!}{(n+1+p)!}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{(n+1)\times n!}{(n+p+1)!}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{(n+1)!}{(n+p+1)!}\right)
\end{aligned}$$

donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion :** On a donc bien par récurrence sur n que P_n est vraie dès que $n \geqslant 1$.

1.42

➜ En remarquant que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour $n \geqslant k \geqslant 1$, nous obtenons (en supposant $n \geqslant 1$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&\underset{j=k-1}{=} n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \\
&= n(1+1)^{n-1} = \boxed{n2^{n-1}}
\end{aligned}$$

en reconnaissant la formule du binôme de Newton pour $(1+1)^{n-1}$. L'égalité reste vraie pour $n = 0$ (c'est juste $0 = 0$).

➜ Supposons $n \geqslant 1$. Faisons le changement de variable $i = k - 1$, puis utilisons le résultat précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} &\underset{i=k-1}{=} \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\binom{n-1}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i\binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} \\
&= (n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} \\
&= \boxed{(n+1)2^{n-2}}
\end{aligned}$$

➜ Pour $n \geqslant k \geqslant 0$ on a $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$, donc $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Si $S = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} \\
&\underset{i=k+1}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0}\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)}
\end{aligned}$$

en reconnaissant là encore un binôme de Newton.

1.43

Utilisons que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour $n \geqslant k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
S_n &= n\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k-1} \\
&\underset{i=k-1}{=} n\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i} \\
&= -n\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i} - (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right] \\
&= -n\left[(1-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}\right] \\
&= \boxed{n(-1)^{n-1}}
\end{aligned}$$

1.44

La formule du binôme de Newton donne $S_n = (1+1)^n = 2^n$. Puis, U_n est la même somme que S_n, sauf que l'on a gardé que les indices pairs, et pour V_n que les indices impairs. Donc $U_n + V_n = S_n$.

La formule du binôme de Newton donne $T_n = (1-1)^n = 0$ pour $n \geqslant 1$.

Si on ne prend que les termes d'indices pairs dans la somme de T_n, on obtient $\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}(-1)^{2p}\binom{n}{2p} = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p} = U_n$ car $(-1)^{2p} = 1$.

De même, si on ne prend que les termes d'indices impairs dans la somme de T_n, on obtient $\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n}(-1)^{2p+1}\binom{n}{2p+1} = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} -\binom{n}{2p+1} = -V_n$ car $(-1)^{2p+1} = -1$.

Donc $U_n - V_n = T_n$.

D'où $\begin{cases} U_n + V_n = 2^n \\ U_n - V_n = 0 \end{cases}$, puis $\boxed{U_n = V_n = 2^{n-1}}$.

1.45

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{1}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}
\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Donc $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$. Or pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$, on a

$$\frac{n-i}{k-i} \geqslant \frac{n}{k} \Leftrightarrow (n-i)k \geqslant n(k-i) \Leftrightarrow (n-k)i \geqslant 0$$

ce qui est vrai car $i \geqslant 0$ et $n \geqslant k$ par hypothèse. Comme des inégalités positives se multiplient, on a $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} \geqslant \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k$.

1.46

1) $S_0(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}[(2n+1)+3] \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

2) Fixons $p \geqslant 0$. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ l'assertion P_n :

$$\text{« } S_p(n) = \frac{n(n+1)\cdots(n+p+1)}{p+2} = \boxed{\frac{1}{p+2}\prod_{i=0}^{p+1}(n+i)} \text{ »}$$

• **Initialisation :** Pour $n = 1$,

$$S_p(1) = \prod_{i=0}^{p}(1+i) = \frac{p+2}{p+2}\prod_{i=0}^{p}(1+i) = \frac{1}{p+2}\prod_{i=0}^{p+1}(1+i),$$

donc P_1 est vraie.

• **Hérédité :** Supposons P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} S_p(n+1) &= S_p(n) + \prod_{i=0}^{p}(n+1+i) \\ &= \frac{1}{p+2}\prod_{i=0}^{p+1}(n+i) + \prod_{i=0}^{p}(n+1+i) \\ &= \frac{1}{p+2}\prod_{j=-1}^{p}(n+1+j) + \prod_{i=0}^{p}(n+1+i) \\ &= \frac{n}{p+2}\prod_{j=0}^{p}(n+1+j) + \prod_{i=0}^{p}(n+1+i) \\ &= \left[\frac{n}{p+2}+1\right]\prod_{j=0}^{p}(n+1+j) \\ &= \frac{1}{p+2}(n+p+2)\prod_{j=0}^{p}(n+1+j) \\ &= \frac{1}{p+2}\prod_{j=0}^{p+1}(n+1+j) \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $j = i-1$ à la troisième égalité (et en utilisant l'hyothèse de récurrence à la deuxième égalité). Donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion :** On a donc P_n vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

3) Comme $k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k \\ &= S_2(n) - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \\ &\quad -3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(3(n+2)(n+3)-6(2n+1)-12) \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2+3n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \frac{S_p(n)}{(p+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)\cdots(k+p)}{(p+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+p)!}{(k-1)!(p+1)!} \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{p+1}} \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence sur n l'assertion Q_n : « $\frac{S_p(n)}{(p+1)!} = \boxed{\binom{p+n+1}{p+2}}$ ».

• **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a :

$$\frac{S_p(1)}{(p+1)!} = \frac{\prod_{i=0}^{p}(i+1)}{(p+1)!} = 1 = \binom{p+2}{p+2},$$

donc Q_1 est vraie.

• **Hérédité :** Supposons Q_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Alors $\sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{p+1} = \binom{p+n+1}{p+2}$, donc par la formule de Pascal on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}\binom{p+k}{p+1} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{p+k}{p+1} + \binom{p+n+1}{p+1} \\ &= \binom{p+n+1}{p+2} + \binom{p+n+1}{p+1} \\ &= \binom{p+(n+1)+1}{p+2} \end{aligned}$$

donc Q_{n+1} est vraie.

• **Conclusion :** On a bien par récurrence sur n que Q_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Ainsi : $S_p(n) = \boxed{(p+1)!\binom{p+n+1}{p+2}}$.

Ensembles et applications

CHAPITRE 2

Plan

2.1 Logique 29
2.2 Modes de raisonnement 32
2.3 Ensembles 38
2.4 Applications 42
Synthèse 48
Tests et exercices 49
Corrigés des exercices 53

Introduction

Ce chapitre introduit les notions fondamentales utilisées en Mathématiques : la notion (et le formalisme associé) d'assertion mathématique, les modes de raisonnement usuels, les ensembles (et opérations associées) et les applications.

Ces notions jouent un peu le rôle de la grammaire et du vocabulaire en français : ce sont les « briques élémentaires » à partir desquelles on construit « l'édifice des Mathématiques ».

Prérequis

Aucun.

Objectifs

- Savoir nier une assertion.
- Savoir manipuler les intersections, unions, complémentaires d'ensembles.
- Savoir démontrer qu'une application est injective, surjective, bijective.

2.1 Logique

2.1.1 Proposition

Définition – Assertion

Une **assertion** (ou bien **proposition**) en mathématiques est une phrase qui est soit vraie, soit fausse. Tout ce que l'on cherche à savoir c'est laquelle de ces deux possibilités est réalisée.

Quand on écrit une assertion mathématique, c'est que l'on affirme qu'elle est vraie.

Exemples

1. « Cette phrase est fausse » (la phrase fait référence à elle-même) n'est pas une assertion mathématique, car elle ne peut être ni vraie, ni fausse.
2. « L'entier 2 est plus grand que l'entier 1 » est une assertion mathématique vraie.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – (non (non P)) = P.

Définition – Négation

Soit P et Q deux assertions. On définit la **négation** de P, notée (non P), comme étant l'assertion qui est vraie si et seulement si P est fausse.

Exemple

La négation de P : « Pierre a eu 15 à son examen » est (non P) : « Pierre n'a pas eu 15 à son examen ».

Remarques

1. En mathématiques, le « et » a le même sens que dans le langage courant : « P et Q » est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.
2. Dans le langage courant, il y a deux « ou » :
 - le « ou » exclusif, illustré par exemple par « vous prendrez fromage ou dessert ? » au restaurant (on peut avoir l'un ou l'autre, mais pas les deux),
 - et le « ou » inclusif, que l'on retrouve dans « il vous faut réussir un concours de la banque Ecricome ou de la banque BCE » (vous avez le droit de réussir dans les deux banques d'épreuves).

 Le « ou » mathématique est le « ou » inclusif : « P ou Q » est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P et Q est vraie.
3. Le « et » se retrouve parfois de manière déguisée. Par exemple, l'assertion $a \leq b \leq c$ n'est rien d'autre que ($a \leq b$ et $b \leq c$).

Définition – L'implication

On définit l'assertion $P \Rightarrow Q$ comme étant l'assertion « (non P) ou Q ».

Remarques

1. Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P implique Q.
2. En pratique, on n'utilise jamais cette définition, mais plutôt ce qu'elle signifie, c'est-à-dire « **si** P est vraie, **alors** Q est vraie ».
3. Il faut penser qu'une implication est comme un théorème : P représente les hypothèses, Q la conclusion, et dire que l'implication est vraie, c'est dire que si les hypothèses sont vérifiées, alors la conclusion est vraie.

Écrire $P \Rightarrow Q$, c'est écrire « **si** P est vraie, alors Q est vraie », et donc ce n'est pas la même chose qu'écrire « P est vraie, donc Q est vraie ». En particulier, on n'a pas démontré que Q est vraie !
Il vaut mieux privilégier une rédaction avec des mots français du style « donc », plutôt qu'employer le symbole « $\Rightarrow$ » à tort !

Proposition – *Soit P et Q deux assertions, alors*

1. (non(P et Q)) = [(non P) ou (non Q)]
2. (non(P ou Q)) = [(non P) et (non Q)]
3. (non($P \Rightarrow Q$)) = [P et (non Q)].

Remarque – La négation d'un « ou » est un « et », et la négation d'un « et » est un « ou ».

En particulier, comme une implication est un « ou » déguisé, la négation d'une implication n'est pas une implication mais un « et ».

Exemples

1. non(« $x \geq 3$ et $x \leq 5$ »)=« $x < 3$ ou $x > 5$ ».
2. non(« Le premier tirage donne Pile ou le deuxième Face »)=« Le premier tirage n'a pas donné Pile et le deuxième tirage n'a pas donné Face ».

Définition – Équivalence

On définit l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ comme étant l'assertion « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ ».

Remarque – $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses. Le cas échéant, on dit que P et Q sont équivalentes.

Remarques

1. Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que
 - P est une condition suffisante de Q.
 - Q est une condition nécessaire de P.

 En particulier, si $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, alors P est une condition nécessaire et suffisante de Q.
2. $Q \Rightarrow P$ s'appelle la réciproque de $P \Rightarrow Q$, et l'une peut être vraie sans que l'autre le soit. Une erreur fréquente est de démontrer $Q \Rightarrow P$ en pensant que l'on démontre $P \Rightarrow Q$! Il faut bien faire attention à ce que l'on suppose.

Quand on écrit $P \Leftrightarrow Q$, il y a donc *a priori* **deux arguments** à vérifier, un pour chaque sens de l'implication. Il faut donc faire attention à ce que l'équivalence soit vraie avant de l'écrire !
Quand on écrit le symbole $\Leftrightarrow$ dans une démonstration, il faut aussi se demander si on a vraiment besoin de l'équivalence, ou bien si seulement une implication suffit.

2.1.2 Quantificateurs

Une assertion peut dépendre d'une ou de plusieurs variables. Il est important de préciser le rôle de la variable (est-ce une existence, est-ce qu'elle peut varier, si oui dans quoi ...), et cela se fait à l'aide des quantificateurs.

Définition – Quantificateur existentiel

Soit $R(x)$ une assertion dépendant d'une variable x. On écrit « $\exists x \,|\, R(x)$ » pour exprimer qu'il **existe au moins un** x rendant vraie l'assertion $R(x)$.

Remarques

1. Souvent une telle assertion est présentée sous la forme $\exists x \in E \,|\, R(x)$ pour dire qu'il existe au moins un élément x de l'ensemble E rendant vraie l'assertion $R(x)$.
2. Pour démontrer une assertion du type « $\exists x \,|\, R(x)$ », il suffit soit de donner un exemple explicite, soit de justifier qu'il en existe un. Cependant, prouver seulement l'existence d'un x vérifiant $R(x)$ est souvent beaucoup plus facile que de le déterminer.

 Par exemple, l'existence d'un réel x vérifiant $e^x - x^2 = 1$ est assuré par le théorème des valeurs intermédiaires. En donner une valeur exacte (et non pas approchée) paraît nettement plus difficile.
3. $\exists x \in E \,|\, R(x)$ assure seulement l'existence d'un x de E qui rend vraie $R(x)$, mais il peut y en avoir plusieurs. On note $\exists ! x \in E \,|\, R(x)$ pour dire qu'il existe un **unique** x dans E rendant $R(x)$ vraie.

Exemples

1. $(\exists x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0)$ est vraie (on prend $x = 1$ par exemple).
2. $(\exists x \in \mathbb{N} \,|\, x < 0)$ est fausse.

Définition – Quantificateur universel

Soit $R(x)$ une assertion dépendant d'une variable x. On écrit « $\forall x,\ R(x)$ » pour exprimer que **tous les** x rendent vraie l'assertion $R(x)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – Souvent une telle assertion est présentée sous la forme $\forall x \in E,\ R(x)$ pour dire que tout élément x de E rend vraie l'assertion $R(x)$.

Proposition – *Soit $R(x)$ une assertion dépendant d'une variable x, alors*

- $(\text{non } (\forall x \in E,\ R(x))) = \exists x \in E \,|\, (\text{non } R(x))$.
- $(\text{non } (\exists x \in E \,|\, R(x))) = \forall x \in E,\ (\text{non } R(x))$.

Remarque – Démontrer qu'une assertion « $\forall x \in E,\ R(x)$ » est fausse revient à démontrer que « $\exists x \in E \,|\, (\text{non } R(x))$ » est vraie, c'est-à-dire qu'il suffit de donner un **contre-exemple**.

Exemple

« $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$ » est fausse : sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0$ », qui est vraie car $x = 0$ convient ($x = 0$ est donc un contre-exemple).

Quand on introduit une nouvelle variable, il est indispensable de préciser à l'aide d'un quantificateur dans quel ensemble elle vit.

Exemple

« On a $f(x) = 0$ » ne veut rien dire si on ne sait pas qui est x. Cela peut vouloir dire :

- $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0$,
- $\exists x \in [0, 1] \,|\, f(x) = 0$,
- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 0$,
- $\forall x \in [-1, 2],\ f(x) = 0$...

Dès qu'on introduit une variable (x, k, ...), il faut préciser les conditions qui vont avec.

Il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs. Toute variable introduite par « $\exists$ » a le droit de dépendre de toutes les variables citées précédemment dans l'assertion.

Exemple

L'assertion « $\exists M \in \mathbb{R} \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$ » affirme que M est le même pour tout n.
Mais l'assertion « $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R} \,|\, u_n \leq M$ » est toujours vraie, car le M proposé a le droit de dépendre de n, et donc on peut tout à fait choisir $M = u_n$.

2.2 Modes de raisonnement

2.2.1 Raisonnement « direct » (*Modus ponens*)

• C'est le plus courant, que l'on a déjà vu. Il permet d'appliquer les théorèmes :

Proposition – *Si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie.*

Exemple

On sait que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or, la dérivée de la fonction exponentielle exp est elle-même, donc strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc exp est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Il ne faut pas écrire des suites d'implications du style $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$, car cela n'a pas de sens : on peut l'interpréter comme

- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$, ou bien
- $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ ou bien
- $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$,

et ces trois interprétations ne sont pas équivalentes !

• On peut « enchaîner » des implications (c'est-à-dire des théorèmes), mais attention à la rédaction :

Proposition – *Si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si $Q \Rightarrow R$ est vraie alors $P \Rightarrow R$ est vraie.*

2.2.2 Raisonnement par contraposition (*Modus tollens*)

Proposition – *L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est équivalente à l'assertion (dite contraposée) « (non Q) $\Rightarrow$ (non P) ».*

Méthode 1 Contraposition

On peut démontrer une affirmation du type « si P est vraie, alors Q est vraie » en démontrant sa contraposée, c'est-à-dire « si Q est fausse, alors P est fausse ».

On fera attention que « si P est fausse, alors Q est fausse » n'est pas la contraposée, mais la réciproque, de « si P est vraie, alors Q est vraie ».

Exemple d'application

Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrons que si n^2 est pair, alors n est pair par contraposition : si n est impair, alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$, et donc $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$ est impair, ce qui conclut.

2.3 Raisonnement par l'absurde

C'est une conséquence des raisonnements précédents : si on désire démontrer qu'une assertion P est vraie, et que l'on démontre « (non P) $\Rightarrow$ F » avec F une assertion qui est clairement fausse (par exemple si F est « $0 = 1$ »), alors par contraposition, on a « (non F) $\Rightarrow$ P » qui est vraie, avec (non F) vraie, donc P est bien vraie.

Méthode 2 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une assertion P, on suppose que sa négation est vraie, et on en déduit une contradiction (c'est-à-dire une assertion fausse). On peut alors affirmer la véracité de P.

Remarque – Si en voulant faire un raisonnement par l'absurde, on démontre « (non P) $\Rightarrow$ P », alors on a bien démontré que P est vraie. En effet, par définition de l'implication, « (non P) $\Rightarrow$ P » est l'assertion « (non(non P)) ou P », c'est-à-dire « P ou P », donc P.

Exemple d'application

Démontrons que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Solution

Supposons donc qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n+2) = \ell$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n+2) - \cos(n) = 0$.

Les formules trigonométriques donnent $\cos(n+2) - \cos(n) = -2\sin(n+1)\sin(1)$. Comme $\sin(1) \neq 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1) = 0$. Et donc, par changement d'indice, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+2) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n) = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+2) - \sin(n) = 0$.

Les formules trigonométriques donnent $\sin(n+2) - \sin(n) = 2\cos(n+1)\sin(1)$, donc $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+2) - \sin(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\cos(n+1)\sin(1) = 2\ell\sin(1)$. Comme $\sin(1) \neq 0$, on a donc $\ell = 0$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n) = 0$, ce qui donne alors la contradiction désirée : $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos^2(n) + \sin^2(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$. Donc la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite réelle (on ferait de même pour la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$).

2.2.4 Raisonnement par disjonction des cas

Proposition –
Si $P_1 \Rightarrow Q$ et $P_2 \Rightarrow Q$ sont vraies, alors (P_1 ou P_2) $\Rightarrow Q$ est vraie.

Corollaire – Si $(P \Rightarrow Q)$ et $((\text{non } P) \Rightarrow Q)$ sont vraies, alors Q est vraie.

Remarque – Cela revient à distinguer deux cas : P est vraie ou (non P) est vraie. Cela se généralise bien sûr à plusieurs cas, et même à une infinité de cas.

Exemples

1. Soit a, b, c trois réels. Notons $\max(a,b)$ le maximum entre les deux réels a et b. Montrons que si $a < c$ et $b < c$ alors $\max(a,b) < c$ à l'aide d'un raisonnement par disjonction des cas :

 Si $\max(a,b) = a$, alors on a bien $\max(a,b) = a < c$, et si $\max(a,b) = b$, alors on a bien $\max(a,b) = b < c$. Comme seuls ces deux cas sont possibles, on a bien toujours que si $a < c$ et $b < c$, alors $\max(a,b) < c$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite majorée par M et minorée par m, démontrons que pour tout réel a, la suite $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi majorée et minorée.

 On sait donc que pour tout entier n, $m \leq u_n \leq M$. On veut multiplier par a ... il nous faut savoir le signe de a.

 - Si $a \geq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $am \leq au_n \leq aM$, donc $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par aM et minorée par am.
 - Si $a \leq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $am \geq au_n \geq aM$, donc $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par am et minorée par aM.

 Dans les deux cas, on a bien la conclusion voulue.

2.2.5 Raisonnement par récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ (le plus souvent $n_0 = 0$ ou 1). Pour tout entier $n \geq n_0$, on a une assertion P_n, et on désire démontrer que toutes ces assertions sont vraies.

Méthode 3 Récurrence simple

Démontrer

- l'**initialisation**, c'est-à-dire que P_{n_0} est vraie,
- et l'**hérédité**, c'est-à-dire que **si** pour $n \geq n_0$, n quelconque, savoir que P_n est vraie (ce que l'on appelle « hypothèse de récurrence ») permet d'en déduire que P_{n+1} est vraie,

est un moyen de justifier que pour tout entier $n \geq n_0$, P_n est vraie.



Lors de l'hérédité, on ne démontre pas que P_{n+1} est vraie, mais que **si P_n est vraie**, alors P_{n+1} est vraie, ce qui est très différent.
La proposition P_n ne contient jamais « $\forall n$ », puisqu'elle dépend de n.

On peut se représenter par une image le principe de récurrence : imaginons une infinité de dominos, alignés, et l'on sait que :

- le premier domino tombe,
- les dominos sont espacés de telle sorte que si le numéro n tombe, alors le numéro $n + 1$ aussi.

Alors tous les dominos tombent !

Remarques

1. L'initialisation est une étape **indispensable** : il faut amorcer la récurrence (faire tomber le premier domino). Il y a des propositions qui vérifient l'hérédité, mais ne sont jamais initialisées (donc sont toujours fausses). Par exemple, P_n =« 9 divise l'entier $10^n + 1$ »et Q_n =« 9 divise l'entier $10^n - 1$ » sont toutes les deux héréditaires, mais P_n est toujours fausse, alors que Q_n est toujours vraie.
2. Pour pouvoir faire une récurrence, il faut savoir à l'avance ce que l'on cherche à démontrer. Si on ne le sait pas, il faut « conjecturer » P_n à partir de P_{n_0}, P_{n_0+1}, P_{n_0+2} ...
3. Il est fortement conseillé de ne faire une récurrence qu'une fois avoir clairement défini et écrit ce qu'est l'assertion P_n.
4. Si lors de l'hérédité, on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est que la bonne démarche est une preuve directe et non une récurrence.

Exemple d'application

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$. Démontrons par récurrence sur l'entier n l'assertion P_n :« u_n existe et $u_n > 0$ ».

Solution

Initialisation : u_0 existe par définition, et $u_0 = 1 > 0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 0$, P_n est vraie. Alors u_n existe et $u_n > 0$. Donc $1 + u_n > 1$, en particulier, $1 + u_n$ est dans l'ensemble de définition de la fonction ln (à savoir $\mathbb{R}_+^*$), donc $\ln(1 + u_n)$ (c'est-à-dire u_{n+1}) existe bien. De plus, comme ln est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$, de $1 + u_n > 1$, on déduit que $\ln(1 + u_n) > \ln(1) = 0$. Donc $u_{n+1} > 0$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie, et pour tout entier n, si P_n est vraie, P_{n+1} aussi, donc par récurrence, on a bien que pour tout entier n, P_n est vraie.

Remarque – Parfois, il faut faire une **récurrence descendante** au lieu de la récurrence classique. Cela se voit lors de l'initialisation : si l'on veut démontrer que les assertions P_n sont vraies pour $0 \leq n \leq r$ et que l'on sait P_r vraie, alors l'initialisation se fera en disant que P_r est vraie, et l'hérédité en démontrant que si l'on suppose P_n vraie pour un entier $1 \leq n \leq r$, alors P_{n-1} est vraie. On pourra alors conclure, par récurrence descendante, que les assertions P_n sont vraies pour $0 \leq n \leq r$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Méthode 4 Récurrence double

Démontrer

- l'**initialisation**, c'est-à-dire que P_{n_0} et P_{n_0+1} sont vraies,
- et l'**hérédité**, c'est-à-dire que **si** pour $n \geq n_0$ quelconque, savoir que P_n et P_{n+1} sont vraies (ce que l'on appelle « hypothèse de récurrence ») permet d'en déduire que P_{n+2} est vraie,

est un moyen de justifier que pour tout entier $n \geq n_0$, P_n est vraie.

Remarques

1. C'est le type de récurrence à utiliser quand par exemple le terme général d'une suite est défini en fonction des deux précédents.
2. On définirait de même une récurrence triple, quadruple ...

Exemple d'application

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$.

Démontrons l'assertion P_n :« $u_n \geq 0$ » par récurrence double sur l'entier n :

Solution

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ sont des nombres positifs, donc P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 0$, P_n et P_{n+1} sont vraies. Alors $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \geq 0$. Donc, par multiplication puis addition de nombres positifs, $5u_{n+1} + 3u_n \geq 0$, donc $u_{n+2} \geq 0$, et P_{n+2} est vraie.

Conclusion : P_0 et P_1 sont vraies, et pour tout entier n, si P_n et P_{n+1} sont vraies, alors P_{n+2} aussi. Donc par récurrence double, on a bien P_n vraie pour tout entier n.

Méthode 5 Récurrence forte

Démontrer

- l'**initialisation**, c'est-à-dire que P_{n_0} est vraie,
- et l'**hérédité**, c'est-à-dire que **si** pour $n \geq n_0$ quelconque, savoir que $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \ldots, P_n$ sont vraies (ce que l'on appelle « hypothèse de récurrence ») permet d'en déduire que P_{n+1} est vraie,

est un moyen de justifier que pour tout entier $n \geq n_0$, P_n est vraie.

Remarque – C'est le type de récurrence à utiliser quand par exemple le terme général d'une suite est défini en fonction de tous les termes précédents.

Exemple d'application

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$.

Démontrons alors l'assertion P_n :« $u_n = 2^{n-1}$ » par récurrence forte sur n, pour $n \geq 1$.

Solution

Initialisation : $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait P_k vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Alors pour $1 \leq k \leq n$, on a $u_k = 2^{k-1}$. Donc

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \underset{j=k-1}{=} 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j$$

On reconnaît la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 (raison différente de 1), donc $\sum_{j=0}^{n-1} 2^j = \frac{2^{n-1+1} - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$, et donc $u_{n+1} = 1 + 2^n - 1 = 2^n = 2^{n+1-1}$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie, et si pour un entier n, on a $P_1, \ldots, P_n$ vraies, alors P_{n+1} est vraie aussi. Donc, par récurrence forte sur n, on a bien que P_n est vraie pour $n \geq 1$.

Par contre, P_0 est faux, c'est pour cela que l'on a initialisé à $n = 1$.

2.2.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode 6 Analyse-Synthèse

Pour prouver un énoncé d'existence et unicité d'un objet mathématique, on peut procéder en deux étapes :

1. Supposer l'existence de l'objet voulu, et en déduire qu'une seule expression peut alors convenir (c'est l'analyse),
2. Reprendre alors l'expression trouvée et démontrer qu'elle convient (c'est la synthèse).

Exemple d'application

Démontrons qu'il existe un unique couple de fonctions (f, g) définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant : f est paire, g est impaire et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = f(x) + g(x)$, à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse.

Solution

Analyse : Supposons que f et g existent. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x} = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$ (car f est paire et g impaire). D'où le système, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} e^x = f(x) + g(x) \\ e^{-x} = f(x) - g(x) \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{cases}.$$ Ceci démontre que si f et g existent, elles sont uniques.

Synthèse : Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{cases}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = e^x$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Puis, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = f(x)$, donc f est paire.

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -g(x)$, donc g est impaire.

Donc f et g ainsi définies vérifient bien les propriétés voulues.

2.3 Ensembles

2.3.1 Appartenance

Dans ce cours, on travaille avec une notion intuitive d'ensemble, d'éléments et d'appartenance. On note $x \in E$ pour dire que l'élément x appartient à l'ensemble E.

Définition – Description d'un ensemble

Un **ensemble** est caractérisé par ses éléments. On a alors deux façons de décrire un ensemble E :

- soit en listant tous ses éléments, entre accolades,
- soit en donnant une propriété $P(x)$ qui caractérise les éléments de l'ensemble. On note alors $E = \{x \mid P(x)\}$ (qui se lit « E est l'ensemble des éléments x tels que $P(x)$ est vraie »).

Deux ensembles sont égaux s'ils ont mêmes éléments.

Exemples

1. On note $\emptyset$ l'ensemble vide, c'est le seul ensemble qui n'a aucun élément.
2. Les ensembles usuels sont les ensembles de nombres $\mathbb{N}$ (les entiers naturels), $\mathbb{Z}$ (les entiers relatifs), $\mathbb{Q}$ (les rationnels, quotient de deux entiers relatifs), $\mathbb{R}$ (les réels) et $\mathbb{C}$ (les complexes).
3. $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$ et $\mathbb{R}_- = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq 0\}$.
4. $\mathbb{Z}^* = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } x \neq 0\}$, $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 0\}$.
5. Les deux définitions suivantes de E sont équivalentes : $E = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 = 1\}$ et $E = \{-1, 1\}$; E est alors l'ensemble formé des deux éléments réels -1 et 1.
6. Quand on définit un ensemble à partir de la liste de ses éléments, l'ordre d'apparition des éléments n'a aucune importance. Ainsi $\{0, 2, 7\}$ et $\{7, 0, 2\}$ désignent le même ensemble.

Remarque – On note souvent $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\}$ au lieu de $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } P(x)\}$. Ainsi, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Définition – Inclusion

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est une partie (ou un sous-ensemble) de E, ou que F est inclus dans E, et on note $F \subset E$, si tout élément de F est également élément de E. Dans le cas contraire, on note $F \not\subset E$.

Exemple

$F = \{0, 2, 7\}$ est inclus dans $E = \{7, 2, 5, -1, -4, 0\}$.

Remarques

1. Si $F = \{x \,|\, P(x)\}$ et $G = \{x \,|\, Q(x)\}$, alors « $F \subset G$ » est la même affirmation que « $\forall x,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ »
2. Souvent, F et G sont définis comme des sous-ensembles d'un autre ensemble E, par $F = \{x \in E \,|\, P(x)\}$ et $G = \{x \in E \,|\, Q(x)\}$; alors « $F \subset G$ » est la même affirmation que « $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ ».
3. De manière générale, « $F \subset G$ » est la proposition « $\forall x$, si $x \in F$ alors $x \in G$ », que l'on peut encore noter « $\forall x,\ x \in F \Rightarrow x \in G$ ». C'est en pratique ce qu'il faudra faire pour démontrer $F \subset G$.

Exemple

Soit $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 2\}$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 5\}$. Pour démontrer $F \subset E$, on doit démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, si $1 \leq x \leq 2$, alors $x^2 \leq 5$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et que si x vérifie $1 \leq x \leq 2$, alors x est dans $\mathbb{R}_+$ (1 et 2 aussi, bien sûr !), on a $1^2 \leq x^2 \leq 2^2$, donc $1 \leq x^2 \leq 4$, en particulier $x^2 \leq 5$. Donc on a bien $F \subset E$.



Une égalité d'ensemble est donc une double inclusion, donc repose *a priori* sur deux raisonnements distincts. Parfois on peut raisonner par équivalence et traiter les deux en une seule rédaction. On fera attention à toujours vérifier que l'on a démontré **les deux** inclusions.

Proposition – *Deux ensembles E et F sont égaux (noté $E = F$) si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Remarque – En pratique, on démontrera très souvent une égalité de deux ensembles par cette double inclusion.

Définition – $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Remarques

1. Ainsi $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.
2. Plus généralement $F \subset E$ se réécrit $F \in \mathcal{P}(E)$. On prendra garde à ne pas confondre les notions d'appartenance et d'inclusion.

$$\underbrace{A}_{\text{ensemble}} \subset \underbrace{E}_{\text{ensemble}} \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E) \quad \text{et}$$

$$\underbrace{x}_{\text{élément}} \in \underbrace{E}_{\text{ensemble}} \Leftrightarrow \underbrace{\{x\}}_{\text{ensemble}} \subset \underbrace{E}_{\text{ensemble}} \Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(E)$$

Exemple

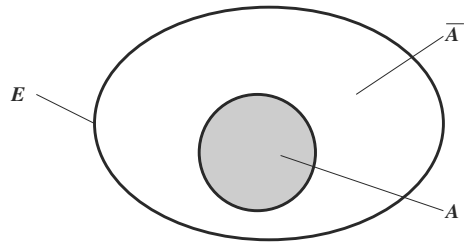
Soit $E = \{2, 3\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, E\}$.

2.3.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition – Complémentaire

Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle **complémentaire** de A dans E et on note $\overline{A}$, ou $E \backslash A$, ou encore $C_E A$, l'ensemble $\overline{A} = \{x \in E | x \notin A\}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



Proposition – *Si* $A = \{x \in E \mid P(x)\}$, *alors* $\overline{A} = \{x \in E \mid (\text{non } P(x))\}$.

Remarques

1. Si A est une partie à la fois de E et de F, ses complémentaires respectivement dans E et F ne sont pas *a priori* égaux.
2. Cette définition se généralise à deux ensembles quelconques par : $B - A$, qui se lit B moins A (ou $B \backslash A$ qui se lit B privé de A), qui est l'ensemble $\{x \in B | x \notin A\}$.

Exemple

Si $A = [-1, 1]$ et $B = [0, 2]$, alors $B - A =]1, 2]$.

Proposition – *Soit E un ensemble, les règles élémentaires sur les complémentaires dans E sont :*

- $\overline{\emptyset} = E$ *et* $\overline{E} = \emptyset$,
- *pour toute partie A de E,* $\overline{\overline{A}} = A$,
- *pour toutes parties A et B de E,* $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Définition – Intersection/Union

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

1. On appelle **intersection** de A et B l'ensemble $A \cap B = \{ x \in E \mid (x \in A) \text{ et } (x \in B) \}$.
2. On appelle **réunion** de A et B l'ensemble $A \cup B = \{ x \in E \mid (x \in A) \text{ ou } (x \in B) \}$.

A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.
Plus généralement, si I est un ensemble d'indices, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, nous pouvons définir :

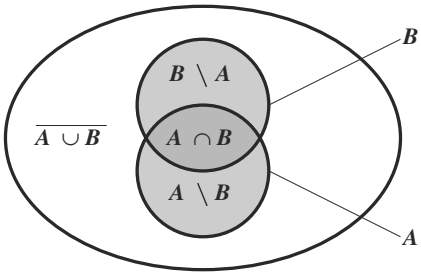
1. la **réunion** des $(A_i)_{i \in I}$: $\bigcup_{i \in I} A_i = \left\{ x \in E \middle| \exists i \in I \text{ tel que } x \in A_i \right\}$
2. l'**intersection** des $(A_i)_{i \in I}$: $\bigcap_{i \in I} A_i = \left\{ x \in E \middle| \forall i \in I, x \in A_i \right\}$

En particulier, pour des ensembles définis par des propriétés caractérisant les éléments, **l'union se traduit par un « ou », et l'intersection par un « et »** :

Proposition – *Si* $F = \{x \in E \mid P(x)\}$, $G = \{x \in E \mid Q(x)\}$, *alors*

$$F \cup G = \{x \in E \mid P(x) \text{ ou } Q(x)\} \quad , \quad F \cap G = \{x \in E \mid P(x) \text{ et } Q(x)\}$$

Remarque – Lorsque $I = \mathbb{N}$, on note souvent $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_i$ pour $\bigcup_{i \in I} A_i$. Cela s'adapte aussi pour $I = \mathbb{N}^*$...



Exemples

1. Soit A une partie de E, alors $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = E$.
2. $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\} = \mathbb{N}$.
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [n, n+1[= [1, +\infty[$.
4. $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right] =]0, 1]$: démontrons le par double inclusion.

 ⋆ Démontrons $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right] \subset]0, 1]$: soit $x \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$, alors il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$, donc $0 < \frac{1}{i+1} \leq x \leq \frac{1}{i} \leq 1$, donc $x \in]0, 1]$.

 ⋆ Démontrons $]0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$: soit $x \in]0, 1]$, et posons $u_i = \frac{1}{i}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. Alors $x \leq u_1 = 1$, et $\lim_{i \to +\infty} u_i = 0$, $x > 0$, donc il existe j tel que $u_j < x$. Comme $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, il existera i tel que $u_{i+1} < x \leq u_i$, soit $x \in [u_{i+1}, u_i] = \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$. En particulier, $x \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$.
5. $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{i}\right] = [0, 1]$: démontrons le par double inclusion.

 ⋆ $[0, 1] \subset \bigcap_{i=1}^{+\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{i}\right]$ car $[0, 1] \subset \left[0, 1 + \frac{1}{i}\right]$ pour tout entier $i \geq 1$.

 ⋆ Démontrons $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{i}\right] \subset [0, 1]$: soit $x \in \bigcap_{i=1}^{+\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{i}\right]$, alors pour tout entier $i \geq 1$, on a $0 \leq x \leq 1 + \frac{1}{i}$, et donc si on fait tendre i vers $+\infty$, $0 \leq x \leq \lim_{i \to +\infty} 1 + \frac{1}{i} = 1$, donc $x \in [0, 1]$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarques

1. L'ordre d'apparition des parties n'a pas d'importance : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
2. Pour tous A et B, $(A \cap B) \subset A$ et $A \subset (A \cup B)$.
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$.
4. Si C est également une partie de E, on a : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B$. On note plus simplement : $A \cap B \cap C$. De même pour la réunion.

Remarque – Il n'y a pas de règle de priorité entre $\cup$ et $\cap$: dans une expression faisant intervenir ces deux symboles, les parenthèses sont indispensables pour savoir quel ordre on adopte.

Proposition – *Pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E, on a :*

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(lois de Morgan),*
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion),*
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection).*

Exemple

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E avec $B \subset A$. Alors $(A \cup \overline{A}) \cap B = E \cap B = B$ et $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup \emptyset = A$, donc il n'y a pas égalité dès que $A \neq B$.

2.3.3 Produit cartésien

Définition – Produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.
Lorsque $E = F$, note $E^2 = E \times E$.

Remarques

1. L'**ordre** compte dans un couple : les couples (x, y) et (y, x) sont distincts, sauf si $x = y$. Ainsi, il ne faudra pas confondre les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ (sauf si $E = F$).
2. La définition se généralise aux n-uplets : $E_1, \ldots, E_n$ étant n ensembles, on note $E_1 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in E_i$.

2.4 Applications

2.4.1 Définition

Définition – Application

On définit une **application** (souvent appelée fonction) f en donnant un ensemble E dit de départ, un ensemble F dit d'arrivée et, pour tout x élément de E, un unique élément de F noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f. x est alors appelé un **antécédent** par f de $f(x)$.
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarques

1. Plus formellement, une application est un triplet (E, F, Γ) où E et F sont deux ensembles et où Γ est une partie de $E \times F$ (appelée graphe de f) telle que, pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $y \in F$ vérifiant $(x, y) \in \Gamma$. Cet unique y est alors noté $f(x)$.
2. Pour indiquer que f est une application de E dans F, on écrit : $f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ ou $f : x \in E \mapsto f(x) \in F$ ou encore $E \xrightarrow{f} F$.
3. Soit f une application de E dans F. Tout élément de E a une unique image ; en revanche un élément de F peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents par f.
4. La courbe Γ est le graphe d'une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en **au plus un** point.

Remarque – Ceci introduit une troisième façon de définir un ensemble.

Définition – Image d'une partie par une application

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E. On définit $f(A)$ comme étant l'ensemble des valeurs prises par $f(a)$ lorsque a parcourt A. On a donc

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists a \in A \text{ avec } y = f(a)\}.$$

Plus souvent, on note tout simplement $f(A) = \{f(a),\ a \in A\}$.

Exemple

On peut définir l'ensemble des entiers impairs par $\{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$ (c'est, par exemple, l'image de $\mathbb{N}$ par l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$).

Définition – L'application identité

Soit E un ensemble, on définit l'application identité Id_E de E par $\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$. C'est une application qui jouera un rôle central dans les cours à venir.

Définition – Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice** (ou caractéristique) de A, l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Proposition – *Soit A, B deux parties d'un ensemble E, alors $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$.*

Il ne faut pas confondre une application f avec (lorsque cela existe) la formule donnant $f(x)$ en fonction de x

Remarque – Il y a beaucoup plus d'applications d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ que de formules que l'on peut construire à partir des fonctions usuelles. Il ne faut donc pas croire qu'une application est nécessairement donnée par une formule.

Exemple

$f(x) = \sqrt{\ln(x)}$ n'est pas une application, mais une formule ! On peut considérer alors l'application

$$f : \begin{cases}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\ln(x)} \end{cases},$$

mais on pourrait aussi considérer

$$\begin{cases}]1, +\infty[\to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\ln(x)} \end{cases}, \text{ ou bien } \begin{cases} [2, +\infty[\to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\ln(x)} \end{cases} \ldots$$

Exemple

Les mathématiciens rêveraient de connaître une formule pour l'application qui à l'entier n de $\mathbb{N}^*$ associe le n-ième nombre premier, mais cela n'existe pas ...

2.4.2 Opérations sur les applications

Définition – Restriction/Prolongement

Soient E_1, E_2, F des ensembles tels que $E_1 \subset E_2$, $g : E_1 \to F$ et $f : E_2 \to F$ deux applications. On suppose que, pour tout $x \in E_1$, $f(x) = g(x)$. On dit alors que g est la **restriction** de f à E_1, que l'on note $g = f_{|E_1}$, et f un **prolongement** de g à E_2.

Exemple

Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. Alors un prolongement $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de g est une application qui vérifie $\forall x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, et $f(0)$ est un réel quelconque. Si l'on veut en plus que f soit continue en 0, il faudra imposer que $f(0) = 1$...

Définition – Composée de deux applications

Soient E, F, G des ensembles, F_1 une partie de F, $f : E \to F$ et $g : F_1 \to G$ des applications. Si f ne prend que des valeurs dans F_1, c'est-à-dire $\forall x \in E$, $f(x) \in F_1$, on définit la **composée** de f et de g (ou de f par g), notée $g \circ f$, comme étant l'application $g \circ f : \begin{cases} E \to G \\ x \mapsto g[f(x)] \end{cases}$

Pour que $g \circ f$ soit définie, il est indispensable de bien vérifier que les valeurs que peut prendre f sont dans l'ensemble de départ de g !

Exemple

Si $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$, comme $f(x) > 0$ pour tout réel x, on peut définir $g \circ f$, et on a $g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\exp(x)} \end{cases}$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2 - 8$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Alors $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ vérifie $f \circ g(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 - 8$ pour tout réel x différent de 1.

$g \circ f$ n'est pas définie, mais en revanche $g \circ f_{|\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}}$ l'est. En effet,

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 8 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } -3 \end{aligned}$$

Donc $f(x)$ est dans l'ensemble de définition de g si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Et alors, $g \circ f_{|\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}}(x) = \dfrac{x^2 - 8 + 1}{x^2 - 8 - 1}$, donc $g \circ f_{|\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2 - 7}{x^2 - 9} \end{cases}$

Proposition – *Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors* $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ *et* $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Autrement dit, l'identité joue un rôle similaire pour la composition à celui du nombre 1 pour la multiplication (pour les nombres réels).

Proposition – *La composition est associative : soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ des applications, alors*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

(que l'on note alors plus simplement $h \circ g \circ f$).

Les opérations sur les sous-ensembles de E peuvent se traduire de manière simple en opérations sur les fonctions indicatrices :

Proposition – *Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E, alors :*

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B.$$

où 1 *désigne l'application qui à x dans E associe* 1*, c'est-à-dire $\mathbb{1}_E$.*

2.4.3 Injectivité. Surjectivité. Bijectivité

Définition – Application injective

On dit qu'une application $f : E \to F$ est **injective** si tout $y \in F$ a au plus un antécédent par f dans E, autrement dit si :

$$\text{pour tout } y \in F, \text{ l'équation } y = f(x) \text{ a au plus une solution } x \in E,$$

ce qui revient à

$$\text{pour tout } (x_1, x_2) \in E^2, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2),$$

ou en contraposant :

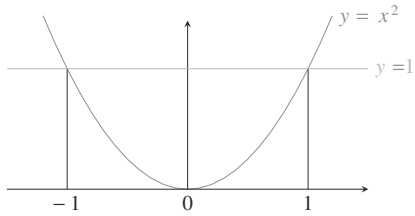
$$\text{pour tout } (x_1, x_2) \in E^2, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Remarque – Soit Γ le graphe d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est injective si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe Γ en **au plus** un point.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ n'est pas injective, car $f(1) = f(-1)$ mais $1 \neq -1$.



2. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ est injective.
3. $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}_-$ est injective.
4. Une application constante définie sur un intervalle (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ n'est pas injective.

Définition – Application surjective

On dit qu'une application $f : E \to F$ est **surjective** si tout $y \in F$ a au moins un antécédent par f dans E, autrement dit si :

pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

En terme d'équation, cela revient à :

pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution $x \in E$.

Remarque – Soit Γ le graphe d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est surjective si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe Γ en **au moins** un point.

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ n'est pas surjective, car $f(x) = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ est surjective (si y est positif, on a $y = f(\sqrt{y})$).

Aucune des définitions précédentes (injective ou surjective) ne débute par « toute image possède », ni par « tout $f(x)$ possède ». Un bon début de rédaction peut être « Soit $y \in F$, résolvons l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ ».

Remarque – Les exemples cités pour les applications qui sont/ne sont pas injectives/surjectives sont tous construits à partir de la même formule, mais en changeant l'ensemble de départ et/ou celui d'arrivée. Si on change l'ensemble de départ ou d'arrivée, on change d'application, d'où l'importance de bien les préciser.

Définition – Application bijective

On dit qu'une application $f : E \to F$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit si pour tout $y \in F$, y admet un et un seul antécédent par f :

pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

En terme d'équation, cela revient à :

pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a exactement une et une seule solution $x \in E$.

Définition – Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \to F$ une application bijective. On appelle **application réciproque** de f, et on note f^{-1}, l'application de F dans E qui à $y \in F$ associe l'unique antécédent par f de y par f, c'est-à-dire l'unique solution $x \in E$ de l'équation $y = f(x)$.

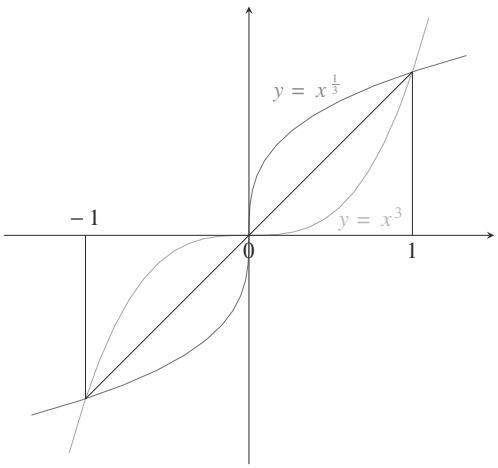
Ainsi, pour $x \in E$ et $y \in F$, on a $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Remarque – Pour les applications définies et continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, le « théorème de la bijection » (cf. chapitre 15) s'avère très utile pour déterminer le caractère injectif/surjectif d'une telle application.

Remarque – Le moyen le plus simple de justifier que les exemples 2, 3, 5 et 6 ci-contre sont bien des bijections est d'appliquer le « théorème de la bijection » (cf. chapitre 15).

Exemples

1. Soit E un ensemble, alors l'application identité de E, Id_E, est bijective, et son application réciproque est elle-même.
2. $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$.
3. $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$.
4. $\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ est une bijection, de bijection réciproque elle-même.
5. Si n est un entier naturel impair, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ est une bijection, et si on note f_n^{-1} sa bijection réciproque (définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), on définit $x^{\frac{1}{n}} = f_n^{-1}(x)$ (qui coïncide avec la définition donnée au chapitre 1 lorsque $x > 0$). $x^{\frac{1}{n}}$ est donc l'unique solution réelle de l'équation $t^n = x$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
 Cela mérite d'être signalé, car il est rare que l'on puisse définir une puissance non entière d'un nombre négatif.



6. Si n est un entier naturel pair non nul, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ est une bijection, sa bijection réciproque $f_n^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est donnée par $f_n^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ si $x > 0$ (c'est-à-dire que $x^{\frac{1}{n}}$ est l'unique solution réelle **positive** de l'équation $t^n = x$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$) et $f_n^{-1}(0) = 0$ (ce que l'on notera encore $0^{\frac{1}{n}} = 0$). Le cas $n = 2$ est l'exemple 2, et redonne l'égalité $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ si $x \geq 0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème – Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$

Le cas échéant, l'application g est unique, c'est $g = f^{-1}$.
En particulier f^{-1} est elle-même bijective, d'application réciproque $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque – Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ alors f et g ne sont pas forcément bijectives.
Par exemple, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ vérifient $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$, mais f n'est pas surjective, et g n'est pas injective.

Corollaire – Soient $f : E \to F, g : F \to G$ des applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et son application réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration
On a $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$ et $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. Donc $g \circ f$ est bijective de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

Remarque – Soit f une bijection. On appelle alors souvent « bijection réciproque de f » l'application réciproque de f, puisqu'elle est aussi bijective.

Synthèse

Savoirs

- La définition de la bijection réciproque
- Le théorème caractérisant une bijection à l'aide de son application réciproque et d'applications identités.

Savoir-faire

- Traduire un « et » en une intersection et un « ou » en une union (très utile en probabilité)
- Démontrer une équivalence par double implication
- Nier une assertion, notamment une implication
- Contraposition
- Démontrer une égalité d'ensembles par double inclusion

Mots-clés

- L'application identité d'un ensemble
- Antécédent
- Restriction/prolongement
- Composée
- Injection, Surjection, Bijection et bijection réciproque

Tests de connaissances

2.1 Donner la négation de

1) $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, P(x)$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)$

2.2 La rédaction suivante est-elle correcte ?

$$<< x \geq 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 1 \Rightarrow 1 + \exp(x) \geq 2 >>$$

2.3 Est-il possible de démontrer par récurrence les assertions P_x : « $e^x \geq x$ », pour tout $x \in \mathbb{R}_+$?

2.4 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $\max(x, y)$ le plus grand des deux nombres x et y et $\min(x, y)$ le plus petit.

Montrer que $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$.

2.5 Soit E et F deux ensembles. Caractériser l'assertion

1) E est inclus dans F.

2) E est égal à F.

2.6 Que vaut $[0, 2] \cup]1, 3]$? $[0, 2] \cap]1, 3]$?

2.7 Citer les lois de Morgan. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de parties d'un ensemble E, que vaut $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$? et $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$?

2.8 Est-ce que $f(x) = x^2 \exp(x)$ ou $x \mapsto x^2 \exp(x)$ sont des applications ?

2.9 Donner la définition de l'application identité d'un ensemble E.

2.10 Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x+1} \end{cases} \quad \text{et } g : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x) \end{cases}$$

Peux-t-on écrire $f \circ g$? $g \circ f$? Si oui, décrire ces applications.

2.11 Soit $f : E \to F$ une application. Donner la définition de « f injective », puis « f surjective », puis « f bijective », puis leurs négations.

2.12 Soit $f : E \to F$ une application bijective. Donner la définition de l'application réciproque de f.

2.13 **Vrai ou faux ?**

1) La négation de « tous les élèves de la classe ont leur permis de conduire » est « personne dans la classe n'a son permis de conduire ».

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$.

3) 4 appartient à $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2x \leq 9 \text{ et } x \geq -1\}$.

4) Si $E = \{a, b, c\}$, alors $\{a\} \in E$.

5) $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$.

6) $(a, b, c) = (b, c, a)$.

7) Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ du sous-ensemble $[1, +\infty[$ est le sous-ensemble $]-\infty, 1[$.

8) Soit $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice du sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 5\}$. Alors $\mathbb{1}_A(\pi) = 0$.

9) Une application non nulle est une application qui ne s'annule pas.

10) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, alors f a un unique prolongement comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

11) $f : \mathbb{R}_+^* \to [1, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective.

12) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, alors f est bijective.

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 52.

■ **Assertions**

2.14

Compléter chaque phrase avec « il faut », « il suffit » ou « il faut et il suffit ».

1) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m^2 = n$, il ... que n soit positif ou nul.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $t^2 = x$, il ... que x soit positif ou nul.

3) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels vérifiant l'inégalité $|u_n| \leq n^{-2}$ pour tout $n \geq 1$. Pour que $u_n \leq 10^{-2}$, il ... que $n \geq 10$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Pour que f soit strictement croissante, il ... que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

2.15 ◎

On considère l'assertion : (0) Si les hirondelles se rassemblent, alors elles commencent leur migration.

Parmi les assertions suivantes, précisez lesquelles sont équivalentes à (0), lesquelles sont sa réciproque, sa négation ... :

1) Si les hirondelles ne commencent pas leur migration, alors elles ne se rassemblent pas.

2) Il suffit que les hirondelles se rassemblent pour qu'elles commencent leur migration.

3) Les hirondelles commencent leur migration si elles se rassemblent.

4) Les hirondelles se rassemblent et elles ne commencent pas leur migration.

5) Il suffit que les hirondelles commencent leur migration pour qu'elles se rassemblent.

6) Il est nécessaire que les hirondelles se rassemblent pour qu'elles commencent leur migration.

7) Si les hirondelles ne se rassemblent pas, alors elles ne commencent pas leur migration.

8) Les hirondelles ne se rassemblent pas ou elles commencent leur migration.

9) Il faut que les hirondelles se rassemblent pour qu'elles commencent leur migration.

2.16

Écrire la négation de l'assertion « il existe un groupe de TD dans lequel tous les élèves ont le permis de conduire ».

2.17

$\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des droites du plan, D_1 et D_2 sont deux éléments de $\mathcal{D}$ tels que $D_1 \| D_2$ (D_1 et D_2 sont parallèles). Traduire les assertions suivantes en langage courant et dire si elles sont vraies ou fausses.

1) $\forall i \in \{1,2\}, \forall D \in \mathcal{D}, D \| D_i$.

2) $\exists i \in \{1,2\} | \exists D \in \mathcal{D} | D \| D_i$.

3) $\exists i \in \{1,2\} | \forall D \in \mathcal{D}, D \| D_i$.

4) $\forall i \in \{1,2\}, \exists D \in \mathcal{D} | D \| D_i$.

5) $\forall D \in \mathcal{D}, \exists i \in \{1,2\} | D \| D_i$.

6) $\exists D \in \mathcal{D} | \forall i \in \{1,2\}, D \| D_i$.

2.18 ◎

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Quelle différence de sens ont les deux assertions proposées :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} | y = f(x)$
$\exists y \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} | y = f(x)$
$\exists x \in \mathbb{R} | \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} | f(x) \leq M$
$\exists M \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$

2.19

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1) « l'application f s'annule »

2) « l'application f est l'application nulle »

3) « f n'est pas une application constante »

4) « f ne prend jamais deux fois la même valeur »

5) « f prend des valeurs arbitrairement grandes »

6) « f ne peut s'annuler qu'au plus une seule fois ».

■ Récurrence

2.20

Soit a un réel positif. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq a u_n$. Démontrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 0, u_n \leq a^n u_0$.

2.21

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq n$.

2.22 ◎

Démontrer que si $u \geq -1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+u)^n \geq 1 + nu$$

(inégalité de Bernoulli). Démontrer de plus que l'inégalité est stricte si l'on suppose $n \geq 2$ et $u \neq 0$.

2.23 ◎

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \geq 2^n$.

2.24 ◎

Partant de $u_1 = 1$, calculer u_2, u_3, u_4, puis conjecturer une formule pour u_n et la démontrer par récurrence, dans les cas suivants :

1) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$

2) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$

3) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.

2.25 ◎

Démontrer par récurrence que

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

pour $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p \leq n$.

2.26

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

2.27

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par récurrence double sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

2.28 ◎

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n} + 2$.

1) Démontrer par récurrence sur n l'assertion P_n : « u_n existe et $u_n > 0$ ».

2) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 3$.

■ Ensembles

2.29

Soit $E = \{a, b\}$. À quels ensembles appartiennent (a, b), $\{a\}$, $(a, \{b\})$, $(\{a\}, \{b\})$, $\{\{a\}, \{b\}\}$, (a, E) ?

2.30

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Exprimer à l'aide de quantificateurs l'assertion

« A est inclus dans B »,

puis sa négation. Exprimer enfin sous forme quantifiée l'assertion

« A est inclus dans $\overline{B}$ ».

2.31

Que pensez-vous de l'énoncé et de la démonstration suivante : « *Soit f l'application de $\mathbb{R}^+$ dans le plan qui au réel positif t associe le point de coordonnées $x(t) = \dfrac{1-t}{1+t}$ et $y(t) = \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$ dans un repère orthonormé d'origine O. L'image de f est le cercle de centre O et de rayon* 1.

Démonstration : soit M un point de l'image de f. Il existe $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $(x(t), y(t))$ soient les coordonnées de M. On calcule

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= \frac{1 - 2t + t^2}{(1+t)^2} + \frac{4t}{(1+t)^2} \\ &= \frac{1 + 2t + t^2}{(1+t)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que l'image de f est bien le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. »

2.32 ◎

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E. Démontrer que

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

et que

$$A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}).$$

2.33

Soit E un ensemble et $A \subset E$. Caractériser $X \subset E$ dans chacun des cas suivants :

1) $A \cup X = E$

2) $A \cap X = A$

3) $A \cup X = A$

4) $A \cap X = \emptyset$

■ Applications

2.34

Écrire toutes les applications de $E = \{1, 2\}$ dans $F = \{a, b\}$ (avec $a \neq b$) et, pour chacune, indiquer si elle est injective, surjective, bijective.

2.35 ◎

1) Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

g est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2) Soit $f : n \in \mathbb{N} \mapsto 2n \in \mathbb{N}$. Est ce que f, $g \circ f$, $f \circ g$ sont injectives, surjectives, bijectives ?

2.36 ◎

Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives (auquel cas déterminer la bijection réciproque) :

1) $f : k \in \mathbb{N} \mapsto 2k + 1 \in \mathbb{N}^*$.

2) $g : x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mapsto \dfrac{2+x}{3-x} \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3) $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} \in \mathbb{R}$.

4) $k : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \in \mathbb{R}$.

5) $\ell : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + 3y, x + y) \in \mathbb{R}^2$.

2.37 ◎

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables, dont la dérivée est continue, $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensembles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $D : E \to F$ l'application qui à $f \in E$ associe $f' \in F$ (la dérivée de f).

D est-elle injective ? surjective ?

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

2.38 ◎

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $T_a : E \to E$ l'application qui à $f \in E$ associe l'application $T_a(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_a(f)(x) = f(x + a)$.

Démontrer que T_a est une bijection, de bijection réciproque T_{-a}.

2.39 ◎

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Démontrer que

1) si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.

2) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.

3) Si $g \circ f$ est injective, alors f aussi.

4) Si $g \circ f$ est surjective, alors g aussi.

5) Si f est bijective, alors g est injective si et seulement si $g \circ f$ l'est.

6) Si f est bijective, alors g est surjective si et seulement si $g \circ f$ l'est.

Indications

2.15 Notons P l'assertion « les hirondelles se rassemblent » et Q l'assertion « les hirondelles commencent leur migration ». Alors (0) est l'assertion $P \Rightarrow Q$. Il faut traduire les autres assertions proposées de manière similaire, à l'aide de P et Q, pour ensuite reconnaître la négation de (0), sa contraposée, ou bien une forme équivalente.

2.18 Il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs. Quand on écrit « $\forall x, \exists y$ », le y a le droit de dépendre de x. Quand on écrit « $\exists y \,|\, \forall x$ », le y ne dépend pas de x, il ne dépend de rien (c'est une constante par rapport à x).

2.22 Pour l'inégalité stricte, il faut séparer le cas $u = -1$ du cas $u > -1$ (et $u \neq 0$).

2.23 Si on note $u_n = \binom{2n}{n}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2.24 Pour la troisième suite, on démontre par récurrence que $u_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$.

2.25 L'une des difficultés ici, c'est le fait qu'il y a deux indices pour la formule : n et p. Il faut en fixer un pour faire une récurrence sur l'autre indice. Le plus simple est de fixer p, puis de faire une récurrence sur n pour $n \geq p$.

2.28 Pour la deuxième question, il faut le faire par l'absurde : on supposera donc qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} = 3$, et on démontre par **récurrence descendante** que $u_n = 3$ pour $n \leq n_0$. La contradiction viendra alors de u_0.

2.32 Que vaut $B \cup \overline{B}$? Et $A \cap E$?

2.35 On pourra calculer (par exemple) $g(1)$, $g(2)$ et essayer de résoudre l'équation $f(n) = 1$.

2.36 **1)** En résolvant $f(x) = y$, bien penser au fait que x doit être dans le domaine de définition de f ...

2) Résoudre $g(x) = y$ pour $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, avec x dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

3) Discuter suivant les valeurs de $y \in \mathbb{R}$ pour résoudre l'équation $h(x) = y$.

4) Résoudre l'équation $k(x) = y$ pour $y \in \mathbb{R}$. Faire attention que pour prendre le logarithme d'un élément, il faut que cet élément soit strictement positif (d'où une étude de signe à faire à un moment).

5) Résoudre l'équation (ou plutôt le système) $\ell(x, y) = (a, b)$, et regarder le nombre de solutions obtenues.

2.37 Pour l'injectivité, penser aux applications constantes.

Pour la surjectivité, penser à une application qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2.38 Il suffit de vérifier que $T_a \circ T_{-a} = \mathrm{Id}_E$ puis que $T_{-a} \circ T_a = \mathrm{Id}_E$...

2.39 Pour les deux premières questions, écrire les définitions des hypothèses faites sur f et g.

Pour les questions 3 et 4, écrire la définition de la condition donnée sur $g \circ f$, écrire la définition de ce que l'on veut démontrer, et voir le lien entre les deux.

Pour les deux dernières questions, on peut utiliser les premières questions de l'exercice, et aussi le fait que si f^{-1} est l'application réciproque de f, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ (et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$).

2.1

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, (non $P(x)$)

2) $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, (\text{non } P(x))$

2.2

Non. Pour être rigoureux, il faut écrire $x \geq 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 1$ et $\exp(x) \geq 1 \Rightarrow 1 + \exp(x) \geq 2$, donc $x \geq 0 \Rightarrow 1 + \exp(x) \geq 2$.

On peut cependant utiliser la rédaction suivante : « si $x \geq 0$, alors $\exp(x) \geq 1$, donc $1 + \exp(x) \geq 2$ ».

Une écriture en symboles mathématiques est souvent plus contraignante au niveau de la rigueur qu'une écriture avec des mots français.

2.3

Non, car pour faire une récurrence, il faut des assertions qui dépendent d'un entier naturel (souvent noté n d'ailleurs), or ici, on a des assertions qui dépendent d'un réel (positif) x.

2.4

Faisons un raisonnement par disjonction des cas.

⋆ Premier cas : si $x \leq y$, alors $\max(x, y) = y$ et $\min(x, y) = x$, donc $\max(x, y) + \min(x, y) = y + x = x + y$.

⋆ Deuxième cas : si $x > y$ (ou $x \geq y$), alors $\max(x, y) = x$ et $\min(x, y) = y$, donc $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$.

Dans les deux cas, on a bien $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$. Comme l'un des deux cas est nécessairement vrai, on a bien l'égalité qui est toujours vraie.

2.5

1) E est inclus dans F signifie « $\forall x \in E$, $x \in F$ », c'est-à-dire « tout élément de E est aussi élément de F ».

2) E est égal à F signifie « E est inclus dans F et F est inclus dans E » (double inclusion), c'est à dire « $(\forall x \in E,\ x \in F)$ et $(\forall x \in F,\ x \in E)$ ».

2.6

$[0, 2] \cup]1, 3] = [0, 3]$ et $[0, 2] \cap]1, 3] =]1, 2]$.

2.7

Lois de Morgan : si A et B sont des sous-ensembles de E (et que l'on note le complémentaire dans E par une barre au dessus du nom de l'ensemble) alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

En généralisant, cela donne :

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \text{ et } \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

2.8

Non. $f(x) = x^2 \exp(x)$ est une égalité, pas une application. Quant à $x \mapsto x^2 \exp(x)$, une formule seule ne peut définir une application : il manque l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée !

Par contre,

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & x^2 \exp(x) \end{cases}$$

est une application (mais on pourrait tout à fait restreindre l'ensemble de définition à n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$, et même celui d'arrivée à $\mathbb{R}_+$, puisque pour tout réel x, $f(x) \geq 0$).

Remarque – Dans ce livre, on s'autorisera néammoins la présentation $x \mapsto f(x)$ pour désigner une fonction définie par une formule $f(x)$ construite à partir des fonctions usuelles. Il sera toujours sous-entendu que c'est une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où D est le domaine de définition de la formule.

2.9

C'est l'application $\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E \to & E \\ x \mapsto & x \end{cases}$

2.10

On peut écrire $g \circ f$, car l'ensemble de départ de g est l'ensemble d'arrivée de f. On a alors

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right) \end{cases}$$

Comme l'ensemble d'arrivée de g est $\mathbb{R}$ et que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, pour savoir si l'on peut composer f et g en $f \circ g$, il faut regarder si g ne prend que des valeurs dans l'ensemble de définition de f ou non.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, g ne prend que des valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donc $f \circ g$ a du sens. On a alors

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \dfrac{1}{\exp(x) + 1} \end{cases}$$

2.11

f est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2,\ (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x').$$

f est surjective si

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \,|\, f(x) = y.$$

f est bijective si f est injective et surjective à la fois, ce qui revient à dire

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \,|\, f(x) = y$$

(bien faire attention au point d'exclamation qui est là pour dire que le x est **unique**).

f n'est pas injective si

$$\exists (x, x') \in E^2 \,|\, (f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x')$$

(autrement dit, il existe deux éléments différents de E qui prennent la même valeur par f).

f n'est pas surjective si

$$\exists y \in F \,|\, \forall x \in E,\ f(x) \neq y$$

(autrement dit, il existe $y \in f$ tel que l'équation $y = F(x)$ d'inconnue $x \in E$ n'a pas de solution).

f n'est pas bijective si (f n'est pas injective ou f n'est pas surjective).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

2.12

C'est l'application définie de F dans E qui à un élément y de F associe l'unique solution x dans E de l'équation $f(x) = y$. Cela se traduit par l'équivalence

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ (y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x)$$

(en notant f^{-1} l'application réciproque de f).

2.13

1) Faux. C'est « il y a (au moins) un élève de la classe qui n'a pas son permis de conduire ».

2) Faux. La négation de l'assertion proposée est $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, ((x \leq 3)$ et $(x^2 \geq 9))$, donc pour la démontrer il suffit de donner une valeur de x qui convienne. $x = -4$ convient.

3) Vrai. En effet, $2 \times 4 = 8 \leq 9$, et on a bien $4 \geq -1$.

4) Faux. $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$, ce qui est équivalent à dire $\{a\} \subset E$, c'est à dire $a \in E$.

5) Vrai.

6) Faux. Comme dans un triplet l'ordre est important, il y a égalité si et seulement si $a = b = c$.

7) Vrai.

8) Vrai. π n'appartient pas à A puisque $\pi \geq 3$ et donc $\pi^2 \geq 9 > 5$.

9) Faux. Une application non nulle est une application qui prend au moins une valeur non nulle. Par exemple, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application non nulle, mais s'annule (entre autres) en 0.

10) Faux. Un prolongement de f consiste juste à donner une valeur en 0, qui peut être quelconque ! Par contre, il n'y a qu'un seul prolongement qui soit continu (il faut poser $f(0) = 1$).

11) Faux. Elle est injective (restriction d'une application injective), mais $\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$, donc $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_+^*$, donc f n'est pas surjective. Par contre, f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1, +\infty[$ (en utilisant le théorème de la bijection, vu au chapitre 15)

12) Vrai. On a $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, donc f est bien bijective (on utilise un théorème du cours fort utile, qui malheureusement ne porte pas de nom), et de plus sa bijection réciproque est $f^{-1} = f \circ f$.

2.14

1) « il faut », car un carré est toujours positif, mais il ne suffit pas, car 2 est un entier positif, mais il n'existe pas **d'entier** m vérifiant $m^2 = 2$...

2) « il faut et il suffit », car un carré est toujours positif (d'où « il faut »), et si $x \geq 0$, alors il existe $\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ qui vérifie $\sqrt{x}^2 = x$ (d'où « il suffit »).

3) « il suffit », car si on a $n \geq 10$, on peut écrire $u_n \leqslant |u_n| \leq \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$. Mais ce n'est pas nécessaire : par exemple, si $u_n = 0$ pour tout entier n, alors $n = 0$ convient !

4) « il suffit » (c'est un théorème du cours). Ce n'est pas nécessaire, comme l'illustre l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais dont la dérivée, $x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^2 \in \mathbb{R}$, s'annule en 0.

2.15

Notons P l'assertion « les hirondelles se rassemblent » et Q l'assertion « les hirondelles commencent leur migration ». Alors (0) est l'assertion $P \Rightarrow Q$.

1) C'est l'assertion

$$(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P),$$

c'est donc la contraposée de (0), et donc elle lui est équivalente.

2) C'est l'assertion $P \Rightarrow Q$, donc (0).

3) C'est l'assertion $P \Rightarrow Q$, donc (0) (on remarquera le nombre de façons d'écrire en langage courant la même assertion mathématique).

4) C'est l'assertion

$$P \text{ et } (\text{non } Q),$$

c'est donc la négation de $P \Rightarrow Q$, donc la négation de (0), qui n'est pas équivalente à (0).

5) C'est l'assertion $Q \Rightarrow P$, c'est donc la réciproque de (0), et **elle ne lui est pas équivalente !**

6) C'est l'assertion $Q \Rightarrow P$.

7) C'est l'assertion $(\text{non } P) \Rightarrow (\text{non } Q)$, qui est la contraposée de $Q \Rightarrow P$, et donc est la réciproque de (0), qui ne lui est pas équivalente.

8) C'est l'assertion (non P) ou Q, c'est-à-dire par définition d'une implication, l'assertion (0) elle-même.

9) C'est l'assertion $Q \Rightarrow P$.

2.16

Tout groupe de TD contient au moins un élève qui n'a pas le permis de conduire.

2.17

1) Toute droite D du plan est parallèle à D_1 et à D_2. C'est évidemment faux (à deux droites données, il est facile d'en construire une troisième qui ne leur est pas parallèle).

2) Il existe une droite D du plan qui est parallèle à D_1 ou à D_2. C'est vrai.

3) « Toute droite du plan est parallèle à D_1 » ou « toute droite du plan est parallèle à D_2 ». C'est bien sûr faux.

4) Il existe une droite D du plan qui est parallèle à D_1 et il existe une droite D' du plan (qui peut être différente de D) qui est parallèle à D_2. C'est vrai.

5) Toute droite du plan est parallèle à D_1 ou à D_2. C'est faux.

6) Il existe une droite D du plan qui est parallèle à la fois à D_1 et à D_2. C'est vrai car D_1 est parallèle à D_2 (ce serait faux sinon).

Remarque – Il faut retenir que « $\exists i \in \{1,2\} | P(i)$ » traduit l'idée d'un « ou » : l'assertion qui suit est vraie pour $i = 1$ ou pour $i = 2$. En d'autre termes, « $\exists i \in \{1,2\} | P(i)$ » équivaut à « $P(1)$ ou $P(2)$ ».

A l'opposé, « $\forall i \in \{1,2\}, P(i)$ » traduit l'idée d'un « et » : l'assertion qui suit est vraie pour $i = 1$ et pour $i = 2$. En d'autre termes, « $\forall i \in \{1,2\}, P(i)$ » équivaut à « $P(1)$ et $P(2)$ ».

2.18

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} | y = f(x)$: tout nombre $f(x)$ s'écrit comme un réel ... c'est vrai, sans hypothèse particulière sur l'application f.

$\exists y \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$: tout nombre $f(x)$ est égal au réel y qui a été fixé au début, soit : f est une application constante.

2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} | y = f(x)$: f est surjective.

$\exists x \in \mathbb{R} | \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$: il y aurait un x tel que $f(x)$ prendrait plusieurs valeurs (en fait toutes les valeurs réelles), c'est impossible car f étant une application, $f(x)$ est déterminé de façon unique. Donc cette assertion est toujours fausse.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} | f(x) \leq M$: à x fixé, on peut trouver un nombre (qui a le droit de dépendre de x) plus grand que $f(x)$, c'est bien sûr toujours vrai avec (par exemple) $M = f(x) + 1$.

$\exists M \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$: il y a un M ne dépendant pas de x qui est plus grand que tous les $f(x)$, donc l'application f est majorée par M sur $\mathbb{R}$.

2.19

1) $\exists x \in I \,|\, f(x) = 0$

2) $\forall x \in I,\ f(x) = 0$

3) $\exists x \in I, \exists y \in I \,|\, f(x) \neq f(y)$ **ou** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in I \,|\, f(x) \neq a$

4) $\forall x \in I, \forall y \in I, (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ **ou** $\forall x \in I, \forall y \in I, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$ (c'est la définition de « f est injective »).

5) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I \,|\, f(x) > M$

6) $\forall x \in I, \forall y \in I,$

$$((f(x) = 0) \text{ et } (f(y) = 0)) \Rightarrow x = y$$

2.20

Notons P_n l'assertion « $u_n \leq a^n u_0$ », et démontrons-la par récurrence sur n.

Initialisation : $a^0 = 1$, donc on a bien $u_0 \leq a^0 u_0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier n, alors $u_n \leq a^n u_0$, donc $au_n \leq a \times a^n u_0 = a^{n+1} u_0$ (puisque multiplier une inégalité par un réel positif ne change pas le sens de l'inégalité). Or, par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_{n+1} \leq au_n$, donc on a bien $u_{n+1} \leq a^{n+1} u_0$, donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie, et pour tout entier n, si P_n est vraie, alors P_{n+1} aussi, donc par récurrence l'assertion P_n est vraie pour tout entier naturel n.

2.21

Notons P_n l'assertion « $3^n \geq n$ », et démontrons P_n par récurrence sur n.

Initialisation : pour $n = 0$, $3^0 = 1 \geq 0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier n, alors $3^n \geq n$, donc $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3n$ (puisque multiplier une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité). Mais $3n \geq n + 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2}$, ce qui est vrai dès que $n \geq 1$. Donc l'assertion P_n est héréditaire dès que $n \geq 1$.

On ne peut donc pas conclure pour l'instant ! Il faut regarder si P_1 est vraie.

Nouvelle initialisation : $3^1 = 3 \geq 1$, donc P_1 est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie, et pour $n \geq 1$, si P_n est vraie, alors P_{n+1} aussi, donc par récurrence l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Comme P_0 est vraie aussi, on a bien $3^n \geq n$ pour tout entier naturel n.

Remarque – Il a fallu changer l'initialisation, car notre démonstration de l'hérédité demandait d'avoir $n \geq 1$. On n'a pas prouvé que l'hérédité était fausse pour $n = 0$ (d'ailleurs, elle est bien héréditaire), on a juste donné une démonstration qui ne couvrait pas ce cas.

2.22

• Fixons $u \geq -1$. Notons P_n l'assertion « $(1+u)^n \geq 1 + nu$ », et démontrons-la par récurrence sur n.

Initialisation : $(1+u)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \times u$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Si P_n est vraie pour un entier n, alors $(1+u)^n \geq 1 + nu$, et comme $1 + u \geq 0$, $(1+u)^n(1+u) \geq (1+nu)(1+u)$ (multiplier une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité), donc

$$(1+u)^{n+1} \geq 1 + (n+1)u + nu^2 \geq 1 + (n+1)u$$

(la deuxième inégalité provient du fait qu'un carré est toujours positif), d'où P_{n+1}.

Conclusion : P_0 est vraie, et pour tout entier n, si P_n est vraie, alors P_{n+1} aussi, donc par récurrence l'assertion P_n est vraie pour tout entier naturel n.

• Supposons maintenant $n \geq 2$ et $u > -1$, $u \neq 0$. Notons Q_n l'assertion « $(1+u)^n > 1 + nu$ », et démontrons-la par récurrence sur n.

Initialisation : $(1+u)^2 = 1 + 2u + u^2 > 1 + 2u$, puisque $u^2 > 0$ (puisque u est supposé non nul), donc Q_2 est vraie.

Hérédité : Si Q_n est vraie pour un entier $n \geq 2$, alors $(1+u)^n > 1 + nu$, et comme $1 + u > 0$ (puisque $u > -1$ par hypothèse),

$$(1+u)^n(1+u) > (1+nu)(1+u)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

(multiplier une inégalité stricte par un nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité et garde le caractère strict), donc

$$(1+u)^{n+1} > 1 + (n+1)u + nu^2 > 1 + (n+1)u,$$

d'où Q_{n+1}.

Conclusion : Q_2 est vraie, et pour tout entier $n \geq 2$, si Q_n est vraie, alors Q_{n+1} aussi, donc par récurrence l'assertion Q_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

• Si $u = -1$, on veut démontrer que $0 > 1 - n$ pour $n \geq 2$, ce qui est immédiat.

2.23

Notons P_n l'assertion « $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ », et démontrons-la par récurrence sur n.

Initialisation : $\binom{2\times 0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1 \geq 1 = 2^0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier n, alors $\binom{2n}{n} \geq 2^n$. Puis,

$$\begin{aligned}\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!(n+1)n!}\\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, on a $\frac{2n+1}{n+1} \geq 1$, donc $\frac{2(2n+1)}{n+1} \geq 2$, et donc

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \geq 2\binom{2n}{n} \geq 2\times 2^n = 2^{n+1},$$

donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par récurrence, l'assertion P_n est vraie pour tout entier naturel n.

2.24

1) $u_2 = \boxed{\frac{1}{2}}$, $u_3 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \boxed{\frac{1}{3}}$, $u_4 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$, donc $u_4 = \boxed{\frac{1}{4}}$.

Démontrons l'assertion P_n : « $\boxed{u_n = \frac{1}{n}}$ », pour $n \geq 1$, par récurrence sur n.

Initialisation : P_1 est vraie car $u_1 = 1$.

Hérédité : Si P_n est vraie pour un entier $n \geq 1$, alors $u_n = \frac{1}{n}$, et donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}$, donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par récurrence, l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2) $u_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $u_3 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $u_4 = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{4}}}$. Démontrons par récurrence sur n l'assertion P_n : « $\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}}$ », pour $n \geq 1$.

Initialisation : P_1 est vraie car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier $n \geq 1$, alors $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, et donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par récurrence, l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

3) $u_2 = \boxed{\frac{1}{3}}$, $u_3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+2} = \boxed{\frac{1}{7}}$, $u_4 = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+2}$, donc $u_4 = \boxed{\frac{1}{15}}$. Démontrons par récurrence sur n l'assertion P_n : « $\boxed{u_n = \frac{1}{2^n-1}}$ », pour $n \geq 1$.

Initialisation : P_1 est vraie car $u_1 = 1$.

Hérédité : Si P_n est vraie pour un entier $n \geq 1$, alors $u_n = \frac{1}{2^n-1}$, et donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+2} = \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n-1}+2} = \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1+2^{n+1}-2}{2^n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}-1}$, donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par récurrence, l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2.25

Fixons $p \in \mathbb{N}$ et démontrons l'assertion P_n : « $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ », par récurrence sur n pour $n \geq p$.

Initialisation : si $n = p$, alors il faut démontrer que $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$, ce qui est vrai car les deux valent 1. Donc P_p est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier $n \geq p$, alors $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}\\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}\end{aligned}$$

(la dernière égalité est la formule de Pascal). Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Comme P_p est vraie, et que pour tout entier $n \geq p$, si P_n est vraie, alors P_{n+1} aussi, l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq p$.

2.26 Notons P_n l'assertion « $u_n \leq 2^n$ », et démontrons-la par récurrence double sur n.

Initialisation : $u_0 = 1 \leq 1 = 2^0$, donc P_0 est vraie, et $u_1 = 1 \leq 2 = 2^1$, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n et P_{n+1} vraies pour un entier n, alors $u_n \leq 2^n$ et $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$. Donc

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \leq 2^{n+1} + 2^n \leq 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2},$$

donc P_{n+2} est vraie.

Conclusion : Comme P_0 et P_1 sont vraies, et que pour tout entier n, si P_n et P_{n+1} sont vraies, alors P_{n+2} aussi, l'assertion P_n est vraie, par récurrence double, pour tout entier naturel n.

2.27 Notons P_n l'assertion « $u_n = 1 + 2^n$ », et démontrons-la par récurrence double sur n, puisque chaque terme est défini en fonction des deux précédents.

Initialisation : $u_0 = 2 = 1 + 1 = 1 + 2^0$, donc P_0 est vraie, et $u_1 = 3 = 1 + 2 = 1 + 2^1$, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n et P_{n+1} vraies pour un entier n, alors $u_n = 1 + 2^n$ et $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$. Donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) \\ &= 1 + 2 \times 2^{n+1} \\ &= 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

donc P_{n+2} est vraie.

Conclusion : Par récurrence double, l'assertion P_n est vraie pour tout entier naturel n.

2.28

1) Initialisation : u_0 existe et $u_0 = 1 > 0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que P_n soit vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors u_n existe et $u_n > 0$. Donc u_n est dans l'ensemble de définition de l'application inverse $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$, donc $\dfrac{1}{u_n}$ existe, puis en multipliant par 3 et additionnant 2, on a bien que u_{n+1} existe.

De plus, comme l'inverse d'un nombre strictement positif est encore strictement positif, on a $\dfrac{1}{u_n} > 0$, puis $\dfrac{3}{u_n} > 0$, et enfin $\dfrac{3}{u_n} + 2 > 2$, donc $u_{n+1} > 2 > 0$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par récurrence, on a bien que P_n est vraie pour tout entier naturel n, ce qui permet de justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe.

2) Raisonnons par l'absurde. Supposons donc qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} = 3$, et démontrons par **récurrence descendante** sur $n \leq n_0$ l'assertion Q_n : « $u_n = 3$ ».

Initialisation : Q_{n_0} est vraie par hypothèse.

Hérédité : Supposons Q_n vraie pour un entier $1 \leq n \leq n_0$, et démontrons qu'alors Q_{n-1} est vraie.

On a $u_n = 3$, mais comme $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{3}{u_{n-1}} + 2$, donc $3 = \dfrac{3}{u_{n-1}} + 2$, donc $1 = \dfrac{3}{u_{n-1}}$, ce qui donne bien $u_{n-1} = 3$, et donc Q_{n-1} est vraie.

Conclusion : Q_{n_0} est vraie, et pour tout entier $1 \leq n \leq n_0$, si Q_n est vraie, alors Q_{n-1} aussi, donc par récurrence descendante sur n, l'assertion Q_n est vraie pour tout entier naturel $n \leq n_0$.

En particulier, Q_0 est vraie, donc $u_0 = 3$. Mais, par définition, $u_0 = 1$, d'où la contradiction.

Donc, on a bien que $u_{n_0} = 3$ est impossible, ce qui prouve que $u_n \neq 3$ pour tout entier naturel n.

Remarque – Ceci permet alors de considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 3}$. Un calcul rapide démontre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3, ce qui permet de donner une expression de v_n en fonction de n, puis d'en déduire une expression de u_n.

2.29

- $(a, b) \in E^2 = E \times E$,
- $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$,
- $(a, \{b\}) \in E \times \mathcal{P}(E)$,
- $(\{a\}, \{b\}) \in \mathcal{P}(E)^2 = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$,
- $\{\{a\}, \{b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$,
- $(a, E) \in E \times \mathcal{P}(E)$.

2.30 « A est inclus dans B » est l'assertion

$$\text{« } \forall x \in A,\ x \in B \text{ »}.$$

Sa négation est donc

$$\text{« } \exists x \in A \mid x \notin B \text{ »},$$

cela traduit « A n'est pas inclus dans B ».

« A est inclus dans $\overline{B}$ » se traduit par

$$\text{« } \forall x \in A,\ x \notin B \text{ »}.$$

2.31 On a seulement démontré que l'image est **incluse** dans le cercle, mais pas la réciproque ... Donc la démonstration est incomplète : on n'a pas démontré une égalité d'ensembles, seulement une inclusion.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

D'ailleurs l'énoncé est faux : aucun t réel ne donne le point de coordonnées $(-1, 0)$. De plus, on a toujours $y \geq 0$, donc l'image de l'application considérée est au plus le demi-cercle supérieur privé de $(-1, 0)$ (on peut démontrer (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) que l'image de l'application est exactement le demi-cercle supérieur privé de $(-1, 0)$).

2.32

• Démontrons $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ de deux façons différentes :

➜ **Première méthode**, via la définition : $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont des parties de A donc :

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subset A.$$

Soit maintenant $x \in A$. Si $x \in B$ alors $x \in A \cap B$, sinon $x \in \overline{B}$ et donc $x \in A \cap \overline{B}$. Dans tous les cas $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ donc $A \subset (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. D'où l'égalité.

➜ **Deuxième méthode**, via les propriétés des unions et intersections : $E = B \cup \overline{B}$, puis $A = A \cap E = A \cap (B \cup \overline{B})$, et il suffit alors d'utiliser la distributivité de l'intersection par rapport à l'union pour dire $A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

• Démontrons $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$: on pourrait le faire par l'une ou l'autre des méthodes précédentes, mais on va présenter d'autres méthodes.

➜ **Première méthode**, via les lois de Morgan, en utilisant le résultat précédent (appliqué à $\overline{A}$) : $\overline{A} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ puis on considère les complémentaires : $A = \overline{\overline{A}} = \overline{(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$. Les lois de Morgan permettent alors de conclure, puisque

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} &= \overline{(\overline{A} \cap B)} \cap \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \\ &= (\overline{\overline{A}} \cup \overline{B}) \cap (\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}) = (A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)\end{aligned}$$

➜ **Deuxième méthode**, via les fonctions indicatrices : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A \cup \overline{B}} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\overline{B}} - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} \\ &= \mathbb{1}_A + (1 - \mathbb{1}_B) - \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) = 1 - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{1}_{X \cap Y} = \mathbb{1}_X . \mathbb{1}_Y$, en utilisant que $\mathbb{1}_X^2 = \mathbb{1}_X$ (car $\mathbb{1}_X$ ne prend que deux valeurs, 0 et 1, et que $0^2 = 0$, $1^2 = 1$), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})} &= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)(1 - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B^2 \\ &\quad + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_A^2 \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B^2 - \mathbb{1}_A^2 \mathbb{1}_B^2 \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \\ &\quad + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \\ &= \mathbb{1}_A\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{1}_{(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})} = \mathbb{1}_A$, ce qui donne bien l'égalité voulue : $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.

2.33

1) Remarquons que $A \cup X \subset E$ est toujours vrai puisque A et X sont inclus dans E.

Il suffit donc de caractériser les $X \subset E$ tels que $E \subset A \cup X$. Comme $E = A \cup \overline{A}$, on veut donc $(A \cup \overline{A}) \subset A \cup X$, ce qui est équivalent à dire $\overline{A} \subset (A \cup X)$. Puis, comme $A \cap \overline{A} = \emptyset$, on a $\overline{A} \subset (A \cup X)$ si et seulement si $\overline{A} \subset X$.

Donc $\boxed{A \cup X = E \text{ si et seulement si } \overline{A} \subset X}$.

2) Remarquons que par construction, $A \cap X \subset X$. Donc, si $A = A \cap X$, alors $A \subset X$.

Réciproquement, si $A \subset X$, alors $A \subset A \cap X$ (puisque tout élément de A est bien à la fois dans A et X), et comme $A \cap X \subset A$ est toujours vrai, on a bien $A = A \cap X$.

Donc $\boxed{A \cap X = A \text{ si et seulement si } A \subset X}$.

3) C'est le « symétrique » de la question précédente :

$A \cup X = A$ si et seulement si $\overline{A \cup X} = \overline{A}$. Or, les lois de Morgan donnent $\overline{A \cup X} = \overline{A} \cap \overline{X}$. Donc $A \cup X = A$ si et seulement si $\overline{A} \cap \overline{X} = \overline{A}$. La question 2 s'applique, et donne alors $A \cup X = A$ si et seulement si $\overline{A} \subset \overline{X}$. Or, $\overline{A} \subset \overline{X} \Leftrightarrow X \subset A$, donc :

$\boxed{A \cup X = A \text{ si et seulement si } X \subset A}$.

4) C'est le « symétrique » de la première question.

$A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A \cap X} = \overline{\emptyset}$. Comme $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{A \cap X} = \overline{A} \cup \overline{X}$, on a $A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{X} = E$. La première question donne alors $A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{X}$. Comme $\overline{\overline{A}} = A$, et que $A \subset \overline{X} \Leftrightarrow X \subset \overline{A}$, on a : $\boxed{A \cap X = \emptyset \text{ si et seulement si } X \subset \overline{A}}$.

2.34

Ce sont toutes des applications $E \to F$, il faut donc donner l'image de chaque élément de E pour donner l'application. Listons-les :

1) $f_1(1) = f_1(2) = a$ (l'application constante égale à a), qui n'est pas injective puisque $f_1(1) = f_1(2)$, ni surjective car $f_1(x) = b$ n'a pas de solution.

2) $f_2(1) = f_2(2) = b$ (l'application constante égale à b), qui n'est pas injective, ni surjective.

3) $f_3(1) = a$ et $f_3(2) = b$, qui est injective (car $a \neq b$, donc $f_3(1) \neq f_3(2)$) et surjective (car 1 est un antécédent de a par f_3, et 2 de b). Donc f_3 est bijective.

Son application réciproque est définie de F dans E par $f_3^{-1}(a) = 1$ et $f_3^{-1}(b) = 2$.

4) $f_4(1) = b$ et $f_4(2) = a$, qui est bijective, son application réciproque étant définie de F dans E par $f_4^{-1}(a) = 2$ et $f_4^{-1}(b) = 1$.

Il n'y a pas d'autre application.

2.35

1) g n'est pas injective, car (par exemple),

$$g(2) = 1 = g(1)$$

mais $2 \neq 1$.

g est surjective, car $\forall p \in \mathbb{N}$, $2p$ est un entier pair, donc $g(2p) = \dfrac{2p}{2} = p$, et donc l'équation $g(n) = p$ admet au moins la solution $2p$.

Comme g n'est pas injective, g ne peut pas être bijective.

2) ➜ f est injective, car $\forall (n,n') \in \mathbb{N}^2$, $f(n) = f(n') \Rightarrow 2n = 2n'$, et comme $2n = 2n' \Rightarrow n = n'$, on a bien $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$.

f n'est pas surjective, car pour tout entier n, $f(n)$ est un entier pair, donc (par exemple) l'équation $f(n) = 1$ n'a pas de solution (mais $1 \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ est l'espace d'arrivée de f).

Par conséquent, f n'est pas bijective non plus.

➜ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(n),$$

donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, donc $g \circ f$ est bijective (alors que ni f ni g ne sont bijectives !).

➜ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f \circ g(n) &= f(g(n)) \\ &= 2g(n) \\ &= 2\begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 2n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc par exemple, $f \circ g(2) = 2 = f \circ g(1)$ (ce qui n'est pas surprenant, puisque l'on a remarqué à la question précédente que $g(2) = g(1)$) et donc $f \circ g$ n'est pas injective.

Puis, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \circ g(n)$ est un entier pair (c'est n si n est pair, $2n$ si n impair), donc l'équation $f \circ g(n) = 1$ n'a pas de solution (ce qui n'est pas surprenant non plus, car l'équation $f(k) = 1$ n'avait déjà pas de solution), donc $f \circ g$ n'est pas surjective.

Donc $f \circ g$ est ni injective, ni surjective, *a fortiori* ni bijective.

2.36

1) f est injective, car $\forall (k,k') \in \mathbb{N}^2$, si on a $2k+1 = 2k'+1$, alors $k = k'$, mais pas surjective, car $2 \in \mathbb{N}^*$ (domaine d'arrivée de f), mais $f(k) = 2$ n'a pas de solution $k \in \mathbb{N}$ (car $f(k) = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$). Donc f n'est pas bijective non plus.

2) g est bien définie, car l'expression $\frac{2+x}{3-x}$ a du sens pour $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x \neq 3$. De plus, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, l'expression $\frac{2+x}{3-x}$ est un élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, car

$$\begin{aligned} \frac{2+x}{3-x} = -1 &\Leftrightarrow 2 + x = -(3-x) \\ &\Leftrightarrow 2 = -3 \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Regardons maintenant si g est bijective : soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, résolvons $g(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$:

$$\begin{aligned} g(x) = y &\Leftrightarrow \frac{2+x}{3-x} = y \\ &\Leftrightarrow 2 + x = (3-x)y \\ &\Leftrightarrow x(1+y) = 3y - 2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3y-2}{y+1} \text{ car } y \neq -1 \end{aligned}$$

On vient donc de prouver que l'équation $\frac{2+x}{3-x} = y$ pour $y \neq -1$ admet une et une seule solution réelle, $x = \frac{3y-2}{y+1}$ (donc g est au moins injective). Il reste à voir quelles sont les valeurs de y qui font que la solution trouvée soit dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Or

$$\begin{aligned} \frac{3y-2}{y+1} = 3 &\Leftrightarrow 3y - 2 = 3(y+1) \\ &\Leftrightarrow -2 = 3 \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Donc pour tout réel $y \neq -1$, $\frac{3y-2}{y+1} \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Par conséquent, l'équation $g(x) = y$ pour $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ a une et une seule solution, donc $\boxed{g \text{ est bijective}}$, et son application réciproque est

$$g^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ y \mapsto g^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y+1} \end{cases}$$

3) h est bien définie car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$ (le discriminant de ce trinôme est strictement négatif).

h n'est sûrement pas surjective, puisqu'une racine carrée est toujours positive, donc pour tout réel x, $h(x) \geq 0$, donc $h(x) = y$ n'a pas de solution pour $y < 0$.

Soit $y \geq 0$, résolvons donc l'équation $h(x) = y$ avec $x \in \mathbb{R}$: comme ce sont deux nombres positifs, ils sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux. Donc

$$\begin{aligned} h(x) = y &\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x + (1 - y^2) = 0 \end{aligned}$$

Résolvons donc cette équation polynomiale du second degré en x (ici y est considéré comme un paramètre) : son discriminant est

$$1^2 - 4 \times 1 \times (1 - y^2) = 4y^2 - 3,$$

il est positif si et seulement si $y^2 \geq \frac{3}{4}$, c'est à dire $|y| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc l'équation $h(x) = y$ pour $y \geq 0$ n'a des solutions que si $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, et ce sont alors

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{4y^2 - 3}}{2} \text{ et}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$$x_- = \frac{-1 - \sqrt{4y^2 - 3}}{2}.$$

Si $y > \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $x_+ \neq x_-$ (car $x_+ > -\frac{1}{2} > x_-$), donc l'équation $h(x) = y$ admet deux solutions. Donc h n'est pas injective.

Remarque – Par contre, ce que l'on a calculé permet de dire que

$$h_+ : \begin{cases} \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[& \to & \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 + x + 1} \end{cases}$$

est bijective, de bijection réciproque

$$h_+^{-1} : \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[& \to & \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\\ y & \mapsto & \frac{-1 + \sqrt{4y^2 - 3}}{2} \end{cases}$$

De même,

$$h_- : \begin{cases} \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] & \to & \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 + x + 1} \end{cases}$$

est bijective, de bijection réciproque

$$h_-^{-1} : \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[& \to & \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \\ y & \mapsto & \frac{-1 - \sqrt{4y^2 - 3}}{2} \end{cases}$$

4) k est bien définie puisque l'expression $e^x + 1$ ne s'annule jamais pour $x \in \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$, résolvons $k(x) = y$:

$$\begin{aligned} k(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \\ &\Leftrightarrow e^x - 1 = y(e^x + 1) \\ &\Leftrightarrow e^x(1 - y) = 1 + y \end{aligned}$$

Il faut donc distinguer deux cas :

- si $y = 1$, on a alors $k(x) = 1 \Leftrightarrow 0 = 2$, donc il n'y a pas de solution, donc k non surjective.
- si $y \neq 1$, $k(x) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1 + y}{1 - y}$.

Or cette dernière équation n'a de solutions que si $\frac{1 + y}{1 - y} > 0$ (puisque $e^x > 0$ pour tout réel x). Le tableau de signe de $\frac{1 + y}{1 - y}$ est :

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 + y$	$-$	$\|$	0	$+$	$\|$	$+$	
$1 - y$	$+$	$\|$	$\|$	$+$	0	$-$	
$\frac{1+y}{1-y}$	$-$	$\|$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Donc si $y \notin]-1, 1[$, l'équation $k(x) = y$ n'a pas de solutions réelles.

Et si $y \in]-1, 1[$, $k(x) = y \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$, donc il n'y a qu'une solution.

Donc $\boxed{k \text{ est injective}}$, mais pas surjective.

Remarque – Par contre, k induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$, dont la bijection réciproque est

$$\begin{cases}]-1, 1[& \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \end{cases}$$

5) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résolvons l'équation $\ell(x, y) = (a, b)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \ell(x, y) = (a, b) &\Leftrightarrow (x + 3y, x + y) = (a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = a \\ x + y = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = a - b \\ x + y = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a - b}{2} \\ x = \frac{3b - a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $\ell(x, y) = (a, b)$ admet une et une seule solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, qui est $(x, y) = \left(\frac{3b - a}{2}, \frac{a - b}{2}\right)$.

Donc $\boxed{\ell \text{ est une bijection}}$, et sa bijection réciproque est l'application

$$\ell^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto \left(\frac{3b - a}{2}, \frac{a - b}{2}\right) \end{cases}$$

2.37 D n'est pas injective : si pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application constante égale à a (pour tout réel x, $f_a(x) = a$), alors f_a est bien dérivable et sa dérivée est nulle, donc $f_a \in E$ et $D(f_a) = f_0$. Donc f_0 a plusieurs antécédents par D (toute application f_a pour $a \in \mathbb{R}$), donc D ne peut pas être injective.

D n'est pas surjective : toute image par D d'un élément de E est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, or dans F il existe des applications non continues sur $\mathbb{R}$ (par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x) = -1 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 1 \quad \text{si } x \geq 0 \end{cases}$), donc de telles applications ne peuvent être l'image par D d'un élément de E, donc D ne peut pas être surjective.

2.38

En vertu d'un théorème du cours, il suffit de démontrer que $T_a \circ T_{-a} = \mathrm{Id}_E$ et $T_{-a} \circ T_a = \mathrm{Id}_E$.

On cherche donc à démontrer $T_a \circ T_{-a} = \mathrm{Id}_E$, une égalité entre deux applications définies sur E. Soit donc $f \in E$ quelconque. A-t-on

$$T_a \circ T_{-a}(f) = \mathrm{Id}_E(f),$$

c'est-à-dire $T_a(T_{-a}(f)) = f$?

Là encore, on veut une égalité entre deux applications, définies cette fois-ci sur $\mathbb{R}$. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. A-t'on

$$T_a(T_{-a}(f))(x) = f(x) \ ?$$

Par définition,

$$\begin{aligned} T_a(T_{-a}(f))(x) &= T_{-a}(f)(x+a) \\ &= f((x+a)-a) = f(x) \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tour réel x, on en déduit bien que $T_a(T_{-a}(f)) = f$.

Cette nouvelle égalité étant vraie pour toute fonction $f \in E$, on en déduit bien que $T_a \circ T_{-a} = \mathrm{Id}_E$.

L'égalité précédente étant valable pour tout réel a, il suffit de poser $b = -a$ et de l'appliquer pour b, ce qui donne $T_{-a} \circ T_a = \mathrm{Id}_E$. Donc T_a est bijective, de bijection réciproque T_{-a}.

Remarque – On a de manière plus générale, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $T_a \circ T_b = T_{a+b}$ et $T_0 = \mathrm{Id}_E$.

2.39

1) Pour tout $(x, x') \in E^2$, si $g \circ f(x) = g \circ f(x')$,

- alors $g(f(x)) = g(f(x'))$,
- donc $f(x) = f(x')$ car g est injective,
- et donc $x = x'$ car f est injective.

Donc on a bien démontré que $\forall (x, x') \in E^2$, si $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, alors $x = x'$, soit : $\forall (x, x') \in E^2,\ g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$, c'est à dire $g \circ f$ injective.

2) Quel que soit $z \in G$,

- comme g est surjective il existe $y \in F$ avec $g(y) = z$,
- et comme f est surjective, il existe $x \in E$ avec $y = f(x)$,
- donc $g(f(x)) = g(y) = z$.

Donc on a bien démontré que pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ avec $g(f(x)) = z$, donc $g \circ f$ est surjective.

3) On a toujours

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')),$$

et, si on suppose $g \circ f$ injective, on a alors

$$g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x',$$

donc

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$

donc f est injective.

4) Si $g \circ f$ est surjective alors pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ avec

$$z = g \circ f(x) = g(f(x)),$$

donc $y = f(x) \in F$ vérifie bien

$$g(y) = z.$$

Donc on a bien $\forall z \in G, \exists y \in F \mid g(y) = z$, donc g est surjective.

5) On veut démontrer une équivalence, donc deux implications.

• Démontrons $\Rightarrow$: supposons donc g injective, on cherche à démontrer que $g \circ f$ est injective.

Or, on sait que f est bijective, donc injective. Donc, d'après le premier point de l'exercice, comme g et f sont injectives, on a bien que $g \circ f$ est injective.

• Démontrons $\Leftarrow$: supposons donc $g \circ f$ injective, on cherche à démontrer que g est injective.

Or, f est bijective, donc si f^{-1} désigne sa bijection réciproque, on a

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F,$$

donc

$$g = g \circ \mathrm{Id}_F = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1}.$$

Comme f^{-1} est bijective, elle est injective, et comme $g \circ f$ est injective par hypothèse, toujours d'après le premier point de l'exercice, on a bien que $(g \circ f) \circ f^{-1} = g$ est injective.

6) • Démontrons $\Rightarrow$: supposons donc g surjective, on cherche à démontrer que $g \circ f$ est surjective.

Or, on sait que f est bijective, donc surjective. Donc, d'après le deuxième point de l'exercice, comme g et f sont surjectives, on a bien que $g \circ f$ est surjective.

• Démontrons $\Leftarrow$: supposons donc $g \circ f$ surjective, on cherche à démontrer que g est surjective.

Comme précédemment, on a

$$g = (g \circ f) \circ f^{-1}.$$

Comme f^{-1} est bijective, elle est surjective, et comme $g \circ f$ est surjective par hypothèse, toujours d'après le deuxième point de l'exercice, on a bien que $(g \circ f) \circ f^{-1} = g$ est surjective.

Remarque – Les deux dernières questions de cet exercice ont une version analogue où l'on suppose g bijective, et où l'on démontre que $g \circ f$ est injective/surjective si et seulement si f est injective/surjective.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Nombres complexes

CHAPITRE 3

Plan

3.1 Propriétés fondamentales 62
3.2 Forme trigonométrique d'un complexe 65
3.3 Équations dans $\mathbb{C}$ 70
Synthèse 73
Tests et exercices 74
Corrigés des exercices 77

Introduction

Les nombres complexes furent inventés au XVI^{ème} siècle, afin de résoudre des équations polynomiales du troisième puis du quatrième degré (formules assez compliquées, que nous ne verrons pas). Le théorème principal liant complexes et polynômes (le théorème de d'Alembert-Gauss) sera énoncé au chapitre 4.

Dans ce chapitre, nous présenterons les formes algébrique et trigonométrique d'un complexe (ce qui sera l'occasion de faire des rappels sur les formules trigonométriques), et chercherons à résoudre des équations polynomiales d'un type particulier (équation du second degré à coefficient complexe ou racines n-ièmes d'un complexe).

Prérequis

Aucun.

Objectifs

- Exprimer un nombre complexe sous forme algébrique ou trigonométrique.
- Savoir utiliser les formules d'Euler et de de Moivre.
- Calculer les racines n-ièmes d'un complexe sous forme trigonométrique.
- Résoudre des équations du second degré complexes.

3.1 Propriétés fondamentales

3.1.1 L'ensemble des nombres complexes

Définition – Nombre complexe

Un **nombre complexe** z est la donnée d'un couple de réels (a, b), présenté sous la forme $z = a + ib$. On dit alors qu'il est sous **forme algébrique**.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On identifie le réel x au complexe $x + i.0$, ce qui permet de voir $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Remarques

1. L'écriture d'un complexe z sous la forme $a+ib$ est unique par construction : si $a+ib = c + id$ où a, b, c et d sont des **nombres réels**, alors $a = c$ et $b = d$.

2. En particulier, si $a + ib = 0$ où a et b sont des **nombres réels**, alors $a = b = 0$.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib$, alors $a = \text{Re}(z)$ est appelé **partie réelle** de z, et $b = \text{Im}(z)$ **partie imaginaire**.

 Les nombres complexes de partie réelle nulle sont dits **imaginaires purs**.

Définition – Opérations sur les complexes

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes (avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$). On définit une **addition** et une **multiplication** sur les nombres complexes par :

$$z + z = (a + a') + i(b + b') \text{ et } z.z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Remarques

1. La formule donnant la multiplication est obtenue en développant de manière classique le produit $z.z' = (a + ib)(a + ib')$, avec la règle $i^2 = -1$.
2. Les règles de calcul (factorisation, développement, binôme de Newton ...) sont alors les mêmes que pour les nombres réels, en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

Exemples

1. $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ et $i^{4n+3} = -i$.
2. Soit $z = 2 - 3i$ alors $\text{Re}(z) = 2$ et $\text{Im}(z) = -3$.
3. Si $w = (1 + 2i)(3 - i)$ alors on développe : $w = 5 + 5i$ et $\text{Re}(w) = \text{Im}(w) = 5$. Il est impératif de revenir sur l'écriture algébrique pour obtenir les parties réelle et imaginaire.

Proposition – *Si $z \neq 0$, $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$ vérifie $zz' = 1$. Donc tout complexe z non nul a un inverse, que l'on note $\dfrac{1}{z}$ ou z^{-1} (au lieu de z').*

Beaucoup de propriétés de calcul sont les mêmes pour les complexes que pour les réels. Cependant : il n'y a pas d'ordre naturel sur les nombres complexes. On n'écrira donc JAMAIS $z \geq 0$ (par exemple) si z est un complexe non réel.

Remarque – On définit alors pour $z_2 \neq 0$ le quotient $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \times \dfrac{1}{z_2}$. Les règles de calcul pour cette division sont les mêmes que pour les nombres réels. Notamment les formules sur les puissances **entières** (positives ou négatives) restent vraies, puisqu'elles ne traduisent que des propriétés de la multiplication ou de la division qui restent vraies pour les complexes (c'est faux pour les puissances non entières).

Exemples

1. $i^{-1} = -i$.
2. Soit $z = 2 + 3i$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{13} - i\dfrac{3}{13}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

3.1.2 Conjugué d'un complexe

Définition – Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$). On appelle **complexe conjugué** de z, et on note $\overline{z}$, le complexe $\overline{z} = a - ib$.

Exemples

1. Le conjugué de $2 - 3i$ est $2 + 3i$.
2. On a aussi $\overline{2i - 1} = -2i - 1$: la partie imaginaire, habituellement écrite en seconde position, est avant tout le terme comportant le i, et c'est ce terme que la conjugaison change en son opposé.

Théorème – Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad , \quad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Si de plus $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Proposition – *Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :*

1. *z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.*
2. *z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.*
3. *$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.*

Exemple

Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z\overline{z} = 1$ (donc $z \neq 0$) et $z \neq 1$. Alors $i\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\overline{\left(i\frac{z+1}{z-1}\right)} = -i\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = -i\frac{z\overline{z}+1}{z\overline{z}-1} = -i\frac{z\overline{z}+z}{z\overline{z}-z} = -i\frac{1+z}{1-z} = i\frac{z+1}{z-1}$$

Donc $\overline{\left(i\dfrac{z+1}{z-1}\right)} = i\dfrac{z+1}{z-1}$, ce qui donne bien que $i\dfrac{z+1}{z-1}$ est un réel.

3.1.3 Module d'un complexe

Définition – Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$). On appelle **module** de z et on note $|z|$, le réel positif ou nul $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples

1. Le module de $2 + 3i$ est $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.
2. Pour tout réel x, $|\cos(x) + i\sin(x)| = \sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} = 1$.

Remarques

1. Lorsque $z = a + i.0$ est un réel, le module de z coïncide avec la valeur absolue de z : $\sqrt{a^2} = |a|$ si $a \in \mathbb{R}$.
2. Il est souvent plus facile de travailler avec le module élevé au carré, puisque $|z|^2 = z.\overline{z}$ s'écrit sans racine carrée, et la conjugaison préserve les opérations.

Proposition – *Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$*, alors :*

1. $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$.

2. $|\overline{z}| = |z| = |-z|$

3. $|\text{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\text{Im}(z)| \leqslant |z|$.

4. $|z.z'| = |z|.|z'|$ *et si* $z' \neq 0$ *alors* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Théorème – Inégalité triangulaire

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a alors l'inégalité triangulaire :

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration

• Montrons $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. On a :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + \overline{z}z' + z'\overline{z'} = |z|^2 + 2\text{Re}(zz') + |z'|^2 \end{aligned}$$

Or $\text{Re}(zz') \leq |zz'|$ donc $|z + z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$.
D'où $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, les deux quantités étant positives.

• Montrons $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'|$.
En appliquant ce qui précède à $|z| = |(z + z') - z'|$, il vient :

$$|z| \leq |z + z'| + |-z'| = |z + z'| + |z'|$$

donc $|z| - |z'| \leq |z + z'|$.
De même $|z'| - |z| \leq |z' + z| = |z + z'|$, d'où $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'|$. ■

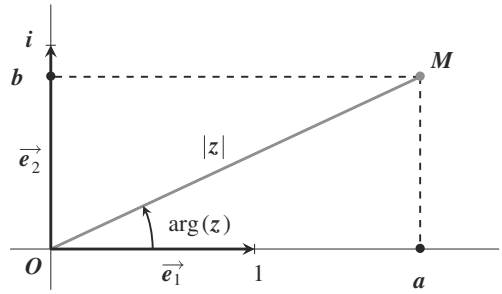
3.2 Forme trigonométrique d'un complexe

3.2.1 Argument d'un nombre complexe

Définition – Argument d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe **non nul**. Dans le plan muni du repère orthonormé usuel $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on considère le point M de coordonnées (a, b) ; z est appelé affixe de M. On appelle **argument du complexe** z, et on note $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



Remarques

1. Un argument est donc défini à $2k\pi$ près, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Le module de z est égal à la longueur OM.

Proposition – *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe* ***non nul*** *(avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) et θ un réel. Alors θ est un argument de z si et seulement si :*

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

En particulier, on a : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Méthode 1 Déterminer un argument d'un complexe

Pour trouver un argument d'un complexe non nul qui est sous forme algébrique $z = a + ib$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$), on calcule $|z|$, puis on cherche parmi les valeurs connues si on trouve un θ vérifiant $\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$.

Exemple d'application

Soit $z = -1 + i\sqrt{3}$, cherchons un argument θ de z.

Solution

Tout d'abord, calculons son module : $|z| = \sqrt{(-1)^2+3} = 2$. On cherche donc un θ vérifiant $\cos(\theta) = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ convient. Donc $\dfrac{2\pi}{3}$ est un argument de $-1 + i\sqrt{3}$.

Théorème – Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments égaux à $2k\pi$ près (pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$).

3.2.2 Notation exponentielle. Forme trigonométrique

Proposition - Définition – Exponentielle complexe
Soit θ un réel. On note : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
$e^{i\theta}$ est un complexe de module 1, θ en est un argument. De plus, tout complexe de module 1 peut se mettre sous cette forme.

Exemples

1. $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$.
2. Pour tout $(\theta, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$: $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

Les formules trigonométriques donnent :

Proposition – *Pour tous θ et θ' réels, on a $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.*

En particulier, on a :

Théorème – Formule de de Moivre
Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ c'est-à-dire :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Proposition – *Soient θ et θ' deux réels, alors :*

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}, \quad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}.$$

Proposition - Définition – Forme trigonométrique
*Soit z un nombre complexe **non nul**, ρ son module et θ un argument de z. Alors $z = \rho e^{i\theta}$, et cette forme de z est appelée forme trigonométrique (ou forme exponentielle).*

Proposition – *Si un complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors ρ est le module de z et θ en est un argument.*

Remarque – On note que la connaissance des valeurs particulières de cos et sin est primordiale pour passer de la forme algébrique à celle trigonométrique.

Exemples

1. Une forme trigonométrique de $z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, et si $\theta = \arg(z)$, on cherche θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ convient, et donc $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. Une forme trigonométrique de -2 est $2e^{i\pi}$.
3. Une forme trigonométrique de $z = 3ie^{i\frac{\pi}{3}}$: on a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Comme 3 est un réel positif, c'est bien une forme trigonométrique de z.

Proposition – *Si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ sont deux complexes non nuls sous forme trigonométrique, alors les complexes donnés par les formules suivantes le sont aussi :*

$$zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}, \quad \overline{z} = \rho e^{-i\theta}, \quad z^n = \rho^n e^{in\theta} \text{ (pour } n \in \mathbb{Z})$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – Un complexe s'écrit donc sous deux formes : forme algébrique ou forme trigonométrique. Il vaut mieux utiliser :

- la forme algébrique pour faire des sommes,
- la forme trigonométrique pour faire des produits, quotients et puissance.

Théorème – Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Définition – Linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique, c'est l'exprimer comme combinaison linéaire de $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, …, 1, $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$, ….

Méthode 2 Linéariser

Pour linéariser un produit (en particulier une puissance) de cos et/ou de sin, on remplace les cos et les sin par des exponentielles complexes à l'aide des formules d'Euler, puis on développe au maximum (notamment à l'aide de la formule du binôme de Newton), et enfin on regroupe les termes $e^{i\theta}$ avec $e^{-i\theta}$ pour réutiliser les formules d'Euler.

Exemples d'application

1. Linéarisons $\cos^3(\theta)$:

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2^3}((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 + (e^{i\theta})^3) \\ &= \frac{1}{8}(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) \\ &= \frac{1}{8}(2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)\end{aligned}$$

2. Linéarisons $\sin(x)\cos^2(x)$, pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}) \\ &= \frac{1}{8i}(e^{i3x} - e^{-i3x} + e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{8i}(2i\sin(3x) + 2i\sin(x)) \\ &= \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(x)\end{aligned}$$

Comme une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nx)$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto -\dfrac{\cos(nx)}{n}$ pour $n \neq 0$, on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\cos(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(3x)}{12} - \frac{\cos(x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}$.

3.2.3 Application aux formules trigonométriques

Cette formule permet (par exemple), connaissant $\cos(x)$, de déduire $\sin(x)$ **au signe près,** puisque $|\sin(x)| = \sqrt{1-\cos^2(x)}$. Pour déterminer complètement $\sin(x)$, il faut faire une étude de signe.

Rappelons la première formule trigonométrique :

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

On en déduit entre autres que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq 1$.

Exemples

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, donc $\left|\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right| = \sqrt{1-\frac{1}{16}(1+\sqrt{5})^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, mais comme $-\frac{\pi}{5} \in [-\pi, 0]$, $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \leq 0$, donc $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
2. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, donc

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (on a aussi l'égalité $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$).

Les formules avec les exponentielles complexes permettent de retrouver rapidement les autres formules de trigonométrie :

➜ **Les formules d'addition**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $e^{i(a+b)} = e^{ia}.e^{ib}$, or $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$ et $e^{ia}.e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a)).(\cos(b) + i\sin(b))$, donc en développant ce produit, on a :

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))$$

et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on retrouve les formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

et

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

En particulier, si $a = b$, on a les formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Remarque – En utilisant que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on peut également écrire $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.

➜ **Angle moitié et formules de transformation somme/produit**

Pour simplifier une expression du type $e^{ia} + e^{ib}$, on utilise la technique de « l'angle moitié », c'est à dire que l'on met en facteur $e^{i\frac{a+b}{2}}$:

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$$

En identifiant alors parties réelles et parties imaginaires, on obtient les formules de transformation somme/produit :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{et}$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

La même technique appliquée à $e^{ia} - e^{ib}$ permet de retrouver les formules donnant $\cos(a) - \cos(b)$ et $\sin(a) - \sin(b)$:

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et}$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

➜ **Angles à connaître :**

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3.3 Équations dans $\mathbb{C}$

3.3.1 Racines n-ièmes de l'unité

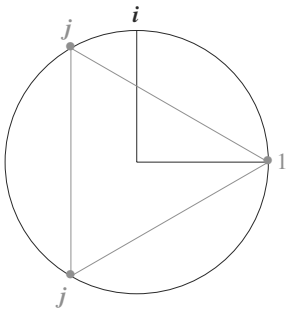
Définition – Racines n-ièmes de l'unité

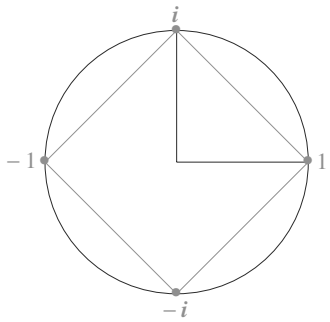
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.

Théorème – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes, ce sont les complexes de la forme $\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Exemples

1. Les racines deuxièmes de l'unité sont 1 et -1.
2. Les racines troisièmes de l'unité sont 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$.
3. Les racines quatrièmes de l'unité sont 1, i, -1 et $-i$.





Remarque – On a $\zeta_k = (\zeta_1)^k$ car $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$, $\zeta_k^{-1} = \overline{\zeta_k}$ car $1 = |\zeta_k|^2 = \zeta_k\overline{\zeta_k}$, et $\zeta_k^{-1} = \zeta_{n-k}$ car $\zeta_k\zeta_{n-k} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}e^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}} = e^{i2\pi} = 1$.

Définition – Racines *n*-ième

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième de z tout complexe Z vérifiant $Z^n = z$. Si $n = 2$, une racine deuxième s'appelle racine carrée, et si $n = 3$, une racine troisième s'appelle racine cubique.

Proposition – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$ écrit sous la forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$. Alors z admet n racines n-ièmes distinctes, ce sont les complexes de la forme*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta}{n}}\zeta_k$$

où $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
En particulier, un nombre complexe non nul $\rho e^{i\theta}$ admet deux racines carrées distinctes : $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration

Remarquons que $z_0 = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta}{n}}$ vérifie : $z_0^n = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^n\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = \rho e^{ni\frac{\theta}{n}} = \rho e^{i\theta} = z$. Puis, $Z \in \mathbb{C}$ vérifie $Z^n = z$ si et seulement si $Z^n = z_0^n$. Comme z_0 est non nul (car $\rho \neq 0$), on a $Z^n = z \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{z_0}\right)^n = \frac{Z^n}{z_0^n} = 1$, donc $Z^n = z \Leftrightarrow \frac{Z}{z_0}$ est une racine n-ième de l'unité, donc l'un des ζ_k pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. On a donc bien que $Z^n = z$ si et seulement s'il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ avec $Z = z_0\zeta_k$. ■

On ne parlera JAMAIS de **la** racine carrée d'un nombre complexe non nul : en effet, il y a deux racines carrées, et aucune des deux n'est privilégiée. Par conséquent, on n'écrira JAMAIS $\sqrt{z}$ ni $z^{\frac{1}{2}}$ lorsque z est n'est pas réel positif.
Plus généralement, si z est un complexe non réel, z^n n'a de signification que si $n \in \mathbb{Z}$: les puissances non entières ne sont pas définies pour un complexe non réel.

Exemples

1. Les racines quatrièmes de $z = -16 = 16e^{i\pi}$ sont $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = iz_0$, $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = -z_0$ et $z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = -iz_0$.
2. Déterminons un complexe z vérifiant $(1-i)z^5 = 1$: on cherche donc une racine cinquième de $\frac{1}{1-i}$. Or, $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $\frac{1}{1-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc $z = 2^{-\frac{1}{10}}e^{i\frac{\pi}{20}}$ convient (les autres valeurs sont celles obtenues en multipliant z par les racines cinquièmes de l'unité).

Remarque – L'écriture algébrique peut être utilisée pour le calcul de racines carrées.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Méthode 3 Racine carrée sous forme algébrique

Soit $z = a + ib$ un complexe (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$). Pour déterminer les racines carrées de z, on les cherche sous la forme $x + iy$, on écrit le système obtenu en identifiant partie réelle et partie imaginaire dans l'équation $a + ib = (x + iy)^2$, et on rajoute l'équation $|z| = |x + iy|^2$, autrement dit $\sqrt{a^2 + b^2} = x^2 + y^2$, au système, ce qui facilite grandement sa résolution.

Exemple d'application

Déterminons les racines carrée de $3 + 4i$.

Solution

posons $z = x + iy$ une racine carrée de $3 + 4i$, alors $z^2 = 3 + 4i$ donne $(x + iy)^2 = 3 + 4i$, soit $(x^2 - y^2) + 2ixy = 3 + 4i$. Comme $5 = |3 + 4i| = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$, on obtient le système :

$$z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Les solutions sont donc $2 + i$ et $-2 - i$ (car $2xy = 1$, donc x et y sont de même signe).

3.3.2 Équations du second degré

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ et on cherche ses éventuelles solutions complexes. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$; Δ est appelé **discriminant** de l'équation. On a donc $\Delta \in \mathbb{C}$.

Théorème

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$, et alors $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.
- Si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions distinctes $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ où δ est un nombre complexe vérifiant $\delta^2 = \Delta$. On a alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Remarque – δ est une quelconque des deux racines carrées de Δ (l'autre est $-\delta$). Attention à **ne pas** noter $\sqrt{\Delta}$ lorsque Δ n'est pas un réel positif.

Corollaire – Lorsque a, b et c sont réels, on a $\Delta \in \mathbb{R}$ et :

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles distinctes (prendre par exemple $\delta = \sqrt{\Delta}$).
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution, qui est réelle.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées et distinctes (prendre par exemple $\delta = i\sqrt{-\Delta}$).

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$: son discriminant Δ vaut $\Delta = 3^2(1+i)^2 - 4 \times 5i = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc $\delta = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i$ vérifie bien $\delta^2 = \Delta$, et donc les solutions de l'équation (E) sont :

$$\frac{-3(1+i)+(1-i)}{2} = -1 - 2i \quad \text{et} \quad \frac{-3(1+i)-(1-i)}{2} = -2 - i.$$

Synthèse

Savoirs

- La définition du module et de l'argument d'un complexe
- L'inégalité triangulaire
- Les formules trigonométriques et les angles remarquables
- Les formules liées à l'exponentielle complexe

Savoir-faire

- Mettre un complexe sous forme algébrique ou trigonométrique
- Linéariser
- Calculer les racines n-ièmes d'un complexe
- Résoudre un trinôme à coefficients complexes

Mots-clés

- Forme algébrique
- Forme trigonométrique
- Module
- Argument
- Racines n-ièmes
- Trigonométrie

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

3.1 Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} z + \overline{z} = 2 \\ \mathrm{Im}(z) = 3 \end{cases}$$

3.2 Donner la partie réelle de e^{2+3i}.

3.3 On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Utilisant une expression de $\cos(2a)$, en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3.4 Donner la partie réelle de $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{357}$. Quelle formule avez-vous utilisée ?

3.5 Dénombrer et lister les solutions de $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $(\beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2$, et z est la variable.

3.6 **Vrai ou faux ?**

1) Soit $z = x + iy$ avec x et y complexes. Alors $z = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

2) $|z + z'| = |z| + |z'|$ pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

3) $-5e^{i\frac{\pi}{3}}$ est sous forme trigonométrique.

4) Soit $z = -1$, alors $z = e^{-i3\pi}$.

5) Soit $(r, r') \in \mathbb{R}^2$ et $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$, alors $r = r'$ et $\theta = \theta'$ modulo 2π.

6) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$.

7) Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ non nul et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $e^{i\frac{p\theta}{q}} = (e^{i\theta})^{\frac{p}{q}}$.

8) $2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

9) $2\sin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

10) L'équation $z^7 = 1$ n'admet qu'une solution complexe, 1.

3.7 Où est l'erreur :

$$1 = \sqrt{1} = 1^{\frac{1}{2}} = (e^{i2\pi})^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1.$$

3.8 Soit $c \in \mathbb{C}$. Que signifie $\sqrt[4]{c}$?

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 76.

■ **Forme algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe**

3.9

Donner la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

$$(1+2i)^2 \quad (1+i)^3 \quad \frac{1}{1+3i} \quad i^{33}$$
$$i^{-11} \quad \frac{1+i}{2+i} \quad (1+i)^{-3} \quad \frac{a+i}{1-ia}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

3.10

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$4e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad 6e^{3i\pi} \quad e^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad 3e^{-i\frac{5\pi}{3}} \quad e^{-i\frac{6\pi}{4}}$$

3.11

Donner le module de :

1) $1 + i$,

2) $(3 + 2i)^5$,

3) $(-1 + i)(-3 + i)(-5 + i)$,

4) $\frac{7}{(2-i)^2}$,

5) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$,

6) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

3.12 *

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{2}{1-i} \quad \frac{-5}{\sqrt{3}+3i} \quad \frac{2i}{1+i} \quad \frac{-i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$$

3.13 ◎

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} \quad \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+3i} \quad (1-i)^3$$
$$(\sqrt{3}+i)^7 \quad \left(\frac{i}{1+i}\right)^{210} \quad 4+3i$$

(On pourra réutiliser les résultats de l'exercice précédent).

3.14 ◎

Soit $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$. Donner le module et un argument de ω. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3.15 ◎

Déterminer l'ensemble des complexes z différents de 1 tels que le nombre $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit réel.

3.16 ◎

Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $e^{ia} + e^{ib}$ pour a et b dans $[0, \pi]$.

3.17 ◎

Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $e^{ia} - e^{ib}$ pour a et b dans $[0, 2\pi]$ avec $a \geq b$.

■ Complexes de module 1

3.18 ◎

Linéariser les expressions suivantes et en déduire une primitive de la fonction associée :

$$f_1(x) = \sin^4(2x) \qquad f_2(x) = \sin(x)\cos(2x)$$

3.19 ◎

Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ les expressions suivantes : $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$.

3.20 ◎

1) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ en calculant $S_n + iT_n$.

2) De même, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

■ Racines de l'unité

3.21

On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Calculer j^2, et en déduire les relations

$$1 + j + j^2 = 0, \quad j^3 = 1, \quad \frac{1}{j} = j^2 = \overline{j}.$$

2) Mettre sous forme algébrique $(1+j)^6$. Calculer $j^{365} + j^{441} + j^{1000}$.

3.22 ◎

Soit n un entier fixé, $n \geq 2$. Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

3.23 ◎

Résoudre l'équation $(2z-1)^4 = z^4$.

■ Équations

3.24

Montrer que les solutions de $(1-2i)z^2 + 2iz - 1 = 0$ sont 1 et $\dfrac{-1-2i}{5}$.

3.25

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^3 = 4\sqrt{2}(1-i)$;

2) $z^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

3) $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

3.26

Chercher les racines n-ièmes de $1+i$ pour n entier, $n \geqslant 1$.

3.27

Résoudre $z^2 - (4+2i)z + 2 + 4i = 0$.

3.28

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (1-2i)z^2 - (1+2i)z + 2i = 0$$

sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

3.29

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées puis quatrièmes de $-3+4i$.

3.30

1) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $8-6i$. En déduire (à l'aide de la conjugaison) celles de $8+6i$.

2) Montrer que l'équation $(1-2i)z^2 + (1+i)z - i = 0$ a pour discriminant $\Delta = 8+6i$.

3) Donner les solutions de l'équation.

3.31 ◎

Résoudre $(1-i)z^3 = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{5i}$.

3.32 ◎

Soit n un entier, $n \geq 2$.

1) Quelles sont les solutions de l'équation

$$|1+iz| = |1-iz| \ ?$$

2) Montrer sans les calculer que les solutions différentes de i de l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ sont réelles.

3) Calculer les solutions de cette équation.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Indications

3.13 Pour l'argument de $4 + 3i$, il faut utiliser la fonction Arctan (voir chapitre 15 pour la définition de cette fonction).

3.14 Pour trouver le module et l'argument, mieux vaut mettre sous forme trigonométrique le numérateur et le dénominateur de ω.

Exprimer ensuite ω sous forme algébrique, puis faire le lien entre cette forme et la forme trigonométrique de ω.

3.15 Un nombre complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.

3.16 Mettre « l'angle moitié en facteur » et faire attention au signe du réel.

3.17 Mettre « l'angle moitié en facteur » et faire attention au signe du réel.

3.18 Remplacer les cos et sin à l'aide des formules d'Euler, développer tout, puis réutiliser les formules d'Euler pour refaire apparaître des cos et/ou des sin.

3.19 Utiliser la formule de de Moivre.

3.20 **1)** Reconnaître une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (de quelle raison ?), puis « mettre l'angle moitié en facteur ».

2) On introduit la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ de manière analogue à la première question, on se ramène à une formule du binôme de Newton, puis on « met l'angle moitié en facteur ».

3.22 Pour la somme, on reconnaît une somme classique.

3.23 Diviser par z^4 (en justifiant que l'on peut effectivement le faire !) pour se ramener à une équation du type $Z^4 = 1$, dont les solutions sont les racines quatrièmes de l'unité ...

3.31 Mettre les complexes $1 - i$ et $\dfrac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{5i}$ sous forme trigonométrique, et se ramener à une équation du style $z^3 = \rho e^{i\theta}$.

3.32 **1)** Élever l'égalité au carré (en justifiant pourquoi c'est équivalent), puis écrire que $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ pour tout complexe Z.

2) Prendre le module de chaque terme, et se ramener à la première question.

3) Simplifier l'égalité, pour se ramener à $Z^{n-1} = 1$, où $Z = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$ est donc une racine $(n - 1)$-ième de l'unité ...

3.1 $2 = z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z) = 3$, donc $z = 1 + 3i$.

3.2 On a $e^{2+3i} = e^2 e^{3i}$, qui est sous forme trigonométrique, donc $\mathrm{Re}(e^{2+3i}) = e^2\cos(3)$.

3.3 $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ pour tout réel a, donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$. Donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, puis $\left|\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que cos est positive sur cet intervalle, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

3.4 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la formule de de Moivre donne

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{357} = \cos(357\theta) + i\sin(357\theta),$$

donc la partie réelle de $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{357}$ est $\cos(357\theta)$.

3.5 Notons $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation n'a qu'une seule solution complexe, qui est $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

• Si $\Delta \neq 0$, soit alors $\delta \in \mathbb{C}$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$ (il en existe, on en a deux possibles, on peut prendre celui que l'on « préfère »). Alors il y a deux solutions à l'équation : $\boxed{\frac{-\beta+\delta}{2\alpha}}$ et $\boxed{\frac{-\beta-\delta}{2\alpha}}$.

3.6

1) Faux. Par exemple, si $x = i$, $y = -1$, on a bien $x + iy = 0$... C'est vrai si on suppose x et y réels !

2) Faux. On a seulement $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Par exemple $0 = |2 - 2| < 2 + 2 = 4$.

3) Faux. Le réel devant l'exponentielle complexe doit être positif. Une forme trigonométrique serait $5e^{i(\frac{\pi}{3}+\pi)} = 5e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

4) Vrai.

5) Faux. C'est vrai si on suppose r et r' positifs. Mais sinon, on a par exemple $-5e^{i\frac{\pi}{3}} = 5e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

6) Vrai.

7) FAUX ! L'expression $(e^{i\theta})^{\frac{p}{q}}$ **n'a pas de sens**. On peut juste définir la puissance entière positive d'un complexe, ou la puissance entière négative d'un complexe non nul.

8) Vrai, c'est la formule d'Euler.

9) Faux. Il manque un i dans le terme de gauche de l'égalité.

10) Faux. Il y en a sept : $e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ pour $0 \leq k \leq 6$ ($k = 0$ donne bien 1, mais ce n'est pas la seule).

3.7 L'erreur est de penser que l'on peut prendre « la » racine carrée, c'est-à-dire la puissance $\frac{1}{2}$ d'un complexe, et de plus, de supposer que les règles sur les puissances restent vraies, alors que ce n'est pas le cas.

On n'a pas le droit d'écrire $(e^{i2\pi})^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{2\pi}{2}}$, ni même $(e^{i2\pi})^{\frac{1}{2}}$.

3.8 Cette notation ne signifie rien. La fonction $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}_+$ en prolongeant par continuité en 0). Mais tout nombre complexe possède 4 racines quatrièmes définies par : les nombres z tels que $z^4 = c$.

En mathématiques, une notation n'est introduite qu'après avoir établi l'unicité de l'objet désigné : une limite par exemple. Pour $c \in \mathbb{R}_+$ on peut définir de façon unique un nombre que l'on appelle la racine quatrième de c (et que l'on note $\sqrt[4]{c}$) : c'est l'unique z vérifiant $z^4 = c$ **et** $z \in \mathbb{R}_+$ (que l'on peut aussi définir pour $c > 0$ comme étant $e^{\frac{1}{4}\ln(c)}$). Pour $c \in \mathbb{C}$ quelconque, on ne peut pas le faire.

3.9

★ $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$, donc

$$\boxed{\mathrm{Re}((1+2i)^2) = -3} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}((1+2i)^2) = 4}.$$

★ $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$, donc

$$\boxed{\mathrm{Re}((1+i)^3) = -2} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}((1+i)^3) = 2}.$$

★ $\frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{1^2-9i^2} = \frac{1-3i}{10}$, donc

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+3i}\right) = \frac{1}{10}} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+3i}\right) = -\frac{3}{10}}.$$

★ $i^4 = 1$, donc $i^{33} = i^{4\times 8+1} = (i^4)^8 i^1 = i$, donc

$$\boxed{\mathrm{Re}(i^{33}) = 0} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}(i^{33}) = 1}.$$

★ $i^{-11} = i^{-11} \times 1^3 = i^{-11} \times (i^4)^3 = i^{-11} \times i^{12} = i$, donc

$$\boxed{\mathrm{Re}(i^{-11}) = 0} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}(i^{-11}) = 1}.$$

★ $\frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3+i}{5}$, donc

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{1+i}{2+i}\right) = \frac{3}{5}} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{1+i}{2+i}\right) = \frac{1}{5}}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

★ $(1+i)^{-3} = \dfrac{1}{(1+i)^3} = \dfrac{1}{-2+2i} = \dfrac{-2-2i}{(-2+2i)(-2-2i)} = \dfrac{-2-2i}{(-2)^2+2^2} = \dfrac{-2-2i}{8}$, donc

$$\boxed{\mathrm{Re}((1+i)^3) = -\frac{1}{4}} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}((1+i)^{-3}) = -\frac{1}{4}}.$$

★ $\dfrac{a+i}{1-ia} = \dfrac{(a+i)(1+ia)}{(1-ia)(1+ia)} = \dfrac{a+ia^2+i+i^2a}{1^2-i^2a^2} = \dfrac{i(a^2+1)}{1+a^2} = i$, donc

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{a+i}{1-ia}\right) = 0} \text{ et } \boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{a+i}{1-ia}\right) = 1}.$$

3.10

★ $4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-2 + i2\sqrt{3}}$.

★ $6e^{3i\pi} = 6(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)) = 6(-1 + i.0) = \boxed{-6}$.

★ $e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

★ $3e^{-i\frac{5\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

★ $e^{-i\frac{6\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i}$.

3.11

1) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \boxed{\sqrt{2}}$.

2) $|(3+2i)^5| = |3+2i|^5 = \left(\sqrt{3^2+2^2}\right)^5 = \boxed{13^{\frac{5}{2}}}$.

3)
$$\begin{aligned}&|(-1+i)(-3+i)(-5+i)|\\ &= |-1+i| \times |-3+i| \times |-5+i|\\ &= \sqrt{(-1)^2+1^2} \times \sqrt{(-3)^2+1^2} \times \sqrt{(-5)^2+1^2}\\ &= \sqrt{2}.\sqrt{10}.\sqrt{26} = \boxed{2\sqrt{130}}.\end{aligned}$$

4) $\left|\dfrac{7}{(2-i)^2}\right| = \dfrac{|7|}{|2-i|^2} = \dfrac{7}{2^2+(-1)^2} = \boxed{\dfrac{7}{5}}$.

5) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \dfrac{1+i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2}{2} = 1$, donc $\left|\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}\right| = \boxed{1}$.

Le module d'une somme n'est pas la somme des modules, comme le prouve le calcul précédent, puisque $\left|\frac{1}{1+i}\right| = \left|\frac{1}{1-i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6)
$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n\right| &= \left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|}\right)^n\\ &= \left(\frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+1}}\right)^n = (\sqrt{2})^n = \boxed{2^{\frac{n}{2}}}\end{aligned}$$

3.12

★ $2 = \boxed{2e^{i0}}$.

★ $-5 = \boxed{5e^{i\pi}}$.

★ $2i = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$.

★ $-i = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$.

★ $|1-i| = \sqrt{2}$ et donc $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$.

★ $|\sqrt{3}+3i| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$ et donc $\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \boxed{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

★ $1+i = \overline{1-i}$, donc $1+i = \overline{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

★ $-\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}(1+i) = e^{i\pi}\sqrt{2}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{4}}}$.

3.13

★ D'après l'exercice précédent,

$$\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} &= \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\\ &= \sqrt{3}\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \boxed{\sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}}\end{aligned}$$

★ $\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\sqrt{2}+i\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+i) = \sqrt{2}.\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc

$$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+3i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

★ D'après l'exercice précédent, $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $(1-i)^3 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^3 = \boxed{2^{\frac{3}{2}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$.

★ $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$ et donc $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Par conséquent, $(\sqrt{3}+i)^7 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7 = \boxed{2^7e^{i\frac{7\pi}{6}}}$.

$\star\ 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc

$$\frac{i}{1+i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Par conséquent,

$$\left(\frac{i}{1+i}\right)^{210} = \left(2^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{210} = 2^{-105}e^{i\frac{210}{4}\pi}$$

Or, $\frac{210}{4} = 52+\frac{1}{2}$, donc $\frac{210}{4}\pi$ et $\frac{\pi}{2}$ représentent le même angle (car 52 est un entier pair), et donc

$$\left(\frac{i}{1+i}\right)^{210} = \boxed{2^{-105}e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2^{-105}i$$

$\star\ |4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, donc $4+3i = 5\left(\frac{4}{5}+i\frac{3}{5}\right)$.

Mais l'angle θ (donc l'argument de $4+3i$) qui vérifie $\cos(\theta) = \frac{4}{5}$ et $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$ n'est pas un angle usuel.

On a cependant $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$, donc $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)$ ou bien $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)+\pi$. Comme $\cos(\theta) \geq 0$ et $\sin(\theta) \geq 0$, on doit avoir $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)$.

Donc $4+3i = \boxed{5e^{i\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)}}$.

Remarque – En général, l'argument est facilement identifiable, sinon on utilise la fonction Arctan, comme dans l'exemple précédent.

3.14 $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, puis

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1^2} = 2$, puis

$$\begin{aligned} \sqrt{3}+i &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Donc

$$\omega = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Donc $\boxed{|\omega| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$, et un argument de ω est $\boxed{\frac{\pi}{12}}$. Or,

$$\omega = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

Comme $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$, en identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}+1}{4}} \text{ et } \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}-1}{4}}$$

3.15 Supposons $z \neq 1$. Un nombre complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.

Donc $\frac{z+1}{z-1}$ est réel si et seulement si

$$\frac{z+1}{z-1} = \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} &\Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}-1) = (z-1)(\bar{z}+1) \\ &\Leftrightarrow z\bar{z}-z+\bar{z}-1 = z\bar{z}+z-\bar{z}-1 \\ &\Leftrightarrow 2\bar{z} = 2z \\ &\Leftrightarrow \bar{z} = z \end{aligned}$$

Donc $\frac{z+1}{z-1}$ est réel si et seulement si z est réel (et différent de 1).

3.16 L'idée est de mettre en facteur l'angle moitié :

$$\begin{aligned} e^{ia}+e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{b-a}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \end{aligned}$$

Or $0 \leq a \leq \pi$ et $0 \leq b \leq \pi$, donc $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{a-b}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \geq 0$.

Donc, $\boxed{e^{ia}+e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}}$ est écrit sous forme trigonométrique.

3.17 On fait comme pour l'exercice précédent :

$$\begin{aligned} e^{ia}-e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{i\frac{b-a}{2}}\right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Comme $0 \leq a \leq 2\pi$, $0 \leq b \leq 2\pi$ et $a \geq b$, on a $0 \leq \dfrac{a-b}{2} \leq \pi$, donc $\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \geq 0$.

Donc, $\boxed{e^{ia} - e^{ib} = 2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b+\pi}{2}}}$ est écrit sous forme trigonométrique.

3.18

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin^4(2x) \\ &= \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4 i^4}(e^{i8x} - 4e^{i4x} + 6 - 4e^{-i4x} + e^{-i8x}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(8x) - 8\cos(4x) + 6) \\ &= \boxed{\frac{1}{8}\cos(8x) - \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{3}{8}} \end{aligned}$$

Donc, comme une primitive de $x \mapsto \cos(nx)$ est $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$ pour $n \neq 0$, on en déduit que

$$\boxed{x \mapsto \frac{\sin(8x)}{64} - \frac{\sin(4x)}{8} + \frac{3}{8}x}$$

est une primitive de f_1.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \sin(x)\cos(2x) \\ &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4i}(e^{i3x} - e^{-i3x} + e^{-ix} - e^{ix}) \\ &= \frac{1}{4i}(2i\sin(3x) + 2i\sin(-x)) \\ &= \boxed{\frac{\sin(3x) - \sin(x)}{2}} \end{aligned}$$

Donc, comme une primitive de $x \mapsto \sin(nx)$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos(nx)}{n}$ pour $n \neq 0$, on en déduit que

$$\boxed{x \mapsto -\frac{\cos(3x)}{6} + \frac{\cos(x)}{2}}$$

est une primitive de f_2.

3.19

La formule de de Moivre donne

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^3$$

Il ne reste alors plus qu'à développer le cube à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i\sin(3x) &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)i\sin(x) \\ &\quad +3\cos(x)i^2\sin^2(x) + i^3\sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ &\quad +i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)) \end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a :

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) \\ &= \boxed{4\cos^3(x) - 3\cos(x)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) \\ &= 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) \\ &= \boxed{3\sin(x) - 4\sin^3(x)} \end{aligned}$$

(en utilisant la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$).

3.20

1)
$$\begin{aligned} S_n + iT_n &= \sum_{k=0}^{n}(\cos(kx) + i\sin(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k \end{aligned}$$

On reconnait donc la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e^{ix}. Il faut donc distinguer les cas $e^{ix} = 1$ et $e^{ix} \neq 1$.

• Si $x \notin \{2p\pi, p \in \mathbb{Z}\}$, alors $e^{ix} \neq 1$, et donc :

$$\begin{aligned} S_n + iT_n &= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{1}{2}x}} \times \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}} \\ &= e^{i\frac{n}{2}x}\frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

où la troisième égalité provient d'une « mise en facteur de l'angle moitié », et la quatrième des formules d'Euler. En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a donc

$$\boxed{S_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)} \quad \text{et}$$

$$\boxed{T_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}$$

• S'il existe $p \in \mathbb{Z}$ avec $x = 2p\pi$, alors $\cos(kx) = 1$ pour tout entier k, donc $\boxed{S_n = n+1}$, et $\sin(kx) = 0$ pour tout entier k, donc $\boxed{T_n = 0}$.

2) Notons désormais

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$

Alors

$$\begin{aligned} S_n + iT_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(kx) + i\sin(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} \\ &= (1 + e^{ix})^n \text{ (binôme de Newton)} \\ &= (e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}))^n \\ &= \left(2\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)^n e^{in\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

où la quatrième égalité provient d'une « mise en facteur de l'angle moitié », et la cinquième des formules d'Euler.

Donc en identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a

$$\boxed{S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(n\frac{x}{2}\right)}$$

(et $T_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(n\frac{x}{2}\right)$).

3.21

1) $j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + i^2\frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\boxed{j^2 = \overline{j}}$.

$1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc $j^3 = e^{i2\pi} = 1$. On peut aussi le voir en remarquant que $j^3 - 1 = (j-1)(j^2 + j + 1)$ (en reconnaissant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison j) et en utilisant que $1 + j + j^2 = 0$.

$j^3 = 1$, donc $j^2 \times j = 1$, donc $j^2 = \frac{1}{j}$.

2) En utilisant que $1 + j + j^2 = 0$, on a

$$(1 + j)^6 = (-j^2)^6 = j^{12} = (j^3)^4 = 1^4 = \boxed{1}.$$

$j^{365} = j^{3\times121+2} = (j^3)^{121} j^2 = j^2$, de même on a $j^{441} = j^{3\times147} = 1$ et $j^{1000} = j^{3\times333+1} = (j^3)^{333} j = j$. Donc

$$j^{365} + j^{441} + j^{1000} = j^2 + 1 + j = \boxed{0}.$$

3.22

Notons S_n la somme et P_n le produit des racines n-ièmes de l'unité. Notons $\zeta_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $\zeta_k = \zeta^k$.

Alors $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k$. On reconnait donc la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison ζ, et comme $\zeta \neq 1$ (car $n \geq 2$), on en déduit que $S_n = \frac{1-\zeta^n}{1-\zeta}$. Or, $\zeta^n = 1$, donc $\boxed{S_n = 0}$.

$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \zeta^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \zeta^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = \boxed{(-1)^{n-1}}$.

Ici, la fraction $\frac{n(n-1)}{2}$ est un **entier** (positif), puisque soit n soit $n-1$ est pair, ce qui justifie donc la première des égalités suivantes :

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)}$$

(c'est une application de la formule de de Moivre).

3.23

Remarquons que $z = 0$ n'est pas solution, donc nous supposerons dans la suite $z \neq 0$ (ce qui permettra de diviser par z^4). Alors,

$$\begin{aligned} (2z-1)^4 = z^4 &\Leftrightarrow \frac{(2z-1)^4}{z^4} = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2z-1}{z}\right)^4 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2z-1}{z} \in \{1, -1, i, -i\} \end{aligned}$$

puisque les solutions de l'équation $X^4 = 1$ sont les racines quatrièmes de l'unité, c'est à dire 1, -1, i ou $-i$.

Notons $\zeta = \frac{2z-1}{z}$ (ζ peut donc prendre les quatres valeurs 1, -1, i ou $-i$). Alors $z\zeta = 2z - 1$, soit $z = \frac{1}{2-\zeta}$ (car $\zeta \neq 2$). Donc les quatre solutions de l'équation $(2z-1)^4 = z^4$ sont :

- $\frac{1}{2-1} = \boxed{1}$;
- $\frac{1}{2-(-1)} = \boxed{\frac{1}{3}}$;
- $\frac{1}{2-i} = \boxed{\frac{2+i}{5}}$;
- $\frac{1}{2-(-i)} = \boxed{\frac{2-i}{5}}$.

3.24

Le discriminant de $(1-2i)z^2 + 2iz - 1$ est

$$\Delta = (2i)^2 - 4(1-2i)(-1) = -8i.$$

Cherchons les racines carrées de $-8i$ sous la forme $x + iy$ avec x et y réels :

$$(x+iy)^2 = -8i \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2ixy = -8i.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Identifions partie réelle et partie imaginaire, puis écrivons l'égalité des modules : on obtient alors $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2+y^2=8 \\ 2xy=-8 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=4 \\ xy=-4 \end{cases}$. Donc $x=\pm 2$, $y=\pm 2$ et $xy=-4$, soit x et y sont de signes opposés. Donc les racines carrés de $-8i$ sont $2-2i$ et $-2+2i$.

Alors les solutions de $(1-2i)z^2+2iz-1=0$ sont

$$\frac{-2i+(2-2i)}{2(1-2i)}=\boxed{1} \text{ et}$$

$$\frac{-2i-(2-2i)}{2(1-2i)}=\frac{-1}{1-2i}=\boxed{\frac{-(1+2i)}{5}}.$$

3.25

1) $|1-i|=\sqrt{2}$, et $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc

$$4\sqrt{2}(1-i)=8e^{-i\frac{\pi}{4}}=\left(2e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^3.$$

Donc $z^3=4\sqrt{2}(1-i)$ équivaut à $z=\boxed{2e^{-i\frac{\pi}{12}}}$ ou $z=2e^{-i\frac{\pi}{12}}j=\boxed{2e^{i\frac{7\pi}{12}}}$ ou $z=2e^{-i\frac{\pi}{12}}j^2=2e^{i\frac{15\pi}{12}}=\boxed{2e^{i\frac{5\pi}{4}}}$, en notant $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, racine cubique de l'unité.

2) $z^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 \Leftrightarrow z=\boxed{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$ ou $z=-2e^{i\frac{\pi}{3}}=\boxed{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}$.

3) Posons $Z=z^3$, alors

$$z^6+z^3+1=0 \Leftrightarrow Z^2+Z+1=0.$$

C'est une équation du second degré, son discriminant vaut -3, donc les solutions sont

$$Z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } Z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Résolvons donc $z^3=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\left(e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)^3$: en notant $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (racine cubique de l'unité), les solutions sont $e^{i\frac{2\pi}{9}}$, $e^{i\frac{2\pi}{9}}j=e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{9}}j^2=e^{i\frac{14\pi}{9}}$.

Pour résoudre $z^3=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, on peut soit faire comme ci-dessus, soit utiliser les résultats précédents, puisque $e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\overline{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$:

$$z^3=\overline{e^{i\frac{2\pi}{3}}} \Leftrightarrow \overline{z^3}=\overline{\overline{e^{i\frac{2\pi}{3}}}} \Leftrightarrow \overline{z}^3=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

donc les solutions de $z^3=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sont les conjugués des solutions de $z^3=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, soit $e^{-i\frac{2\pi}{9}}$, $e^{-i\frac{8\pi}{9}}$ et $e^{-i\frac{14\pi}{9}}$.

Donc $z^6+z^3+1=0 \Leftrightarrow$
$z\in\left\{e^{-i\frac{14\pi}{9}};e^{-i\frac{8\pi}{9}};e^{-i\frac{2\pi}{9}};e^{i\frac{2\pi}{9}};e^{i\frac{8\pi}{9}};e^{i\frac{14\pi}{9}}\right\}$.

3.26

$|1+i|=\sqrt{2}$, donc $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(2^{\frac{1}{2n}}e^{i\frac{\pi}{4n}}\right)^n$, donc si l'on note $\zeta=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ (racine n-ième de l'unité), les solutions de l'équation $z^n=1+i$ sont les complexes $2^{\frac{1}{2n}}e^{i\frac{\pi}{4n}}\zeta^k=2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}=\boxed{2^{\frac{1}{2n}}e^{i\frac{(1+8k)\pi}{4n}}}$, pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$.

3.27

Notons Δ le discriminant de cette équation, alors $\Delta=(-(4+2i))^2-4(2+4i)=16+16i+4i^2-8-16i=4=2^2$, donc les solutions sont $\frac{4+2i+2}{2}=\boxed{3+i}$ et $\frac{4+2i-2}{2}=\boxed{1+i}$.

3.28

Si l'on sait qu'il existe une solution imaginaire pure, on cherche donc $z=iy$ solution avec $y\in\mathbb{R}$. En reportant dans l'équation, on a donc :

$$(iy)^3+(1-2i)(iy)^2-(1+2i)iy+2i=0$$

soit en utilisant que $i^2=-1$ et $i^3=-i$:

$$-iy^3-(1-2i)y^2-(1+2i)iy+2i=0$$

On développe tout, on regroupe les termes où l'on peut mettre i en facteur :

$$-y^2+2y+i(-y^3+2y^2-y+2)=0$$

Maintenant, on utilise le fait que y est réel, ce qui permet d'affirmer que $-y^2+2y$ et $-y^3+2y^2-y+2$ sont réels, et donc que ce sont la partie réelle et la partie imaginaire du complexe à gauche de l'égalité. Comme un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls, on a $-y^2+2y+i(-y^3+2y^2-y+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2+2y=0 \\ -y^3+2y^2-y+2=0 \end{cases}$.

La première ligne du système donne donc $y=0$ ou $y=2$. En reportant dans la deuxième ligne, on constate que 2 est solution (mais pas 0). Donc $2i$ est solution de l'équation initiale.

On peut donc écrire $z^3+(1-2i)z^2-(1+2i)z+2i=(z-2i)(az^2+bz+c)$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ à déterminer (pour une justification de cette affirmation, voir le chapitre sur les polynômes).

Or, $(z-2i)(az^2+bz+c)=az^3+(b-2ia)z^2+(c-2ib)z-2ic$, on veut donc résoudre le système

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2ia=1-2i \\ c-2ib=-1-2i \\ -2ic=2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}$$

On a donc

$$z^3+(1-2i)z^2-(1+2i)z+2i=(z-2i)(z^2+z-1).$$

Or, les solutions de $z^2+z-1=0$ se déterminent à l'aide de son discriminant $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-1) = 5$, donc ce sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Donc les solutions de l'équation sont $\boxed{2i}$, $\boxed{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

3.29 Notons $z = x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors :

$$z^2 = -3+4i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = -3+4i$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy = -3+4i.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, et en écrivant l'égalité des modules, on obtient

$$\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5 \\ 2xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \\ xy=2 \end{cases}$$

Comme $xy=2$, x et y sont de même signes. Or, $x=\pm1$ et $y=\pm2$, donc les racines carrées de $-3+4i$ sont $\boxed{1+2i}$ et $\boxed{-1-2i}$.

Cherchons maintenant les racines carrées de $1+2i$ et $-1-2i$, ce qui nous donnera les racines quatrièmes de $-3+4i$. Remarquons que

$$z^2 = -1-2i \Leftrightarrow \left(\frac{z}{i}\right)^2 = 1+2i,$$

donc une fois obtenues les racines carrées de $1+2i$, on aura celles de $-1-2i$ en multipliant par i.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2 = 1+2i \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy = 1+2i.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, et en écrivant l'égalité des modules, on obtient

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5} \\ 2xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ y^2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ xy=1 \end{cases}$$

Comme $xy=1$, x et y sont de même signes. Or, $x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ et $y=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$, donc les racines carrées de $1+2i$ sont $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Celles de $-1-2i$ sont donc $i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ et $-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Les racines quatrièmes de $-3+4i$ sont donc :

$$\boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}},\quad \boxed{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}},$$
$$\boxed{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}},\quad \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}.$$

3.30

1) Soit $x+iy$ une racine carrée de $8-6i$ (avec x et y réels). Alors

$$(x+iy)^2 = 8-6i \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy = 8-6i$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, et en écrivant l'égalité des modules, on obtient

$$\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ x^2+y^2=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10 \\ 2xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=1 \\ xy=-3 \end{cases}$$

Comme $xy=-3$, x et y sont de signes opposés. Or $x=\pm3$ et $y=\pm1$, donc les racines carrées de $8-6i$ sont $\boxed{3-i}$ et $\boxed{-3+i}$.

Puis, $z^2 = 8-6i \Leftrightarrow \bar{z}^2 = \overline{z^2} = \overline{8-6i} = 8+6i$, donc les racines carrées de $8+6i$ sont les conjugués des racines carrées de $8-6i$, donc ce sont $\boxed{3+i}$ et $\boxed{-3-i}$.

2) $\Delta = (1+i)^2 - 4(1-2i)(-i)$.
D'où $\Delta = 1+2i+i^2+4i-8i^2 = 8+6i$.

3) Comme $3+i$ est une racine carrée de $8+6i$, la formule du cours donne que les solutions cherchées sont

$$\frac{-(1+i)+(3+i)}{2(1-2i)} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5} \text{ et}$$

$$\frac{-(1+i)-(3+i)}{2(1-2i)} = \frac{-2-i}{1-2i} = \frac{(-2-i)(1+2i)}{5} = \frac{-2-4i-i+2}{5} = -i$$

3.31 Mettons les expressions sous forme trigonométrique :

★ $|1-i| = \sqrt{2}$, puis $1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

★ $|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$, puis $1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$,

★ $5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$.

L'équation s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z^3 = \frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{5e^{i\frac{\pi}{2}}} && \Leftrightarrow\\
&z^3 = \frac{4}{5\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{5\pi}{12}} && \Leftrightarrow\\
&z^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2}}{5}}e^{i\frac{5\pi}{36}}\right)^3 && \Leftrightarrow\\
&z \in \left\{\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2}}{5}}e^{i\left(\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}\right\}
\end{aligned}$$

3.32

1) Deux réels **positifs** sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont, donc

$$|1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow |1+iz|^2 = |1-iz|^2.$$

Puis, en utilisant l'écriture du module à l'aide du conjugué, on a donc $|1+iz| = |1-iz|$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (1+iz)\overline{(1+iz)} = (1-iz)\overline{(1-iz)}\\
&\Leftrightarrow (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z})\\
&\Leftrightarrow 1-i\bar{z}+iz+z\bar{z} = 1+i\bar{z}-iz+z\bar{z}\\
&\Leftrightarrow 2iz = 2i\bar{z}\\
&\Leftrightarrow z = \bar{z}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{|1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}}$.

2) i est bien sûr solution. Si $z\neq i$ (et $z\neq -i$ pour que le dénominateur soit non nul), alors si on a $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+iz}{1-iz}$, il faut en particulier que les modules des deux expressions soient égaux, donc $\left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right| = \left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|$.

Les propriétés du module donnent alors

$$\frac{|1+iz|^n}{|1-iz|^n} = \frac{|1+iz|}{|1-iz|},$$

soit $|1+iz|^n|1-iz| = |1-iz|^n|1+iz|$. Comme $1+iz$ et $1-iz$ sont non nuls (car $z\neq i$ et $-i$), on peut simplifier et obtenir $|1+iz|^{n-1} = |1-iz|^{n-1}$.

Puis, deux réels **positifs** sont égaux si et seulement si leurs puissances $(n-1)$-ième le sont, et donc on obtient $|1+iz| = |1-iz|$, ce qui implique d'après la première question que z est réel.

3) $z = i$ est solution. On supposera maintenant que $z\neq i$. Alors $\frac{1+iz}{1-iz}\neq 0$, et on peut donc simplifier :

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+iz}{1-iz} \Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{n-1} = 1$$

Or, cette écriture revient à dire que $\frac{1+iz}{1-iz}$ est une racine $n-1$-ième de l'unité.

Notons $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n-1}}$, alors

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+iz}{1-iz} \Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-2]\!]\,|\,\frac{1+iz}{1-iz} = \zeta^k$$

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{1+iz}{1-iz} = \zeta^k &\Leftrightarrow 1+iz = (1-iz)\zeta^k\\
&\Leftrightarrow iz(1+\zeta^k) = \zeta^k - 1
\end{aligned}$$

Donc hormis i, les solutions cherchées sont les complexes $\frac{\zeta^k-1}{i(\zeta^k+1)}$ pour $k\in[\![0,n-2]\!]$ avec $\zeta^k\neq -1$ (si $\zeta^k=-1$, l'équation devient $0=-2$, donc un tel k est à rejeter). Transformons l'écriture en mettant « l'angle moitié en facteur » :

$$\begin{aligned}
z = \frac{\zeta^k-1}{i(\zeta^k+1)} &\Leftrightarrow z = -i\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n-1}}-1}{e^{i\frac{2k\pi}{n-1}}+1}\\
&\Leftrightarrow z = -i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n-1}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n-1}}-e^{-i\frac{k\pi}{n-1}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n-1}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n-1}}+e^{-i\frac{k\pi}{n-1}}\right)}\\
&\Leftrightarrow z = -i\frac{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}\\
&\Leftrightarrow z = \tan\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation initiale sont $\boxed{i}$ et $\boxed{\tan\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}$ pour $k\in[\![0,n-2]\!]$ avec $2k\neq n-1$ ($2k\neq n-1$ permet d'assurer que $\zeta^k\neq -1$).

Polynômes réels ou complexes

CHAPITRE 4

Plan

4.1 Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ 85
4.2 Division euclidienne de polynômes 92
4.3 Dérivées successives 95
4.4 Racines d'un polynôme 97
Synthèse 105
Tests et exercices 106
Corrigés des exercices 110

Introduction

Nous introduisons dans ce chapitre la notion de polynôme, et les propriétés qui y sont rattachées. Un aspect fondamental sera la recherche de racines d'un polynôme (et les propriétés associées, notamment la factorisation). Mais l'ensemble des polynômes (et ses propriétés) nous intéressera aussi, surtout pour les chapitres sur l'algèbre linéaire, puisqu'il sera un exemple intéressant (et souvent étudié) d'espace vectoriel.

Au cours de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera aussi bien $\mathbb{R}$ que $\mathbb{C}$. Les démonstrations proposées seront généralement faites dans le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), mais peuvent s'adapter au cas complexe.

Prérequis

- Les nombres complexes, racines n-ièmes d'un complexe
- Les notions élémentaires sur les fonctions réelles d'une variable réelle

Objectifs

- Calculer le degré d'un polynôme
- Calculer le reste d'une division euclidienne
- Factoriser un polynôme

4.1 Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

4.1.1 Définition

Définition – Polynôme

Un **polynôme**, ou **fonction polynomiale**, à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une application $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe un entier n et des nombres $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Les nombres a_k sont appelés **coefficients** du polynôme P.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Un **monôme** est un polynôme de la forme $x \in \mathbb{K} \mapsto ax^k \in \mathbb{K}$ pour $(k, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{K}$.

Évaluer le polynôme P en un point $x \in \mathbb{K}$ consiste à donner la valeur de $P(x)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Il ne faut pas confondre nombres et applications : x et $P(x)$ désignent des nombres, X et P désignent des applications !

Remarques

1. Un polynôme P est entièrement déterminé par la liste de ses coefficients, c'est pourquoi on représente souvent $P : x \in \mathbb{K} \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{K}$ par l'écriture $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec la convention d'écriture $X^0 = 1$ et $X^1 = X$).
 X^k représente donc l'application $x \in \mathbb{K} \mapsto x^k \in \mathbb{K}$, pour tout entier k.
2. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ un polynôme, alors pour tout entier $N \geq n$, on peut écrire $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + 0.X^{n+1} + \cdots + 0.X^N$.

Remarque – Le polynôme P est parfois noté $P(X)$. X étant l'application identité de $\mathbb{K}$, il faut comprendre $P(X)$ comme étant la composée $P \circ X$, qui vaut bien P. P et $P(X)$ représentent donc effectivement la même application.

Proposition – Unicité des coefficients
Les coefficients d'une fonction polynomiale sont définis de façon unique, c'est-à-dire : si P est un polynôme tel qu'il existe deux entiers n et p ($n \leq p$), $n+1$ coefficients $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $p+1$ coefficients $(b_0, \ldots, b_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$$

alors tous les coefficients sont égaux (nuls à partir du rang n) :

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n,\ 0 = b_{n+1},\ \ldots,\ 0 = b_p$$

En particulier, si pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $P(x) = 0$, alors tous les coefficients de P sont nuls.

Démonstration
Montrons dans un premier temps le fait que si le polynôme P est la fonction nulle, alors tous ses coefficients sont nuls. Nous en déduirons ensuite la proposition.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$. Si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec un coefficient a_k non nul, notons alors a_q celui d'indice q le plus petit qui soit non nul. Donc $P = a_q X^q + a_{q+1} X^{q+1} + \cdots + a_n X^n$. Alors, pour $x \neq 0$, on a $0 = \dfrac{P(x)}{x^q} = a_q + a_{q+1} x + \cdots + a_n x^{n-q}$. Si on fait tendre x vers 0, on a $0 = a_q$, ce qui donne une contradiction. Donc tous les coefficients de P sont bien nuls.
2. Revenons au cas général : supposons que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ avec $n \leq p$. En posant $a_{n+1} = \cdots = a_p = 0$ (si $n < p$), on a alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$. Alors l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{p} (a_k - b_k) x^k = 0 \in \mathbb{R}$ est l'application nulle, donc d'après ce qui précède, on a pour $0 \leq k \leq p$, $a_k - b_k = 0$. ■

Remarques

1. On appelle **polynôme nul** la fonction constante égale à 0, c'est donc le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On le notera encore 0.
2. Par définition (de l'égalité de deux fonctions), deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ sont égaux (ce que l'on note $P = Q$) si et seulement pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$. La proposition précédente montre que $P = Q$ si et seulement si tous les coefficients sont égaux, c'est à dire : pour tout entier k, $a_k = b_k$.

4.1.2 Opérations sur les polynômes

Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous pouvons définir la somme, le produit et la composée de f et g (voir chapitres 14 et 16). Si de plus f est dérivable, on définit sa fonction dérivée. Lorsque f et g sont des fonctions polynomiales :

Proposition – *La somme, le produit et la composée de deux fonctions polynomiales est une fonction polynomiale. De même, toute fonction polynomiale est dérivable et sa dérivée est une fonction polynomiale.*

Remarque – On sait aussi comment diviser deux fonctions réelles (quand celle au dénominateur ne s'annule pas !), mais si on divise deux fonctions polynomiales, on n'a pas toujours comme résultat une fonction polynomiale.

Les coefficients de la dérivée d'un polynôme, de la somme et du produit de deux polynôme se déduisent des coefficients des polynômes :

Proposition – *Soient $n \in \mathbb{N}$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Somme : $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$.*
2. *Produit par λ : $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$.*
3. *Produit : $P \times Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.*
4. *Dérivée : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1}$.*

Remarques

1. Le produit provient de la relation $X^k \times X^\ell = X^{k+\ell}$ (et de la formule de distributivité par rapport à l'addition).
2. Les deux opérations d'addition et de mulplication par un élément de $\mathbb{K}$ font de $\mathbb{K}[X]$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (voir le chapitre 6).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

4.1.3 Degré d'un polynôme

Définition – Degré d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ **non nul**, de coefficients $(a_0, a_1, \dots)$. On appelle **degré** du polynôme P le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$, et on le note $\deg(P)$ (ou $d^\circ P$). On peut alors écrire

$$P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k \text{ et } a_{\deg(P)} \neq 0.$$

Définition – Coefficient et terme dominant

Le **coefficient dominant** d'un polynôme non nul est le coefficient du terme de plus haut degré. Si P est de degré n (donc n entier) : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $a_n \neq 0$), son coefficient dominant est a_n. Le **terme dominant** (ou monôme dominant) de P est $a_n X^n$.
Un polynôme est **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Remarque – Par convention, on pose $\deg(0) = -\infty$ (ce que l'on fera dans ce cours).
Pour les règles sur les degrés qui vont suivre, on conviendra que pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ et $\max(a, -\infty) = a$.

Exemples

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Le degré du monôme aX^k est k si $a \neq 0$, $-\infty$ si $a = 0$.
2. Les polynômes constants sont de degré 0, sauf le polynôme nul, qui est de degré $-\infty$. Ainsi, $\deg(3) = 0$, mais $\deg(0) = -\infty$.
3. $P = -2X^2 + 3X^5 + 1$ a pour degré $\deg(P) = 5$, pour coefficient dominant 3, et donc pour terme dominant $3X^5$.
4. Soit $P = X^5 + 4X^3 - X^5$ alors $\deg(P) = 3$ et son coefficient dominant est 4.
5. Si $P = 3X^3 + 2X - 1$ et $Q = 3\left(X + X^3\right)$, P et Q sont de degré 3, mais $P - Q = -X - 1$ est de degré 1,
6. Si $P = 1 + X^2$ et $Q = X + 2X^5$, P est de degré 2, Q de degré 5 et le produit $P \times Q = X + X^3 + 2X^5 + 2X^7$ est de degré 7, somme des degrés de P et Q.

Lorsque l'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on ne peut pas dire que P est de degré n mais seulement que $\deg(P) \leq n$. De plus $\deg(P) = n$ si et seulement si $a_n \neq 0$.

Exemple

Soit $P = \sum_{k=0}^{7} \frac{1 + (-1)^k}{2} X^k$. D'après l'écriture de P, $\deg(P) \leq 7$. Nous pouvons simplifier :

$$\frac{1 + (-1)^k}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est un entier pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

$$\text{donc } P = 1 + X^2 + X^4 + X^6$$

c'est à dire $\deg(P) = 6 < 7$.

Proposition – *Soit* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$*, alors*

1. *Le degré de la somme est inférieur ou égal au maximum des degrés :*

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

Il y a égalité si et seulement si (*a*) *ou* (*b*) *est réalisé :*

(a) P et Q sont de degrés distincts : $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

(b) P et Q ont même degré et la somme des coefficients dominants est non nulle.

2. $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{K}$ ***non nul****. Si* λ *est nul,* $\deg(\lambda P) = -\infty$.
On a donc toujours $\deg(\lambda P) \leq \deg(P)$.
3. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ *et si P et Q sont non nuls, le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et Q.*
4. $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$ *est toujours vrai.*
Lorsque $\deg(P) \geq 1$*, alors il y a égalité :* $\deg(P') = \deg(P) - 1$*, mais lorsque P est constant,* $P' = 0$ *et* $\deg(P') = -\infty$.

Démonstration

Si P ou Q est nul, la convention $\deg(0) = -\infty$ donne la proposition.

On suppose donc P et Q non nuls. Notons $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$ (ce sont donc des entiers), alors on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $b_q \neq 0$. Notons $n = \max(\deg(P), \deg(Q)) = \max(p, q)$.

1. Supposons $p > q$ (le cas $p < q$ se ferait de même), alors $n = p$ et $P + Q = \sum_{k=0}^{q}(a_k + b_k)X^k + \sum_{k=q+1}^{p} a_k X^k$, et donc $\deg(P+Q) \leq p$, mais comme le coefficient de X^p dans $P + Q$ est $a_p \neq 0$, on a bien que $\deg(P+Q) = p = n = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

 Supposons $p = q$, alors $n = p = q$, et donc on a $P + Q = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)X^k$. Une telle écriture donne bien que $\deg(P+Q) \leq n$, et de plus, $\deg(P+Q) < n$ si et seulement si le coefficient de X^n dans $P + Q$, qui est $a_n + b_n$, est nul.

2. Par définition, $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$, et comme $\lambda a_p \neq 0$ puisque $\lambda \neq 0$ et $a_p \neq 0$, on a $\deg(\lambda P) = p = \deg(P)$. Si $\lambda = 0$, $\lambda P = 0$ et donc $\deg(\lambda P) = -\infty$.

3. En posant $a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$ et $b_{q+1} = \cdots = b_n = 0$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, et donc $P \times Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. Si $j \leq p$ et $k - j \leq q$ alors $k \leq p + q$. Donc, pour $k > p + q$, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, on a $j > p$ (et donc $a_j = 0$) ou $k - j > q$ (et donc $b_{k-j} = 0$), et donc $c_k = 0$ (c'est une addition de termes nuls). Par conséquent, $\deg(P \times Q) \leq p + q$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Or, $c_{p+q} = \sum_{j=0}^{p+q} a_j b_{p+q-j}$, mais si $j \geq p+1$ alors $a_j = 0$, et si $j \leq p-1$ alors $p+q-j \geq q+1$ donc $b_{p+q-j} = 0$. Donc $c_{p+q} = a_p b_{p+q-p} = a_p b_q$, et $c_{p+q} \neq 0$ car $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Cela donne bien que $\deg(P \times Q) = p+q$ et que le coefficient dominant c_{p+q} de PQ est le produit des coefficients dominants de P et Q.

4. On a $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$. Alors $P' = \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1}$, donc est bien de degré au plus $p-1$, et est de degré $p-1$ si et seulement si $pa_p \neq 0$ (pa_p est le coefficient de X^{p-1}), donc si et seulement si $p \neq 0$. ■

Corollaire – Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors $P \times Q = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$.

Démonstration

Si P et Q ne sont pas nuls, alors $\deg(P)$ et $\deg(Q)$ sont des entiers, et donc $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ est un entier, donc $P \times Q$ est non nul.

La réciproque (P ou Q nul implique $P \times Q$ nul) est immédiate. ■

Corollaire – Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ avec R différent du polynôme nul, alors $PR = QR \Rightarrow P = Q$.

Démonstration

Si on a $PR = QR$, alors $(P-Q)R = 0$, et donc le corollaire précédent donne $P - Q = 0$ ou $R = 0$. Mais comme $R \neq 0$, il ne reste que $P - Q = 0$, donc $P = Q$. ■

En procédant à une récurrence à partir de la formule sur le degré d'une somme ou d'un produit de deux polynômes, on obtient :

Proposition

1. *Pour* $(P_k)_{1 \leq k \leq N} \in \mathbb{K}[X]^N$, *on a* $\deg\left(\sum_{k=1}^{N} P_k\right) \leq \max_{1 \leq k \leq N} (\deg(P_k))$.
2. *Pour* $(P_k)_{1 \leq k \leq N} \in \mathbb{K}[X]^N$, *on a* $\deg\left(\prod_{k=1}^{N} P_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \deg(P_k)$. *En particulier, si* $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P^n) = n \deg(P)$.

Proposition – *Soit* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, Q *non constant. Alors on a l'égalité* $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Démonstration

Supposons P non nul, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $p = \deg(P)$.

Alors pour tout entier $k \in [\![0, p]\!]$, $\deg(a_k Q^k) \leq \deg(Q^k)$ et $\deg(Q^k) = k \deg(Q)$, donc $\deg(a_k Q^k) \leq k \deg(Q)$. Par conséquent,

$$\deg\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k Q^k\right) \leq \max_{1 \leq k \leq p-1} \deg(a_k Q^k) \leq \max_{1 \leq k \leq p-1} k \deg(Q) = (p-1)\deg(Q)$$

et $\deg(a_pQ^p) = \deg(Q^p)$ (car $a_p \neq 0$), et donc $\deg(a_pQ^p) = p\deg(Q)$.
Comme $\deg(Q) \geq 1$ (car Q est non constant), alors $(p-1)\deg(Q) < p\deg(Q)$, donc $\deg\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_kQ^k\right) < \deg(a_pQ^p)$, par conséquent, la règle du degré de l'addition de deux polynômes de degrés différents donne que

$$\begin{aligned}\deg(P\circ Q) &= \deg\left(\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_kQ^k\right) + a_pQ^p\right)\\ &= \max\left(\deg\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_kQ^k\right), \deg(a_pQ^p)\right)\\ &= \deg(a_pQ^p) = p\deg(Q) = \deg(P)\deg(Q)\end{aligned}$$

Si $P = 0$, alors $P \circ Q = 0$, donc l'égalité des degrés reste vrai. ■

Définition – L'espace $\mathbb{K}_n[X]$

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. C'est donc l'ensemble de tous les polynômes de la forme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ avec $a_0, \ldots, a_n$ éléments quelconques de $\mathbb{K}$.

Remarques

1. Par identification entre le polynôme constant $P = a$ et le nombre a lui-même, on peut écrire $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$.
2. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ apparaît très souvent dans les exercices d'algèbre linéaire. La proposition sur les degrés montre en particulier que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (voir chapitre 6) et que si $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, alors $P' \in \mathbb{K}_n[X]$.

Méthode 1 Majorer le degré d'un polynôme

Pour majorer le degré d'un polynôme Q, qui s'exprime à partir d'un autre polynôme P dont le degré est connu,

- on utilise en priorité les propriétés sur le degré ;
- sinon, on écrit $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_kX^k$, et on essaie de déterminer le degré de Q, en exprimant Q à l'aide des coefficients de P, et en utilisant que $a_{\deg(P)} \neq 0$.

Exemple d'application 1

Montrons que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $Q = P(X+1) - XP' \in \mathbb{R}_n[X]$.

Solution

D'abord, par opérations usuelles sur les polynômes réels, Q est bien un polynôme réel.
Puis, les résultats de la proposition sur les degrés donnent

- $\deg(Q) \leq \max\big(\deg(P(X+1)), \deg(XP')\big)$,
- $\deg(P(X+1)) = \deg(P) \times \deg(X+1) = \deg(P)$,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

- $\deg(XP') = \deg(X) + \deg(P') = 1 + \deg(P') \leq \deg(P)$.

Et donc $\deg(Q) \leq \deg(P)$. Donc, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exemple d'application 2

Montrons que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $Q = X^2P' - 2XP \in \mathbb{R}_2[X]$.

Solution

D'abord, par opérations usuelles sur les polynômes réels, Q est bien un polynôme réel.

Si on utilise les propriétés sur le degré, on a seulement

- $\deg(X^2P') = 2 + \deg(P') \leq 1 + \deg(P)$,
- $\deg(-2XP) = \deg(-2X) + \deg(P) = 1 + \deg(P)$,
- $\deg(Q) \leq \max(\deg(X^2P'), \deg(-2XP))$, donc $\deg(Q) \leq 1 + \deg(P)$.

Mais si P est de degré 2, cela prouve juste que $\deg(Q) \leq 3$, ce qui est insuffisant.

Par contre, en écrivant P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$, on a $Q = X^2(2aX + b) - 2X(aX^2 + bX + c) = -bX^2 - 2cX$, donc $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

4.2 Division euclidienne de polynômes

4.2.1 Division euclidienne des polynômes

Théorème – Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$\begin{cases} A = BQ + R \text{ avec} \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Q est appelé le **quotient** de la division euclidienne de A par B, et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Démonstration

- Montrons l'unicité : supposons qu'il existe deux couples $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ qui vérifient $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ avec $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$.

 Alors, $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$, et si $Q_1 \neq Q_2$, $Q_1 - Q_2$ est un polynôme non nul, donc avec un degré entier, et donc $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \geq \deg(B)$.

 Mais, $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(-R_2)) < \deg(B)$ par hypothèse sur les degrés de R_1 et R_2, ce qui aboutit à une contradiction. Donc $Q_1 = Q_2$, et en reportant, on a $R_2 - R_1 = 0$, donc $R_2 = R_1$, ce qui démontrer bien l'unicité d'un couple vérifiant la conclusion du théorème.
- L'existence se montre par récurrence sur le degré de A, par un procédé algorithmique. Plutôt que de rédiger la démonstration dans le cas général, nous expliciterons l'algorithme sur un cas particulier dans l'exemple qui suit. ■

Exemple

Réalisons la division euclidienne de $A = X^4 + 1$ par $B = X^2 + X + 1$.

Le mécanisme est le même que celui pour les divisions d'entiers : on regarde par quel monôme on doit multiplier B pour que le résultat donne un polynôme ayant le même terme dominant que A, on fait la soustraction (ce qui nous donne un « nouveau polynôme A », de degré plus petit que l'ancien) et on recommence tant que le degré de la différence est supérieur ou égal au degré de B.

Ainsi, il faut multiplier B par X^2 pour que X^2B ait effectivement le même terme dominant que A. On soustrait : $A - X^2B = -X^3 - X^2 + 1$, puis il faut multiplier B par $-X$ pour qu'il ait le même terme dominant que $(A - X^2B)$. Cela donne en soustrayant : $(A - X^2B) - (-XB) = X + 1$. On constate que $X + 1$ est de degré plus petit que celui de B et la division est terminée. On réécrit donc l'égalité $(A - X^2B) - (-XB) = X + 1$ en $A = (X^2 - X)B + X + 1$.

On le présente ainsi :

$$\begin{array}{rl|l} X^4 & +1 & X^2+X+1 \\ \hline -(X^4+X^3+X^2) & & X^2-X \\ \hline -X^3-X^2 & +1 & \\ -(-X^3-X^2-X) & & \\ \hline X & +1 & \end{array}$$

Donc

$$X^4 + 1 = \left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - X\right) + (X + 1)$$

Le quotient de la division euclidienne de $A = X^4 + 1$ par $B = X^2 + X + 1$ est donc $Q = X^2 - X$, le reste $R = X + 1$.

Proposition – *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$.*

Démonstration

Ecrivons la division euclidienne de P par $X - a$: il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = (X - a)Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(X - a) = 1$. Donc $\deg(R) = 0$, auquel cas $R \in \mathbb{K}^*$, ou $\deg(R) = -\infty$, auquel cas $R = 0$. Dans les deux cas, $R \in \mathbb{K}$. Puis, évaluons $P = (X - a)Q + R$ en a : puisque $X - a$ évalué en a donne $a - a = 0$, on en déduit que $P(a) = R(a)$. Comme R est constant, $R(a) = R$, ce qui donne bien $R = P(a)$. ■

Exemples

1. Soit $P = 3X^5 - 2X^3 + X^2 - 1$, alors le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$ est $P(1) = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, cherchons le reste R de la division euclidienne de $A = X^n$ par $B = (X - 1)(X - 2)$.

 Comme il faut $\deg(R) < \deg(B)$, on a $\deg(R) < 2$, donc $R \in \mathbb{R}_1[X]$, donc $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $R = aX + b$, et il faut déterminer a et b. On sait qu'il existe un polynôme Q avec $X^n = BQ + R = (X - 1)(X - 2)Q + aX + b$.

 Evaluons cette égalité. On a deux inconnues (a et b), on a donc besoin de deux équations. Si on évalue en $x \in \mathbb{R}$, on a $x^n = (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$. Pour éliminer le problème de la valeur de $Q(x)$ qui est inconnue, on va évaluer en $x = 1$ et $x = 2$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On a alors $1^n = 0+a+b$ et $2^n = 0+2a+b$, donc $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{cases}$, d'où $\begin{cases} a=2^n-1 \\ b=2-2^n \end{cases}$.
Donc le reste vaut $R = (2^n-1)X + 2 - 2^n$.

4.2.2 Polynôme irréductible

Définition – Diviseur/Multiple

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on dit que ***A* est divisible par *B*** si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul, c'est à dire s'il existe un polynôme (alors unique) Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On dit aussi que ***B* divise *A***, ou que ***A* est un multiple de *B***.

Exemples

1. $X-1$ et $X+1$ divisent X^2-1 car $X^2-1 = (X-1)(X+1)$.
2. Plus généralement, $X-1$ divise X^n-1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et
$$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1)$$
3. Si B divise A alors λB divise A pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
4. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, les polynômes de la forme λ ou λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ divisent P.

Définition – Polynôme irréductible

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ s'il est non constant et si les seuls polynômes qui le divisent sont les polynômes constants et les polynômes λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Remarques

1. Caractérisation des polynômes qui ne sont pas irréductibles : un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement s'il se décompose : $P = P_1P_2$ où P_1 et P_2 sont des polynômes de degré au moins 1.
2. Différence entre irréductibilité dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$: un polynôme à coefficient réel peut être irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$. Lorsque l'on écrit qu'un polynôme est irréductible, il convient donc de préciser dans quel ensemble $\mathbb{K}[X]$ il est irréductible.

Exemples

1. X^2-1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (ni dans $\mathbb{C}[X]$) puisque l'on a : $X^2-1 = (X-1)(X+1)$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{K}$, $X-a$ est irréductible.
3. X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ mais pas sur $\mathbb{C}[X]$ car $X^2+1 = (X-i)(X+i)$.
Montrons que X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$: si ce n'est pas le cas, il existe $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $X^2+1 = P_1 \times P_2$ et $\deg(P_1) \geq 1$, $\deg(P_2) \geq 1$.
Comme $\deg(X^2+1) = 2$, nécessairement $\deg(P_1) = 1$ (et $\deg(P_2) = 1$), et donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $P_1 = aX + b$ et $a \neq 0$. Mais alors, on aurait $P_1\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$, et donc $\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 + 1 = P_1\left(-\dfrac{b}{a}\right)P_2\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$, mais $-\dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible !

4.3 Dérivées successives

Toutes les formules de dérivation du chapitre 16 sur les dérivées de fonctions réelles (dérivée d'une somme, d'un produit, formule de Leibniz ...) restent valables pour les polynômes.

4.3.1 Définition

Définition – Dérivée *n*-ième d'un polynôme

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la **dérivée *n*-ième** de P, que l'on note $P^{(n)}$, par :

$$\begin{cases} & P^{(0)} = P \\ & P^{(1)} = P' \\ \forall n \in \mathbb{N} & P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)' \quad \text{(polynôme dérivé de } P^{(n)}\text{)} \end{cases}$$

Exemples

1. Les polynômes dérivés successifs de $P = X^5 - 2X^3 + X - 1$ sont : $P' = 5X^4 - 6X^2 + 1$, $P'' = P^{(2)} = 20X^3 - 12X$, $P''' = P^{(3)} = 60X^2 - 12$, $P^{(4)} = 120X$, $P^{(5)} = 120$ et $P^{(k)} = 0$ pour $k \geq 6$.
2. Si n et k sont deux entiers naturels, on a, par récurrence sur k, que

$$(X^n)^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

En particulier, $(X^n)^{(n)} = n!$ est un polynôme constant.

Proposition – *Soit P et Q deux polynômes, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors pour tout entier n, $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$.*

Remarques

1. On a aussi pour tout entier naturel n, $P^{(n+1)} = \left(P'\right)^{(n)}$.
2. Avec le vocabulaire du chapitre 7, le résultat précédent affirme juste que l'application de dérivation n-ième est linéaire, ce qui est vrai, car c'est la composée n-ième de l'application dérivation, qui elle est linéaire.

Remarque – En particulier, si on dérive un polynôme plus de fois que son degré, on trouve 0.

Proposition – *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, alors*

- *si $j \leq n$, $P^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1)\dots(k-j+1)X^{k-j} = \sum_{k=j}^{n} a_k \dfrac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}$,*
- *et si $j > n$, alors $P^{(j)} = 0$.*

Démonstration

Il suffit d'appliquer le résultat précédent et l'exemple précédent :

$$P^{(j)} = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k)^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j} \qquad \blacksquare$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

4.3.2 Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème – Formule de Taylor
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, pour tout $a \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} P &= P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \end{aligned}$$

Démonstration
Commençons par prouver le résultat pour $a = 0$: soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour un entier naturel n et des scalaires $a_k \in \mathbb{K}$. Soit $j \in [\![0, n]\!]$, alors $P^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1)\dots(k-j+1)X^{k-j}$, et donc en évaluant en $X = 0$, on obtient $P^{(j)}(0) = j!a_j$ (le terme $k = j$ dans la somme, car $0^0 = 1$), soit $a_j = \dfrac{P^{(j)}(0)}{j!}$. Donc on a bien $P = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$.
Prenons désormais a quelconque dans $\mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors en posant $Q = P(X+a)$, on obtient que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{Q^{(k)}(0)}{k!}X^k$. Or, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(a)$, donc $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k$. En composant par $X - a$, on obtient la formule voulue. ■

Remarques

1. Le cas $a = 0$: si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $P = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$.
2. Pour tout $k > \deg(P)$, $P^{(k)}(a) = 0$, donc $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
3. Pour $\ell \leq n$, cette formule se réécrit

$$P = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k + (X-a)^\ell \sum_{k=\ell}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-\ell},$$

et comme $\deg\left(\sum_{k=0}^{\ell-1} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k\right) \leq \ell - 1 < \deg\left((X-a)^\ell\right)$, on reconnait l'écriture de la **division euclidienne de P par** $(X-a)^\ell$: le reste est $\sum_{k=0}^{\ell-1} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$, le quotient $\sum_{k=\ell}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-\ell}$.

Exemple
Le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $P(1) + P'(1)(X-1)$.

4.4 Racines d'un polynôme

4.4.1 Définition

Définition – Racine d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a **est racine de** P si $P(a) = 0$.

Exemples

1. Le polynôme nul admet tout élément de $\mathbb{K}$ comme racine. Il admet donc une infinité de racines.
2. Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ alors $P = \alpha$ n'admet aucune racine.
3. $P = X - a$ admet a pour unique racine.
4. $X^2 + 1$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ et admet i et $-i$ pour racines dans $\mathbb{C}$.

Remarque – Les racines d'un polynôme de degré 2 se déterminent à l'aide du discriminant (voir le chapitre 3 pour ce rappel). Néanmoins, avant de calculer le discriminant, il peut être judicieux de chercher des racines évidentes.
Posons par exemple $P = 2X^2 + 2X$, alors en factorisant, on a $P = 2X(X + 1)$, donc les racines de P sont 0 et -1 (car un produit est nul si et seulement si l'un de ses termes est nul).

Théorème – a est racine de P si et seulement si $X - a$ divise P, c'est à dire si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$. Le polynôme Q est alors unique.

Démonstration
C'est une conséquence directe du calcul du reste de la division euclidienne de P par $X - a$ fait précédemment. ■

4.4.2 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition – Ordre de multiplicité d'une racine

Soit P un polynôme non nul. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une **racine d'ordre** k **de** P si et seulement si $(X - a)^k$ divise P et $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P, c'est à dire si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$ (et alors Q est unique).
k est alors appelé **l'ordre de multiplicité de la racine** a.

Remarques

1. Si $k = 1$, on dit que a est racine **simple** de P, et si $k = 2$ on parle de racine **double**.
2. Si P est non nul et vérifie qu'il existe un polynôme Q avec $P = (X - a)^k Q$, on a $\deg(P) = \deg\left((X - a)^k\right) + \deg(Q) \geq k$. Donc il va bien exister un plus grand entier k tel que $(X - a)^k$ divise P, ce qui justifie que la notion de multiplicité d'une racine est bien définie, et de plus que toute racine est de multiplicité inférieure ou égale au degré de P.
3. Si P est nul, on dira que tout nombre de $\mathbb{K}$ est racine d'ordre infini.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Soit $P = 4(X-1)^2(X-2)(X+1)^4$ alors 1 est racine double de P, 2 est racine simple et -1 est racine d'ordre 4.

Théorème – Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors a est racine d'ordre k de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

Démonstration

Supposons $P \in \mathbb{K}_n[X]$. La formule de Taylor appliquée à P donne que le reste de la division de P par $(X-a)^k$ vaut $R = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{P^{(\ell)}(a)}{\ell!}(X-a)^\ell$ et le quotient vaut $Q = \sum_{\ell=k}^{n} \frac{P^{(\ell)}(a)}{\ell!}(X-a)^{\ell-k}$.

Donc a est racine d'ordre k de P si et seulement si $R = 0$ et $Q(a) \neq 0$. $Q(a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$, et $R = 0$ si et seulement si $R(X+a) = 0$, donc si et seulement si $\sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{P^{(\ell)}(a)}{\ell!}X^\ell = 0$, ce qui revient bien à $\frac{P^{(\ell)}(a)}{\ell!} = 0$, donc à $P^{(\ell)}(a) = 0$, pour tout $\ell \leq k-1$. ■

Remarques

1. Si $k \geq 2$ et a racine d'ordre k de P, alors a est racine d'ordre $(k-1)$ de P'.
2. Le théorème peut se reformuler en : a est racine d'ordre au moins k de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.

4.4.3 Racines et division euclidienne

Méthode 2 Calcul du reste d'une division euclidienne

Supposons que B soit de degré p (entier non nul), et ait p racines $x_1, \ldots, x_p$ **deux à deux différentes**. Le reste R de la division euclidienne de A par B se déduit alors des valeurs de A aux points x_i. En effet, R étant un polynôme de degré au plus $p-1$, il est caractérisé par ses p coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que $R = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$. Lorsque $x = x_i$:

$$A(x_i) = \underbrace{B(x_i)Q(x_i)}_{0 \times Q(x_i) = 0} + R(x_i) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_i^k$$

Les p coefficients du reste sont donc solutions d'un système de p équations à p inconnues :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_i^k = A(x_i)$$

et on peut vérifier en résolvant le système qu'il admet une unique solution.

Remarque – Si B a des racines multiples, le principe de la méthode ci-dessus reste valable, mais ne donnera pas assez d'équations pour trouver les coefficients de R. L'idée est alors de dériver la relation $A = BQ + R$ et d'évaluer en les racines multiples, pour exploiter que si x_i est racine multiple de B d'ordre α_i, il l'est aussi de BQ (d'ordre au moins égal à α_i) : si $0 \leq j < \alpha_i$, on a :

$$A^{(j)}(x_i) = \underbrace{(BQ)^{(j)}(x_i)}_{0} + R^{(j)}(x_i) = \sum_{k=j}^{p-1} a_k \frac{k!}{(k-j)!} x_i^{k-j}$$

ce qui nous fournit de nouvelles équations pour former un système dont seuls les coefficients de R seront solutions.

Exemple d'application 1

Déterminons le reste de la division euclidienne de X^n (pour n entier) par $X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution

C'est l'unique polynôme réel R qui vérifie :

Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\begin{cases} X^n = (X^2-1) \times Q + R \\ \deg(R) < 2 \end{cases}$.

Comme $\deg(R) < 2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $R = aX + b$, et on cherche à déterminer a et b.

On exploite l'égalité $X^n = (X^2-1) \times Q + R$. L'idée est de l'évaluer en des valeurs bien choisies. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on a juste $x^n = (x^2-1)Q(x) + R(x)$, mais $Q(x)$ étant inconnu, cela ne nous sert pas, sauf si $x^2 - 1 = 0$. On évalue donc ici en $x = 1$ et $x = -1$.

Alors $\begin{cases} 1 = 1^n = 0 \times Q(1) + R(1) = R(1) = a + b \\ (-1)^n = 0 \times Q(-1) + R(-1) = R(-1) = -a + b \end{cases}$, donc $\begin{cases} b = \frac{1+(-1)^n}{2} \\ a = \frac{1-(-1)^n}{2} \end{cases}$.

Par conséquent, le reste cherché vaut $R = \dfrac{1-(-1)^n}{2} X + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ c'est à dire :

$$R = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un entier pair} \\ X & \text{si } n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

Exemple d'application 2

Calculons le reste R de la division euclidienne de X^n par $B = (X-1)^2(X+1)$.

Solution

Par définition, $\deg(R) < \deg(B) = 3$, donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $R = aX^2 + bX + c$.

De plus, il existe un polynôme Q tel que $X^n = BQ + R$. Evaluons cette égalité en 1, donc $1 = R(1) = a + b + c$, puis en -1, donc $(-1)^n = R(-1) = a - b + c$. De ces deux équations, on déduit facilement que $b = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ et que $a + c = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, mais il nous faut une autre équation pour déterminer a et c.

L'idée est de dériver l'égalité $X^n = BQ + R$, puis d'évaluer en 1, afin d'exploiter que $(X-1)^2$ est en facteur de B, c'est-à-dire 1 est racine double de B, donc racine d'ordre au moins 2 de BQ. On a donc :

$$nX^{n-1} = 2(X-1)(X+1)Q + (X-1)^2 Q + (X-1)^2(X+1)Q' + R',$$

ce qui évalué en 1 nous donne $n = R'(1) = 2a + b$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

D'où le système $\begin{cases} 2a+b=n \\ a+c=\dfrac{1+(-1)^n}{2} \\ b=\dfrac{1-(-1)^n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{n}{2}+\dfrac{(-1)^n-1}{4} \\ b=\dfrac{1-(-1)^n}{2} \\ c=-\dfrac{n}{2}+\dfrac{(-1)^n+3}{4} \end{cases}$.

Donc $R=\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{(-1)^n-1}{4}\right)X^2+\dfrac{1-(-1)^n}{2}X-\dfrac{n}{2}+\dfrac{(-1)^n+3}{4}$.

4.4.4 Factorisation à l'aide des racines d'un polynôme

Théorème – Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des racines multiples deux à deux distinctes de P, de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_n$, alors P est divisible par $(X-\alpha_1)^{h_1}\ldots(X-\alpha_n)^{h_n}$.

En particulier si P n'est pas le polynôme nul, $\deg(P) \geq \sum_{i=1}^{n} h_i$, c'est-à-dire que le nombre de racines de P, chacune comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité, est inférieur ou égal à $\deg(P)$.

La démonstration de ce théorème est proposée en exercice (cf. l'exercice 4.30).

Remarque – En particulier, un polynôme non nul ne peut pas avoir plus de racines distinctes que son degré.

Un cas particulier absolument fondamental du théorème précédent est :

Théorème – Si P est un polynôme de degré au plus n qui s'annule en au moins $n+1$ points distincts, alors P est le polynôme nul.

Démonstration

Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ ces $n+1$ valeurs (ce sont donc des racines d'ordre au moins 1), alors $(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{n+1})$ divise P, donc si $P \neq 0$, il existe un polynôme Q non nul tel que $P=(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{n+1})Q$, donc $\deg(P)=n+1+\deg(Q)$ avec $\deg(Q)\geq 0$, ce qui contredit $\deg(P)\leq n$, donc $P=0$. ■

Corollaire – Un polynôme qui s'annule en une infinité de valeurs (par exemple sur un intervalle non réduit à un point) est nécessairement le polynôme nul.

De même, si deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}_n[X]$ coïncident sur au moins $n+1$ valeurs, alors le théorème appliqué à $P-Q$ donne $P-Q=0$, donc $P=Q$.

Exemple

Si P est un polynôme qui vérifie que pour tout réel x, $P(\sin(x))=0$, alors P est le polynôme nul, puisque tout élément de l'intervalle $[-1,1]$ peut s'écrire $\sin(x)$ pour un certain x, et donc est racine de P, ce qui fait une infinité de racines pour P.

Méthode 3 Unicité d'un polynôme vérifiant une propriété

Pour montrer qu'il existe au plus un polynôme vérifiant une propriété donnée A, on considère deux polynômes P et Q vérifiant A, et on montre que $P - Q$ a une infinité de racines (ou tout du moins strictement plus que son degré) et donc $P - Q = 0$.

Exemple d'application

Montrons qu'il existe au plus un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ et $P(3) = -5$.

Solution

Si on a deux tels polynômes P et Q, alors $P(1) = 2 = Q(1)$, $P(2) = 3 = Q(2)$ et $P(3) = -5 = Q(3)$, donc $(P - Q)(1) = (P - Q)(2) = (P - Q)(3) = 0$, donc $P - Q$ a au moins trois racines distinctes, mais comme $\deg(P) \leq 2$ et $\deg(Q) \leq 2$, on a $\deg(P - Q) \leq 2$, et donc $P - Q$ a plus de racines que son degré, donc $P - Q = 0$, donc $P = Q$.

En fait, P existe et vaut $P = -\frac{9}{2}X^2 + \frac{29}{2}X - 8$.

4.4.5 Algorithme de Hörner

L'algorithme de Hörner permet de calculer le quotient et le reste (c'est à dire la valeur de $P(x)$) de la division euclidienne de P par $X - x$, pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in \mathbb{K}$.

Principe de l'algorithme : si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, alors

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + x(a_n)) \ldots)).$$

On calcule donc

$$\begin{cases} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= b_n x + a_{n-1} \\ &\vdots \\ b_1 &= b_2 x + a_1 \\ b_0 &= b_1 x + a_0 = P(x) \end{cases}$$

Le chapitre 28 propose un programme en Turbo Pascal basé sur cet algorithme.

On a $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1} - xb_n$, …, $a_0 = b_0 - xb_1$, donc

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \\ &= (b_0 - xb_1) + (b_1 - xb_2)X + \cdots + (b_{n-1} - xb_n)X^{n-1} + b_n X^n \\ &= b_0 + b_1(X - x) + b_2(X - x)X + b_3(X - x)X^2 + \cdots + b_n(X - x)X^{n-1} \\ &= b_0 + (X - x)\left(b_1 + b_2 X + \cdots + b_n X^{n-1}\right) \end{aligned}$$

On retrouve bien $b_0 = P(x)$ comme reste de la division euclidienne de P par $X - x$, mais en plus $b_1 + b_2 X + \cdots + b_n X^{n-1}$ est le quotient de la division euclidienne de P par $X - x$.

On présente la mise en pratique de l'agorithme sous forme de tableau :

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_0
x	$a_n = b_n$	$a_{n-1} + xb_n = b_{n-1}$	$a_{n-2} + xb_{n-1} = b_{n-2}$	…	$a_0 + xb_1 = b_0$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On remplit la deuxième ligne en additionnant dans chaque case le contenu de la case du dessus, et le résultat de la multiplication de x par le contenu de la case de gauche (sauf la case tout à gauche, qui est juste le contenu de la case du dessus).

Exemples

1. Soit $P = 3X^6 - X^4 + 3X^2 - X + 2$, calculons $P(2)$. Effectuons l'algorithme de Hörner :

	3	0	−1	0	3	−1	2
2	3	6	11	22	47	93	188

Donc $P(2) = 188$.

2. Soit $P = X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 16X^2 + 15X - 5$, montrons que 1 est racine et calculons son ordre de multiplicité. Effectuons l'algorithme de Hörner :

	1	−3	8	−16	15	−5
1	1	−2	6	−10	5	0

donc 1 est racine de P et $P = (X-1)(X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 10X + 5)$.
On recommence avec $Q = X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 10X + 5$, ...

	1	−2	6	−10	5	
1	1	−1	5	−5	0	$\rightarrow Q = (X-1)(X^3 - X^2 + 5X - 5) + 0$
1	1	0	5	0		$\rightarrow X^3 - X^2 + 5X - 5 = (X-1)(X^2+5) + 0$
1	1	1	⑥			$\rightarrow X^2 + 5 = (X-1)(X+1) + ⑥$

donc 1 est racine triple et $P = (X-1)^3(X^2+5)$.

4.4.6 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème – Théorème de d'Alembert-Gauss
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire – Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Remarque – En particulier, un polynôme complexe non nul a autant de racines complexes comptées avec multiplicité que son degré.

Corollaire – Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, de degré n. Notons a_n le coefficient dominant de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines complexes deux à deux distinctes de P d'ordre de multiplicités respectifs $h_1, \ldots, h_p$. Alors $h_1 + \cdots + h_p = n$ et $P = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{h_i}$

Méthode 4 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$

Pour factoriser un polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles, il faut

- chercher les racines α_i deux à deux distinctes de P (pour $1 \leq i \leq p$),
- déterminer l'ordre de multiplicité h_i de la racine α_i pour P,
- déterminer le coefficient dominant λ de P.

On a alors la factorisation $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{h_i}$.

Exemple d'application

1. Factorisons $P_1 = X^3 - 4X^2 + (6+i)X - 3 - i$ dans $\mathbb{C}[X]$:
 1 est racine évidente et on obtient $P_1 = (X-1)(X^2 - 3X + 3 + i)$. Or les racines de $X^2 - 3X + 3 + i$ sont $2 - i$ et $1 + i$ ($\Delta = -3 - 4i = (1-2i)^2$). D'où : $P_1 = (X-1)(X-2+i)(X-1-i)$.
2. Factorisons $P_2 = 2X^2 - 4(1+i)X + 4i$ dans $\mathbb{C}[X]$:
 le discriminant est nul, $1 + i$ est racine double de P_2, donc $P_2 = 2(X - 1 - i)^2$.
3. Factorisons $P_3 = iX^n - i$ dans $\mathbb{C}[X]$:
 son coefficient dominant est i. Comme $P_3 = i(X^n - 1)$, ses racines sont les racines complexes de l'unité, donc les complexes $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Il reste à déterminer leurs multiplicités. On peut le faire de deux façons :
 - soit en remarquant que $P_3' = inX^{n-1}$, qui n'admet que 0 comme racine, et donc P_3 ne peut pas avoir de racines multiples,
 - soit en remarquant que les z_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont deux à deux distincts, donc forment n racines de P_3, et comme $\deg(P_3) = n$ et que la somme des multiplicités des racines doit faire $\deg(P_3)$, forcément les z_k sont racines simples de P_3.

 Et donc $P_3 = i \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$.
4. Factorisons $P_4 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$:
 on a $X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = \prod_{k=0}^{4} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right) = (X-1) \prod_{k=1}^{4} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)$. D'où $P_4 = \prod_{k=1}^{4} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)$.

4.4.7 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition – *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, si α est une racine complexe de P d'ordre de multiplicité h, alors $\overline{\alpha}$ est racine de P d'ordre de multiplicité h.*

Théorème – Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme

$$P = a_n \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{h_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2 + b_j X + c_j)^{k_j}$$

où a_n est le coefficient dominant de P, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines réelles d'ordre de multiplicités respectifs $h_1, \ldots, h_r$, pour tout j le polynôme $X^2 + b_j X + c_j$ est à coefficients réels sans racine réelle (c'est-à-dire de discriminant strictement négatif), et $k_j \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ses racines réelles deux à deux distinctes, d'ordre de multiplicités respectifs $h_1, \ldots, h_r$ et $u_1, \ldots, u_s$ ses racines complexes non réelles, distinctes et non conjuguées, d'ordre de multiplicités respectifs $k_1, \ldots, k_s$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

D'après la proposition précédent, $\overline{u_1}, \dots, \overline{u_s}$ sont aussi racines de P, d'ordre de multiplicités respectifs $k_1, \dots, k_s$.

Notons a_n le coefficient dominant de P où n est le degré de P. Puisqu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est en particulier dans $\mathbb{C}[X]$, nous pouvons factoriser dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = a_n \underbrace{\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{h_i}}_{\text{racines réelles}} \underbrace{\prod_{j=1}^{s}(X-u_j)^{k_j}}_{\substack{\text{racines}\\ \text{complexes}}} \underbrace{\prod_{j=1}^{s}(X-\overline{u_j})^{k_j}}_{\substack{\text{racines}\\ \text{complexes conjuguées}}}$$

Regroupons les racines complexes conjuguées entre elles et remarquons :

$$(X-u_j)(X-\overline{u_j}) = X^2 - \underbrace{(u_j+\overline{u_j})}_{2\,\mathrm{Re}(u_j)}X + \underbrace{u_j\overline{u_j}}_{|u_j|^2}$$

En posant $b_j = -2\,\mathrm{Re}(u_j) \in \mathbb{R}$ et $c_j = |u_j|^2 \in \mathbb{R}_+$, nous en déduisons la factorisation demandée. ■

Remarques

1. En particulier, tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle, résultat que l'on retrouve à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Si P est de degré n, en gardant les notations du théorème, on a en écrivant l'égalité des degrés : $n = (h_1 + \cdots + h_r) + 2(k_1 + \cdots + k_s)$.

Corollaire – Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Méthode 5 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

Pour factoriser un polynôme réel non constant, il faut

- le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, c'est-à-dire trouver ses racines complexes avec leurs ordres de multiplicité, puis
- regrouper les facteurs correspondants aux racines complexes conjuguées pour former des polynômes réels irréductibles de degré 2.

Exemple d'application 1

Factorisons $P_1 = X^3 + 3X^2 + 4X + 2$.

Solution

-1 est racine évidente et $P_1 = (X+1)(X^2+2X+2)$. Or le discriminant du trinôme X^2+2X+2 est $\Delta = -4 < 0$ donc ce trinôme est irréductible. La factorisation de P_1 dans $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$P_1 = (X+1)(X^2+2X+2)$$

Exemple d'application 2

Factorisons $P_2 = 2X^5 - 2$. Dans $\mathbb{C}[X]$, on a :

Solution

$$P_2 = 2(X-1)(X-e^{i\frac{2\pi}{5}})(X-e^{i\frac{4\pi}{5}})(X-e^{i\frac{6\pi}{5}})(X-e^{i\frac{8\pi}{5}}).$$

Soit $P_2 = (X-1)(X-e^{i\frac{2\pi}{5}})(X-e^{-i\frac{2\pi}{5}})(X-e^{i\frac{4\pi}{5}})(X-e^{-i\frac{4\pi}{5}})$. D'où la factorisation de P_2 dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_2 = 2(X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right).$$

Synthèse

Savoirs

- Les opérations sur les polynômes
- La définition du degré
- L'écriture de la division euclidienne avec la condition sur le degré du reste
- Les deux façons de prouver que a est racine d'ordre k
- Si on compte chaque racine un nombre de fois égal à sa multiplicité, le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré

Savoir-faire

- Majorer le degré d'un polynôme à l'aide des règles sur le degré
- Déterminer le reste d'une division euclidienne par un polynôme dont les racines et leurs multiplicités sont connues
- Factoriser un polynôme explicite par une puissance de $X - a$ lorsque a est racine (algorithme de Hörner)
- Obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ à partir de celle dans $\mathbb{C}[X]$

Mots-clés

- Degré
- Coefficient dominant
- Quotient et reste d'une division euclidienne
- Racine
- Ordre de multiplicité d'une racine
- Factorisation

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

4.1 Donner le degré de $P = 4X^3 - X^2 + X - 4$ en justifiant bien.

4.2 Soit P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Que dire de $\deg(P+Q)$?

4.3 Soit P un polynôme. Que dire de $\deg(P')$?

4.4 Identifier le polynôme P vérifiant l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(e^x) = e^{2x} - 3e^x + 1$.

4.5 Écrire la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + X^2 + 1$ par X^2.

4.6 Donner la dérivée n-ième de X^{n-1}, de X^n puis de X^{n+1}.

4.7 Enoncer la formule de Taylor.

4.8 Donner deux façons de vérifier que $a \in \mathbb{C}$ est racine d'ordre au moins 3 de $P \in \mathbb{C}[X]$.

4.9 Donner les racines, avec leurs multiplicités, du polynôme $P = 2(X-1)^3(X+2)^2(X-4)$.

4.10 Que dire d'un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ qui vérifie $P(1) = P(3) = P(-2) = P(6) = 7$?

4.11 **Vrai ou faux ?**

1) Soit $P = \left(2X^4 - X^3\right) - \left(2X^4 + X - 1\right)$, alors $\deg(P) = 4$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_n[X]$.

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $XP \in \mathbb{R}_n[X]$.

5) La division euclidienne de $X^4 - X^3 + X^2$ par $X - 1$ est $X^4 - X^3 + X^2 = X^3(X-1) + X^2$.

6) $X^2 + X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

7) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P^{(n+1)} = 0$.

8) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n, alors $P = 0$.

9) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(n) = 0$ pour tout entier naturel n, alors $P = 0$.

10) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\cos(n\pi)) = 0$ pour tout entier naturel n, alors $P = 0$.

11) $P = (X+1)(X-2)^2(X+3)^2$ est de degré 5 et n'a que trois racines distinctes.

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 109.

■ Degré d'un polynôme

4.12

Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1) $P_1 = X^3 - X(X - 1 + 2i)^2$

2) $P_2 = \prod_{k=0}^{n}(2X - k)$

3) $P_3 = (X+3)^n - (X-2)^n$

4) $P_4 = \prod_{k=0}^{n}(X+3)^k$

4.13

On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes réels P non nuls tels que $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1) Déterminer le degré d'un tel polynôme.

2) Conclure.

4.14

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit $Q = 2XP' - (X^2+1)P''$.

1) Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, montrer, en posant $P = aX^2 + bX + c$ (avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$) que $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

2) Soit n un entier naturel. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer en raisonnant sur les degrés que $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

4.15

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que

$$Q = nXP - X^2P' \in \mathbb{R}_n[X].$$

4.16 **Adapté de Edhec 2009**

Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$, on admet que l'expression $X^n \times \dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{n-k}. Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right) \in \mathbb{R}_n[X]$.

4.17

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n par :

$$\begin{cases} P_0 &= 1 \\ P_1 &= 2 - X \\ P_{n+1} &= 2(2n+1)P_n + X^2 P_{n-1},\ \forall\, n \geqslant 1 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme à coefficients entiers relatifs.

2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

3) Montrer que pour tout entier n :

$$P_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

■ **Division euclidienne**

4.18

Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X$ par $X^2 - 1$.

4.19

Déterminer le reste de la division euclidienne de

1) $X^{2n} + 2$ par $(X - 1)$,

2) $X^{2n} + 2$ par $(X - 1)(X - 2)$.

■ **Racines**

4.20

Donner l'ordre de multiplicité de 0, de 1 et de i comme racines du polynôme

$$P = X^3 - 2X^4 + 2X^5 - 2X^6 + X^7.$$

4.21

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^3 - aX + b$ soit divisible par $(X - 1)^2$.

4.22

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b telle que $aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X - 1)^2$.

4.23

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et

$$P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

Prouver que $(X - 1)^3$ divise P_n.

4.24

Soit le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = (x - 2)^{325}$. Calculer $P^{(k)}(2)$ pour tout entier $k \geq 0$.

4.25

Pour tout entier $n \geq 2$, on s'intéresse aux polynômes

$$Q_n = (X + 1)^n - X^n - 1.$$

1) Exprimer Q_n à l'aide des coefficients binômiaux $\binom{n}{k}$.

2) En déduire que Q_n est non nul et à coefficients entiers. Déterminer le degré de Q_n ainsi que son monôme dominant.

3) Montrer que X divise Q_n.

4) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles Q_n est divisible par $X + 1$.

5) Le polynôme Q_n peut-il être divisible par $(X + 1)^2$?

4.26

Déterminer les polynômes réels P de degré 5 tels que $(X-2)^3$ divise $P + 2$ et $(X - 1)^3$ divise $P - 1$.

4.27

Montrer qu'un polynôme 1-périodique est constant.

■ **Factorisation**

4.28

Factoriser $2X^4 + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

4.29

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P = X^4 + X^2 + 1\ ,\ Q = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$$

Exercices d'approfondissement

4.30

Le but de cet exercice est de prouver le théorème énoncé en cours sur la factorisation d'un polynôme lorsqu'il a des racines multiples.

1) Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ et α une racine de $P = Q_1 \times Q_2$ d'ordre au moins h. Montrer que si α n'est pas racine de Q_1, alors α est racine d'ordre au moins h de Q_2.

2) Montrer par récurrence forte sur le degré de P que si α_1, …, α_n sont des racines multiples deux à deux distinctes d'un polynôme P, de multiplicités respectives h_1, …, h_n, alors P est divisible par $(X - \alpha_1)^{h_1} \ldots (X - \alpha_n)^{h_n}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

4.31 Adapté de Ecricome 2010

1) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $Q = P'' - 4XP'$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour la suite de l'exercice, on admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, *il existe un* ***unique*** *polynôme* ***unitaire*** H_n *de* ***degré*** n *tel que :*

$$H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n \quad (\star)$$

2) En dérivant la relation $(\star)$, démontrer que :

$$\forall n \geq 1,\ H_n''' - 4XH_n'' = -4(n-1)H_n'.$$

En déduire que :

$$\forall n \geq 1,\ H_n' = nH_{n-1} \text{ et}$$

$$\forall n \geq 2,\ H_n - XH_{n-1} + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0.$$

3) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?

Calculer alors H_2 et H_3.

4) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} - \frac{n-1}{4}u_{n-2}.$$

Écrire un programme en Pascal calculant u_{2010}.

4.32

1) Écrire $\cos(2\theta)$ puis $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ (où θ désigne un réel).

2) On considère la suite (T_n) de polynômes réels, définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

a) Etablir que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

b) Montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

c) Expliciter T_2, T_3, T_4.

d) Déterminer le degré de T_n, le coefficient dominant ainsi qu'une relation entre $T_n(X)$ et $T_n(-X)$. En déduire la parité de T_n.

e) Calculer $T_n(1)$.

3) Déduire de la question 2.a. que T_n admet n racines distinctes et réelles, situées dans l'intervalle $[-1, 1]$.

4) Résoudre effectivement $T_3(x) = 0$ et donner les valeurs des trois racines.

4.33

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. Donner une relation liant P_n, P_n' et P_{n+1}.

3) Montrer que f est continue en 0, puis dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

4) Déduire de la question 2, à l'aide du théorème de prolongement de la dérivée, que $f^{(n)}(0)$ existe, et donner sa valeur.

4.34 Adapté de Ecricome 2004

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1) Justifier que f est de classe C^∞ sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.

2) Déterminer des polynômes P_k, pour $k \in [\![0, 2]\!]$, vérifiant : $\forall x \in I$, $\forall k \in [\![0, 2]\!]$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{P_k(\sin(x))}{\cos^{k+1}(x)}$.

3) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}.$$

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n$. En déduire le polynôme P_3.

5) Déterminer, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

4.35 Extrait EML 2008

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x),$$

où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.

En particulier : $H_0(x) = 1$.

1) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

Faire figurer les calculs sur la copie.

2.a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.

c) Contrôler alors les résultats obtenus à la première question et calculer H_4.

Faire figurer les calculs sur la copie.

3) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.

4) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

4.36

Soient p un entier naturel, P une fonction polynôme à coefficients réels, de degré p et Q la fonction polynôme définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = (x^2 + 1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x).$$

1.a) Montrer que, si $p > 2$, le degré de Q est égal à p et que, si $p = 2$, le degré de Q est strictement inférieur à p.

b) En déduire que Q n'est jamais de degré deux.

2.a) Montrer que, si P est une fonction polynôme non nulle vérifiant l'équation, notée (1), suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = 0,$$

alors P est de degré deux.

b) Trouver toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation (1).

3) On cherche toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation, notée (2), suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = x.$$

a) Trouver une solution P_1 de degré un de l'équation (2).

b) Montrer qu'une fonction polynôme P est solution de l'équation (2) si et seulement si $P - P_1$ est solution de l'équation (1).

c) En déduire les fonctions polynômes solutions de l'équation (2).

Indications

4.17 La suite de polynômes (P_n) est définie à l'aide d'une relation de récurrence liant P_{n+1} à P_n et P_{n-1}. Il faut donc faire des récurrences doubles.

Pour la question 2, comme le résultat n'est pas donné, il faut l'intuiter. Pour cela, il faut calculer P_2, P_3, éventuellement P_4, jusqu'à avoir une idée de ce qu'il faut montrer.

4.24 Distinguer $k < 325$, $k = 325$ et $k > 325$.

4.26 Supposons qu'un tel polynôme existe. Que peut-on alors dire sur P' ?

Il faudra ensuite vérifier que le(s) polynôme(s) trouvé(s) vérifie(nt) bien ce que l'on souhaite.

4.27 Il faut exploiter le fait qu'un polynôme ayant une infinité de racines est nul.

4.30 Utiliser la formule de Leibniz pour la première question, pour calculer $(Q_1 Q_2)^{(k)}(\alpha)$.

4.32 Question 2a : faire une récurrence double, puisque la suite (T_n) est construite à l'aide d'une formule de récurrence double.

Question 2b : il y a une méthode dans le cours expliquant comment montrer l'unicité d'un polynôme vérifiant une assertion ...

Question 2d : il faut intuiter les réponses à partir des calculs fait précédemment de T_2, T_3 et T_4, et les montrer par récurrence double.

Question 3 : $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ modulo π,
donc $\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow$...

4.33 Question 2 : on montre **l'existence** de P_n par récurrence sur n, et au cours de cette récurrence (qui exploite l'égalité $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$), on obtient la relation voulue liant P_n, P'_n et P_{n+1}.

Pour l'unicité, voir la méthode proposée dans le cours.

4.34 La question 3 se montre par récurrence sur n, au cours de laquelle on établit la relation demandée à la quatrième question (!).

La question 5 se montre aussi par récurrence sur n, mais il faut intuiter le résultat. Pour cela, on le fait à partir de P_1, P_2, P_3.

4.35 Question 2.a. : dériver l'égalité donnant $H_n(x)$.

Question 2.b. : faire une récurrence sur n, en utilisant la relation de la question précédente.

Question 3 : comparer les degrés de $2XH_n$ et H'_n, pour déterminer où sont les termes de plus grand degré.

Question 4 : par récurrence sur n, en utilisant la relation de la question 2.a, et en faisant attention que $H_n(-x)$ se dérive comme une fonction composée ...

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

4.1 $\boxed{\deg(P) = 3}$. Le coefficient de X^3 est 4 donc non nul, ce qui assure que $\deg(P) \geq 3$, et comme toutes les puissances de X qui apparaissent sont au plus 3, on a bien $\deg(P) \leq 3$.

4.2 De manière générale, on a

$$\boxed{\deg(P+Q) \leq \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}.$$

Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, il y a égalité.

Si $\deg(P) = \deg(Q)$, on a égalité si et seulement si la somme des coefficients dominants de P et de Q est différente de zéro.

4.3 $\boxed{\deg(P') \leq \deg(P) - 1}$ en toute généralité.

Si l'on suppose de plus que $\deg(P) \geq 1$ (c'est à dire que P est non constant), alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

4.4 $e^{2x} - 3e^x + 1 = (e^x)^2 - 3e^x + 1$, donc $P = X^2 - 3X + 1$ convient.

Remarquons que c'est le seul, car si Q est un polynôme qui convient, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(e^x) = e^{2x} - 3e^x + 1 = P(e^x)$, donc $(P - Q)(e^x) = 0$. Tout nombre de la forme e^x pour $x \in \mathbb{R}$ est alors racine de $P - Q$, donc tout nombre dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui en fait une infinité, et donc $P - Q = 0$, donc $P = Q$.

4.5 On a $X^4 - 3X^3 + X^2 + 1 = X^2(X^2 - 3X + 1) + 1$ et comme $\deg(1) = 0 < \deg(X^2) = 2$, ceci est bien l'écriture de la division euclidienne.

Donc le quotient est $\boxed{X^2 - 3X + 1}$, le reste est $\boxed{1}$.

4.6

$\boxed{(X^{n-1})^{(n)} = 0}$ (on dérive plus de fois que le degré).

$\boxed{(X^n)^{(n)} = n!}$.

$$\boxed{(X^{n+1})^{(n)} = \frac{(n+1)!}{1!}X^{n+1-n} = (n+1)!X}.$$

4.7 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on a

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}.$$

4.8 On vérifie soit que $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$, soit que $(X - a)^3$ divise P.

4.9 1 est racine d'ordre 3 (dite triple), -2 est racine d'ordre 2 (donc double) et 4 est racine d'ordre 1 (donc simple).

4.10 Le polynôme $P - 7$ a alors au moins quatre racines différentes (1, 3, -2 et 6), mais est dans $\mathbb{R}_3[X]$, donc de degré au plus 3. Donc $P - 7$ est le polynôme nul, et donc $\boxed{P = 7}$.

4.11

1) Faux, c'est 3, car après simplification, il ne reste pas de X^4 (le terme de plus haut degré est $-X^3$).

2) Vrai.

3) Vrai.

4) Faux en toute généralité : on peut juste dire que $XP \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ (penser à $P = X^n$).

5) Faux, comme on divise par $X - 1$ il faut que le reste soit de degré plus petit que celui de $X - 1$, ce qui n'est pas le cas pour X^2. De plus, une proposition du cours donne que le reste de la division de P par $X - 1$ est $P(1)$, donc ici 1.

6) Vrai, c'est un polynôme réel de degré 2 et son discriminant vaut $-7 < 0$.

7) Vrai (car on a dérivé plus de fois que le degré de P).

8) Vrai, par la formule de Taylor ou bien car 0 est racine d'ordre plus grand que le degré de P.

9) Vrai, car P a une infinité de racines.

10) Faux : lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, $\cos(n\pi)$ ne prend que deux valeurs : 1 et -1. Donc l'assertion donne juste que 1 et -1 sont racines. $P = X^2 - 1$ convient par exemple.

11) Vrai, par contre 2 et -3 sont racines doubles, -1 est racine simple, donc P a 5 racines comptées avec multiplicités.

4.12

1) Simplifions P_1 en développant :

$$\begin{aligned} P_1 &= X^3 - X(X^2 + 2(-1+2i)X + (-1+2i)^2) \\ &= -2(-1+2i)X^2 - (-1+2i)^2X \end{aligned}$$

Comme le coefficient devant X^2 est $-2(-1+2i)$ qui n'est pas le complexe nul, $\boxed{\deg(P) = 2}$ et son coefficient dominant est $\boxed{-2(-1+2i)}$.

2) P_2 est un produit de polynômes. Les règles sur le degré d'un produit donnent alors

$$\begin{aligned} \deg(P_2) &= \sum_{k=0}^{n} \deg(2X - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 1 = \boxed{n+1} \end{aligned}$$

puis le coefficient dominant de P_2 est le produit des coefficients dominants des $(2X - k)$, qui est 2. Donc le coefficient dominant de P_2 est $\prod_{k=0}^{n} 2 = \boxed{2^{n+1}}$.

3) P_3 est une soustraction de polynômes. Comme

$$\deg\left((X+3)^n\right) = n\deg(X+3) = n \text{ et}$$
$$\deg\left((X-2)^n\right) = n,$$

on peut affirmer que $\deg(P_3) \leq \max\left(\deg\left((X+3)^n\right), \deg\left(-(X-2)^n\right)\right) = \max(n,n) = n$.

Mais comme les deux polynômes que l'on soustrait sont de même degré, on ne peut pas affirmer qu'il y a égalité .

Pour déterminer le degré, il va falloir être plus précis. Pour cela, développons les expressions, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(X+3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} X^k \text{ et}$$
$$(X-2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} X^k.$$

Par conséquent,

$$P_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[3^{n-k} - (-2)^{n-k}\right] X^k$$

(et cette écriture nous permet de nouveau d'affirmer que $\deg(P_2) \leq n$). Le coefficient de X^n dans P_2 s'obtient en faisant $k = n$ dans la somme, il vaut donc

$$\binom{n}{n}\left(3^{n-n} - (-2)^{n-n}\right) = 1 \times (1-1) = 0$$

(car un nombre puissance 0 fait toujours 1) ... donc $\deg(P_n) \leq n-1$.

Regardons désormais le coefficient de X^{n-1}, qui s'obtient en faisant $k = n-1$: c'est

$$\binom{n}{n-1}\left(3^{n-(n-1)} - (-2)^{n-(n-1)}\right) = n(3-(-2)) = 5n$$

Donc si $n \neq 0$, le coefficient de X^{n-1} est non nul, donc $\deg(P_n) \geq n-1$. Comme on a vu $\deg(P_n) \leq n-1$, on en déduit $\boxed{\deg(P_n) = n-1}$ et le coefficient dominant de P_n est $\boxed{5n}$.

Si $n = 0$, alors $P_0 = 1 - 1 = 0$, donc $\deg(P_0) = -\infty$.

4) P_4 est un produit de polynômes. Les règles sur le degré d'un produit donnent que

$$\deg(P_4) = \sum_{k=0}^{n} \deg\left((X+3)^k\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k\deg(X+3)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Puis le coefficient dominant de P_4 est le produit des coefficients dominants des $(X-1)^k$, qui est 1. Donc le coefficient dominant de P_4 est $\prod_{k=0}^{n} 1^k = \boxed{1}$.

4.13

1) On suppose P non nul, donc son degré est un entier. De plus,

$$\deg\left(P(X^2)\right) = \deg(P) \times \deg(X^2) = 2\deg(P) \text{ et}$$

$$\deg\left((X^2+1)P\right) = \deg(X^2+1) + \deg(P) = 2 + \deg(P)$$

donc $2\deg(P) = 2 + \deg(P)$, donc $\boxed{\deg(P) = 2}$.

2) On cherche donc P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c \text{ et}$$

$$(X^2+1)P = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c,$$

donc en identifiant les coefficients, on a

$$P(X^2) = (X^2+1)P \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = a+c \\ 0 = b \\ c = c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow b = 0 \text{ et } c = -a$$

Donc les polynômes P qui conviennent sont ceux qui s'écrivent $\boxed{P = aX^2 - a = a(X^2-1)}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

4.14

1) $P \in \mathbb{R}_2[X]$, donc $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec

$$P = aX^2 + bX + c.$$

Par conséquent, $P' = 2aX + b$, donc $2XP' = 4aX^2 + 2bX$, et $P'' = 2a$, donc $(X^2+1)P'' = 2aX^2 + 2a$. Donc

$$Q = 4aX^2 + 2bX - (2aX^2 + 2a) = 2aX^2 + 2bX - 2a.$$

Cette écriture montre bien que Q est un polynôme réel de degré au plus deux.

2) P est un polynôme réel, donc P' et P'' aussi par dérivation. Puis, par multiplication et soustraction de polynômes réels, on obtient bien que Q est un polynôme réel (on peut résumer ceci en disant « Q est un polynôme réel car obtenu par opérations usuelles sur les polynômes réels »).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Les propriétés du degré nous donnent :

$$\begin{aligned}\deg(Q) &\leq \max\left(\deg(2XP'), \deg(-(X^2+1)P'')\right)\\ \deg(2XP') &= \deg(2X) + \deg(P')\\ &= 1 + \deg(P') \leq \deg(P)\\ \deg\left(-(X^2+1)P''\right) &= \deg(-(X^2+1)) + \deg(P'')\\ &= 2 + \deg(P'') \leq \deg(P)\end{aligned}$$

Donc en réunissant ces trois résultats, on a

$$\deg(Q) \leq \deg(P).$$

En particulier, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P) \leq n$, et donc $\deg(Q) \leq \deg(P) \leq n$. Donc $P \in \mathbb{R}_n[X] \implies Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Remarque – On aurait pu aussi écrire P avec ses coefficients, et voir comment s'exprime Q en fonction des coefficients de P, comme dans la question précédente. Mais ici, l'expression de Q est moins simple, car n n'est plus égal à 2, et donc il peut être plus rapide de faire comme indiqué dans cette correction.

4.15 P est un polynôme réel, donc par opérations usuelles sur les polynômes réels, Q aussi.

Les règles sur les degrés ne suffisent pas, car on a :

- $\deg(nXP) = 1 + \deg(P)$,
- $\deg(X^2P') \leq 1 + \deg(P)$,

donc on a seulement que $\deg(Q) \leq 1 + \deg(P)$, ce qui est insuffisant dans le cas où $\deg(P) = n$.

Pour conclure, il faut utiliser les coefficients de P : $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Donc

$$\begin{aligned}Q &= nX\sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X^2\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} n a_k X^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k+1}\\ &= n a_0 X + \sum_{k=1}^{n} (n a_k - k a_k) X^{k+1}\\ &\underset{j=k+1}{=} n a_0 X + \sum_{j=2}^{n} (n - j + 1) a_{j-1} X^j + 0.X^{n+1}\end{aligned}$$

En introduisant les coefficients de P, on a constaté que les termes en X^{n+1} qui pouvaient apparaitre dans Q s'éliminaient. Par conséquent, cette écriture de Q prouve bien que $\deg(Q) \leq n$, et donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

4.16 On pourrait reformuler la question ainsi : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors l'application $Q : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ est la restriction à $\mathbb{R}^*$ d'une fonction polynomiale de degré au plus n.

Le danger ici serait de vouloir utiliser les règles sur le degré : c'est impossible, car $\frac{1}{X}$ n'est pas un polynôme, et toute règle sur le degré utilisant l'expression $\frac{1}{X}$ ne peut provenir du cours (et est donc hors programme).

Ecrivons P à l'aide de ses coefficients : $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Donc

$$\begin{aligned}Q &= X^n \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{X^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^n \frac{1}{X^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}\end{aligned}$$

Le changement d'indice $j = n - k$ donne

$$Q = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} X^j,$$

et sous cette écriture, on a bien que Q est un polynôme (car les puissances X^j qui apparaissent sont bien positives) à coefficients réels (car $a_{n-j} \in \mathbb{R}$) et de degré au plus n.

4.17 On a une suite de polynômes, définie à l'aide d'une relation de récurrence double, donnant P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}. On va donc résoudre les questions à l'aide de récurrences doubles.

1-2) Les deux premières questions vont se résoudre par une seule récurrence. Pour trouver l'assertion que l'on va montrer, il faut « intuiter » le degré et le coefficient dominant de P_n. Pour cela, on va calculer P_2, puis P_3 :

$$\begin{aligned}P_2 &= 2(2+1)P_1 + X^2 P_0\\ &= 6(2 - X) + X^2 = X^2 - 6X + 12\\ P_3 &= 2(2\times 2 + 1)P_2 + X^2 P_1\\ &= 10(X^2 - 6X + 12) + X^2(2 - X)\\ &= -X^3 + 12X^2 - 60X + 120\end{aligned}$$

Donc les degrés de P_0, P_1, P_2 et P_3 sont respectivement 0, 1, 2 et 3, et leurs coefficients dominants respectivement 1, -1, 1, -1. On conjecture que $\deg(P_n) = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n$.

Notons A_n l'assertion « P_n est un polynôme à coefficients entiers relatifs, de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$ », et montrons les assertions A_n par récurrence double sur n.

Initialisation : $P_0 = 1$ est bien un polynôme, son seul coefficient non nul est 1 qui est un entier relatif, $\deg(P_0) = 0$ et son cofficient dominant est 1, donc A_0 est vrai.

$P_1 = 2 - X$ est bien un polynôme, ses seuls coefficients non nul sont 2 et -1 qui sont des entiers relatifs, $\deg(P_1) = 1$ et son cofficient dominant est -1, donc A_1 est vrai.

Hérédité : Supposons A_n et A_{n-1} vraies pour un entier $n \geq 1$. Alors P_n et P_{n-1} étant des polynômes, comme X^2 en est un aussi, par produit puis addition de polynômes, on a que $P_{n+1} = 2(2n+1)P_n + X^2 P_{n-1}$ est bien un polynôme.

L'hypothèse de récurrence nous permet de dire qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ avec

$$\begin{aligned} P_n &= a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + (-1)^n X^n \\ &= (-1)^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \end{aligned}$$

et qu'il existe $(b_0, \dots, b_{n-2}) \in \mathbb{Z}^{n-2}$ avec

$$\begin{aligned} P_{n-1} &= b_0 + \cdots + b_{n-2}X^{n-2} + (-1)^{n-1}X^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} b_k X^k \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 2(2n+1)P_n + X^2 P_{n-1} \\ &= 2(2n+1)\left[(-1)^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right] \\ &\quad + X^2\left[(-1)^{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} b_k X^k\right] \\ &= (-1)^{n-1}X^{n+1} \\ &\quad + (2(2n+1)(-1)^n + b_{n-2})X^n \\ &\quad + 2(2n+1)(a_0 + a_1 X) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-1} (2(2n+1)a_k + b_{k-2})X^k \end{aligned}$$

L'écriture ci-dessus permet alors de dire que $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et que son coefficient dominant est $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$. Enfin, ses coefficients sont :

- $(-1)^{n-1}$ qui est entier,
- $2(2n+1)(-1)^n + b_{n-2}$ qui est entier car $b_{n-2} \in \mathbb{Z}$,
- $2(2n+1)a_0$ et $2(2n+1)a_1$ qui sont entiers car a_0 et a_1 et n le sont,
- et enfin $2(2n+1)a_k + b_{k-2}$ pour $2 \leq k \leq n-1$, qui est entier car a_k et b_{k-2} le sont.

Donc P_{n+1} est bien un polynôme à coefficients entiers relatifs, de degré $n+1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$, donc A_{n+1} est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence double, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A_n est vraie.

3) Si on évalue la relation définissant P_{n+1} en $X = 0$, on a $P_{n+1}(0) = 2(2n+1)P_n(0)$ pour tout entier n. De plus, $P_0(0) = 1$ et $P_1(0) = 2$. Montrons par récurrence l'assertion B_n : « $P_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$ ».

Initialisation : $\dfrac{(2\times 0)!}{0!} = \dfrac{0!}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1 = P_0(0)$, donc B_0 est vraie.

Hérédité : Supposons B_n vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors $P_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$, donc

$$P_{n+1}(0) = 2(2n+1)P_n(0) = 2(2n+1)\frac{(2n)!}{n!} = 2\frac{(2n+1)!}{n!}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)\times(2n+1)!}{(n+1)\times n!} \\ &= 2\frac{(2n+1)!}{n!}, \end{aligned}$$

donc on a bien $P_{n+1}(0) = \dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!}$, donc B_{n+1} est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, B_n est vraie.

4.18

$$\begin{array}{rrrr|l} X^4 & -3X^3 & +2X^2 & -X & X^2 \quad -1 \\ -(X^4 & & -X^2) & & X^2 - 3X + 3 \\ \hline & -3X^3 & +3X^2 & -X & \\ & -(-3X^3 & & +3X) & \\ \hline & & 3X^2 & -4X & \\ & & -(3X^2 & & -3) \\ \hline & & & -4X & +3 \end{array}$$

Donc le reste de la division est $\boxed{-4X+3}$ et le quotient $\boxed{X^2 - 3X + 3}$.

4.19

1) De manière générale, le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ (pour $a \in \mathbb{R}$) est $P(a)$, donc le reste de la division euclidienne de $X^{2n} + 2$ par $(X-1)$ est $1^{2n} + 2 = \boxed{3}$.

2) Soit R le reste de la division euclidienne de $X^{2n} + 2$ par $(X-1)(X-2)$. Par définition, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec

$$X^{2n} + 2 = (X-1)(X-2)Q + R \quad (\star)$$

et $\deg(R) < \deg\big((X+1)(X+2)\big) = 2$, donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $R = aX + b$.

En suivant la méthode proposée dans le cours, évaluons $(\star)$ en 1 et 2, qui sont les racines de $(X-1)(X-2)$:

$$\begin{cases} 1^{2n} + 2 = 0 + R(1) \\ 2^{2n} + 2 = 0 + R(2) \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 2^{2n} + 2 \end{cases}$$

En soustrayant la première ligne à la deuxième, on a $a = 2^{2n} - 1$, et donc $b = 3 - a = 4 - 2^{2n}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Donc le reste de la division euclidienne de $X^{2n}+2$ par $(X-1)(X-2)$ est

$$\boxed{R=(2^{2n}-1)X+(4-2^{2n})}.$$

4.20 $P=X^3(1-2X+2X^2-2X^3+X^4)$ et 0 n'est pas racine de $1-2X+2X^2-2X^3+X^4$, donc 0 est racine d'ordre 3 de P.

Utilisons l'algorithme de Hörner pour trouver l'ordre de multiplicité de 1 dans $1-2X+2X^2-2X^3+X^4$:

	1	−2	2	−2	1
1	1	−1	1	−1	0
1	1	0	1	0	
1	1	1	②		

donc 1 est racine double et de plus on a la factorisation $1-2X+2X^2-2X^3+X^4=(X-1)^2(X^2+1)$. Donc

$$P=X^3(X-1)^2(X^2+1)=X^3(X-1)^2(X-i)(X+i),$$

0 est racine d'ordre 3, 1 est racine d'ordre 2, i racine d'ordre 1 et donc $-i$ aussi puisque P est à coefficients réels.

4.21 $P=X^3-aX+b$ est divisible par $(X-1)^2$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est nul. Or, d'après la formule de Taylor, ce reste est $P(1)+P'(1)(X-1)=(1-a+b)+(3-a)(X-1)=(3-a)X+(b-2)$.

Il est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc si et seulement si $\boxed{a=3}$ et $\boxed{b=2}$.

Remarque – On aurait pu aussi partir de la caractérisation « $(X-1)^2$ divise P » si et seulement si « 1 est racine d'ordre au moins deux de P », donc si et seulement si « $P(1)=P'(1)=0$ ».

4.22 $P=aX^{n+1}+bX^n+1$ est divisible par $(X-1)^2$ si et seulement si 1 est racine d'ordre au moins 2 de P, donc si et seulement si $P(1)=P'(1)=0$.

$P(1)=a+b+1$ et $P'(1)=(n+1)a+nb$, donc

$$\begin{aligned}P(1)=P'(1)=0 &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+1=0\\(n+1)a+nb=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=-1\\n(a+b)=-a\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=-1\\a=n\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \boxed{a=n} \text{ et } \boxed{b=-(n+1)}\end{aligned}$$

Remarque – On aurait pu aussi partir de la caractérisation « $(X-1)^2$ divise P » si et seulement si « le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est nul », et utiliser la forme de ce reste donnée par la formule de Taylor.

4.23 $(X-1)^3$ divise P_n si et seulement si 1 est racine d'ordre au moins 3 de P_n, donc si et seulement si $P_n(1)=P_n'(1)=P_n''(1)=0$.

$P_n'=(n+2)nX^{n+1}-(n+2)(n+1)X^n+(n+2)$ et $P_n''=(n+2)(n+1)nX^n-(n+2)(n+1)nX^{n-1}$.

Donc

$$\begin{aligned}P_n(1) &= n-(n+2)+(n+2)-n\\ &=0\\ P_n'(1) &= (n+2)n-(n+2)(n+1)+(n+2)\\ &=(n+2)(n-(n+1)+1)\\ &=0\\ P_n''(1) &= (n+2)(n+1)n-(n+2)(n+1)n\\ &=0\end{aligned}$$

donc $(X-1)^3$ divise P_n.

4.24 L'écriture de P donne directement que 2 est racine d'ordre 325 de P, et donc

$$\boxed{P^{(k)}(2)=0 \text{ si } 0\leq k\leq 324}.$$

De plus, $\deg(P)=325$, donc $P^{(k)}=0$ si $k\geq 326$, en particulier, si on évalue en 2,

$$\boxed{P^{(k)}(2)=0 \text{ si } k\geq 326}.$$

Il reste à voir $k=325$: or, comme $\deg(P)=325$, si on note λ le coefficient dominant de P, on a $P^{(325)}=325!\times\lambda$. Ici $\lambda=1$, donc $P^{(325)}=325!$, et donc $\boxed{P^{(325)}(2)=325!}$.

Remarque – Ceci se généralise immédiatement à $P=(x-a)^n$ pour $n>0$ et le calcul de $P^{(k)}(a)$ pour tout $k\geq 0$.

4.25

1) $(X+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$ d'après la formule du binôme de Newton, donc

$$\boxed{Q_n=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}X^k}$$

(car $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$).

2) En particulier son monôme dominant est

$$\binom{n}{n-1}X^{n-1}=\boxed{nX^{n-1}}$$

(car $n\geq 2$), et donc $\boxed{\deg(Q_n)=n-1}$.

De plus, les coefficients de Q_n sont des coefficients binomiaux, donc entiers. Il est non nul, puisque le terme de degré $n-1$ est non nul.

3) De la question 1, on déduit

$$Q_n = X\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}X^{k-1} = X\sum_{p=0}^{n-2}\binom{n}{p+1}X^p,$$

donc Q_n s'écrit bien comme X multiplié par un autre polynôme, donc X divise Q_n (on aurait pu aussi tout simplement dire que 0 était racine de Q_n).

4) $X+1$ divise Q_n si et seulement si -1 est racine de Q_n, or $Q_n(-1) = -(-1)^n - 1$, donc -1 est racine si et seulement si n est impair.

5) Si le polynôme Q_n est divisible par $(X+1)^2$, alors -1 est racine d'orde de multiplicité au moins 2 de Q_n, donc $Q_n'(-1) = 0$. Or,

$$Q_n' = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1},$$

donc $Q_n'(-1) = -n(-1)^{n-1} \neq 0$ car $n \geqslant 2$ (donc $0^{n-1} = 0$). Donc $(X+1)^2$ ne divise jamais Q_n.

4.26

Faisons un raisonnement par analyse-synthèse :

Analyse : supposons qu'un tel polynôme P existe. Alors :

$(X-2)^3$ divise $S = P+2$ donne que

$$S(2) = S'(2) = S''(2) = 0.$$

Or, $S' = P'$ et $S'' = P''$, donc

$$P'(2) = P''(2) = 0.$$

$(X-1)^3$ divise $T = P-1$ donne que

$$T(1) = T'(1) = T''(1) = 0.$$

Or, $T' = P'$ et $T'' = P''$, donc

$$P'(1) = P''(1) = 0.$$

Donc 1 et 2 sont deux racines d'ordre au moins 2 du polynôme P', donc $(X-1)^2(X-2)^2$ divise P'.

Comme on veut P de degré 5, on aura $\deg(P') = 4$, ce qui implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} P' &= \lambda(X-1)^2(X-2)^2 \\ &= \lambda(X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4) \end{aligned}$$

Donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ avec

$$P = \lambda\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{3}{2}X^4 + \frac{13}{3}X^3 - 6X^2 + 4X\right) + \mu.$$

Enfin, $S(2) = 0$ donne $P(2) = -2$, donc

$$\frac{16}{15}\lambda + \mu = -2,$$

et $T(1) = 0$ donne $P(1) = 1$, donc

$$\frac{31}{30}\lambda + \mu = 1.$$

En soustrayant les deux équations, on a $\lambda = -90$ et donc $\mu = 94$. Donc

$$\begin{aligned} P &= -90\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{3}{2}X^4 + \frac{13}{3}X^3 - 6X^2 + 4X\right) + 94 \\ &= -18X^5 + 135X^4 - 390X^3 + 540X^2 - 360X + 94 \end{aligned}$$

Synthèse : On a prouvé qu'il existe au plus un polynôme qui répond à notre question, à savoir $P = -18X^5 + 135X^4 - 390X^3 + 540X^2 - 360X + 94$. Il reste à vérifier qu'il convient.

Un calcul direct montre que $P(1) = 1$, $P'(1) = P''(1) = 0$ et $P(2) = -2$, $P'(2) = P''(2) = 0$, donc ce polynôme P convient bien. C'est donc le seul qui répond à la question.

Remarque – On aurait pu constater directement qu'au plus un polynôme pouvait convenir : si on avait P et Q de degré 5 avec $(X-2)^3$ divise $P+2$ et $Q+2$, et $(X-1)^3$ divise $P-1$ et $Q-1$, alors :

$(X-2)^3$ divise $R = (P+2) - (Q+2) = P - Q$ et $(X-1)^3$ divise $R = (P-1) - (Q-1) = P - Q$, donc R qui est de degré au plus 5 a deux racines d'ordres au moins 3 chacune, ce qui fait au moins 6 racines comptées avec multiplicités alors que $\deg(R) \leq 5$, donc $R = 0$, ce qui donne $P = Q$.

4.27

Soit P un polynôme 1-périodique, alors pour tout entier n, n est une période de P, donc

$$P(n) = P(0+n) = P(0).$$

Par conséquent le polynôme $P - P(0)$ s'annule en tout point de $\mathbb{N}$. Il a donc une infinité de racines, donc $P - P(0)$ est le polynôme nul, donc $P = P(0)$, P est bien un polynôme constant.

4.28

Le coefficient dominant de $P = 2X^4 + 2$ est 2, on écrit donc $P = 2(X^4+1)$. Il faut ensuite chercher les racines complexes de P.

Or, $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{i\pi}$. On connaît les racines quatrièmes d'un nombre complexe (voir le cours sur les complexes), on a donc

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3\} \,|\, z = e^{i\frac{2k+1}{4}\pi}$$

On a donc trouvé quatre racines différentes pour P, et comme $\deg(P) = 4$, ce sont toutes des racines simples. Donc la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de P est :

$$\boxed{P = 2\left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, on regroupe les facteurs correspondant aux racines conjuguées :

$$\begin{aligned}\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) &= \left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\\ &= X^2-\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)X+1\\ &= X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\\ &= X^2-\sqrt{2}X+1\end{aligned}$$

en utilisant que $e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (formule d'Euler). Et de même,

$$\begin{aligned}\left(X-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X-e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) &= \left(X-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)\\ &= X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+1\\ &= X^2+\sqrt{2}X+1\end{aligned}$$

Donc la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de P est :

$$\boxed{P=2(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)}$$

Remarque – Une astuce de calcul permet d'utiliser l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, ce qui donne directement le résultat :

$$\begin{aligned}P &= 2(X^4+1)=2[(X^2+1)^2-2X^2]\\ &= 2(X^2+1-\sqrt{2}X)(X^2+1+\sqrt{2}X)\end{aligned}$$

4.29 • Pour factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, il faut chercher les racines des polynômes. On cherche donc les complexes z tels que $P(z)=0$.

Posons $Z=z^2$, alors $P(z)=z^4+z^2+1=Z^2+Z+1$, donc

$$P(z)=0 \Leftrightarrow Z^2+Z+1=0.$$

Z est donc racine d'un polynôme du second degré, de discriminant -3, on trouve alors ses racines Z_1 et Z_2 par une formule bien connue $Z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\overline{Z_1}$.

Il reste alors à résoudre $z^2=Z_1$ et $z^2=Z_2$ dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}z^2=Z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}} &\Leftrightarrow z^2=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2\\ &\Leftrightarrow \left(ze^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2=1\\ &\Leftrightarrow ze^{-i\frac{\pi}{3}}=\pm 1\end{aligned}$$

Donc les solutions de $z^2=Z_1$ sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}z^2=Z_1 &\Leftrightarrow \overline{z^2}=\overline{Z_1}\\ &\Leftrightarrow \overline{z}^2=Z_2\end{aligned}$$

donc les solutions de $z^2=Z_2$ sont les conjuguées des solutions de $z^2=Z_1$. Donc les solutions de $z^2=Z_2$ sont $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $\overline{e^{i\frac{4\pi}{3}}}=e^{-i\frac{4\pi}{3}}$.

On a donc trouvé 4 racines deux à deux distinctes pour P, $\deg(P)=4$, donc ce sont des racines simples, et comme le coefficient dominant de P est 1, on a

$$\boxed{P=\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right)}$$

• Pour factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, on part de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, on regroupe les facteurs correspondant aux racines conjuguées, que l'on développe pour obtenir un polynôme réel irréductible de degré deux :

$$\begin{aligned}\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) &= X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\\ &= X^2-X+1\end{aligned}$$

en utilisant que $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ d'après les formules d'Euler, et

$$\begin{aligned}\left(X-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right) &= X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+1\\ &= X^2+X+1\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{P=(X^2-X+1)(X^2+X+1)}$$

et cette écriture est le produit de deux polynômes irréductibles de degré deux.

Remarque – Une astuce de calcul permet d'utiliser l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, ce qui donne directement le résultat :

$$\begin{aligned}P &= 2[(X^2+1)^2-X^2]\\ &= 2(X^2+1-X)(X^2+1+X)\end{aligned}$$

• Pour factoriser Q, on commence à chercher ses racines. Comme Q a une racine « évidente » qui est 1, on factorise Q par $X-1$. Le moyen le plus rapide est de le faire par l'algorithme de Hörner :

	1	−2	2	−1
1	1	−1	1	0

donc $Q=(X-1)(X^2-X+1)$. Le discriminant de X^2-X+1 est $-3<0$, donc c'est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc la factorisation de Q dans $\mathbb{R}[X]$ est $\boxed{Q=(X-1)(X^2-X+1)}$.

Les racines complexes de X^2-X+1 sont $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, donc la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\boxed{Q=(X-1)\left(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

4.30

1) α est racine de Q_1Q_2, donc $Q_1(\alpha)Q_2(\alpha) = 0$, mais comme par hypothèse, $Q_1(\alpha) \neq 0$, on a $Q_2(\alpha) = 0$. Notons alors k l'ordre de multiplicité de α comme racine de Q_2.

La formule de Leibniz donne alors

$$(Q_1Q_2)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} Q_1^{(k-i)} Q_2^{(i)}.$$

Evaluons cette formule en α : on a $(Q_1Q_2)^{(k)}(\alpha) = Q_1(\alpha)Q_2^{(k)}(\alpha) + \sum_{i=0}^{k-1} 0 = Q_1(\alpha)Q_2^{(k)}(\alpha) \neq 0$, puisque α racine d'ordre k de Q_2 signifie $Q_2^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $i \leq k-1$ (donc tous les termes de la somme pour $i \leq k-1$ sont nuls) et $Q_2^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Comme α est racine d'ordre au moins h de Q_1Q_2 et $(Q_1Q_2)^{(k)}(\alpha) \neq 0$, on a $k \geq h$, ce qui donne bien que α est racine d'ordre au moins h de Q_2.

2) Montrons par récurrence forte sur l'entier k l'assertion : si P est un polynôme de degré k ayant des racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distinctes, de multiplicités respectives au moins $h_1, \ldots, h_n$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec

$$P = (X-\alpha_1)^{h_1} \ldots (X-\alpha_n)^{h_n} Q.$$

Initialisation : Pour $k = 1$, un polynôme P de degré 1 s'écrit $P = aX + b$ avec $a \neq 0$, donc P n'a qu'une seule racine, $-\dfrac{b}{a}$, qui est simple, et on a $P = a\left(X + \dfrac{b}{a}\right)$, donc $Q = a$ convient.

Hérédité : Supposons les assertions vraies pour tout entier inférieur ou égal à k. Alors, si P est de degré $k+1$ ayant des racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distinctes, de multiplicités respectives au moins $h_1, \ldots, h_n$, par définition d'une racine multiple, il existe un polynôme Q_2 avec $P = (X-\alpha_1)^{h_1} Q_2$.

Comme $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ne sont pas racines de $(X-\alpha_1)^{h_1}$ (car ce sont des nombres différents de α_1), la première question donne que $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des racines deux à deux distinctes de multiplicités respectives au moins $h_2, \ldots, h_n$ de Q_2, et comme $\deg(Q_2) = \deg(P) - h_1 = k + 1 - h_1 \leq k$, l'hypothèse de récurrence assure l'existence de $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec

$$Q_2 = (X-\alpha_2)^{h_2} \ldots (X-\alpha_n)^{h_n} Q.$$

Et donc

$$\begin{aligned} P &= (X-\alpha_1)^{h_1} Q_2 \\ &= (X-\alpha_1)^{h_1} (X-\alpha_2)^{h_2} \ldots (X-\alpha_n)^{h_n} Q. \end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence forte, l'assertion est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

4.31

1) Si P est un polynôme réel, P', P'' aussi par dérivation, puis par multiplication et addition de polynômes réels, $Q = P'' - 4XP'$ aussi. Donc $Q \in \mathbb{R}[X]$.

De plus, d'après les règles sur le degré,

- $\deg(P'') \leq \deg(P') - 1 \leq \deg(P) - 2$,
- $\deg(-4XP') = \deg(-4X) + \deg(P') = 1 + \deg(P') \leq \deg(P)$,
- comme $\deg(Q) \leq \max\big(\deg(P''), \deg(-4XP')\big)$, on en déduit $\deg(Q) \leq \deg(P)$.

Donc si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(Q) \leq \deg(P) \leq n$, donc on a bien $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

2) En dérivant la relation $(\star)$, on a

$$(H_n'' - 4XH_n')' = -4nH_n',$$

donc $H_n''' - 4H_n' - 4XH_n'' = -4nH_n'$, soit

$$H_n''' - 4XH_n'' = -4(n-1)H_n'.$$

Soit $n \geq 1$. Comme H_n est unitaire de degré n, il s'écrit $a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ avec $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Donc

$$H_n' = a_1 + 2a_2X + \cdots + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + nX^{n-1},$$

H_n' est de degré $n-1$ (car $n \neq 0$) et de coefficient dominant n. Donc $\dfrac{1}{n}H_n'$ est unitaire de degré $n-1$. De plus, en divisant la relation montrée au début de la question par n, on a

$$\left(\frac{1}{n}H_n'\right)'' - 4X\left(\frac{1}{n}H_n'\right)' = -4(n-1)\left(\frac{1}{n}H_n'\right).$$

Par unicité d'un tel polynôme, on obtient $H_{n-1} = \dfrac{1}{n}H_n'$, autrement dit $H_n' = nH_{n-1}$.

Par conséquent, si $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} H_n'' &= (H_n')' \\ &= (nH_{n-1})' \\ &= nH_{n-1}' \\ &= n(n-1)H_{n-2} \end{aligned}$$

Et donc le polynôme $R = H_n - XH_{n-1} + \dfrac{n-1}{4}H_{n-2}$ vaut :

$$\begin{aligned} R &= H_n - X\frac{1}{n}H_n' + \frac{n-1}{4}\frac{1}{n(n-1)}H_n'' \\ &= \frac{1}{4n}(4nH_n - 4XH_n' + H_n'') \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque H_n vérifie $(\star)$.

3) 1 est un polynôme réel de degré 0 unitaire et vérifie $(1)'' - 4X(1)' = 0 = -4 \times 0 \times (1)$, donc par unicité d'un tel polynôme, c'est H_0.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

X est un polynôme réel de degré 1 unitaire et vérifie $X'' - 4X \times X' = -4X = -4 \times 1 \times X$, donc par unicité d'un tel polynôme, c'est H_1.

Pour trouver H_2, puis H_3, on va utiliser la relation de récurrence prouvée à la question précédente :

$$H_2 = XH_1 - \frac{2-1}{4}H_0 = \boxed{X^2 - \frac{1}{4}}$$

$$H_3 = XH_2 - \frac{3-1}{4}H_1 = X^3 - \frac{1}{4}X - \frac{2}{4}X = \boxed{X^3 - \frac{3}{4}X}.$$

4)
```
PROGRAM ecricome2010 ;
VAR u,v,aux :REAL ;k :INTEGER ;
BEGIN
v :=1 ;u :=1 ;
FOR k :=2 TO 2010 DO
    BEGIN
    aux :=u-(k-1)/4*v ;
    v :=u ; u :=aux ;
    END ;
WRITE('La valeur de u(2010) est : ',u) ;
END.
```

4.32

1) $\cos(2\theta) = \boxed{2\cos^2(\theta) - 1}$ et

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta)\\ &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)\\ &= (2\cos^2(\theta) - 1)\cos(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta))\\ &= \boxed{4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}\end{aligned}$$

2.a) Montrons par récurrence double sur n l'assertion P_n : « $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, comme $T_0 = 1$, on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_0(\cos(\theta)) = 1$ et $\cos(0 \times \theta) = \cos(0) = 1$, donc P_0 est vraie.

Pour $n = 1$, comme $T_1 = X$, on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait P_n et P_{n+1} vraies, alors en utilisant la formule définissant T_{n+2}, on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))\\ &\underset{H.R.}{=} 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)\end{aligned}$$

Utilisons alors la formule trigonométrique $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, pour obtenir

$$2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta),$$

et donc en reportant dans $T_{n+2}(\cos(\theta))$, on obtient bien

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta),$$

donc P_{n+2} est vraie.

Conclusion : Par récurrence double, l'assertion P_n est vraie pour tout entier n.

b) Supposons que l'on ait un autre polynôme $U_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $U_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Alors, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$(T_n - U_n)(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta)) - U_n(\cos(\theta)) = 0,$$

donc le polynôme $T_n - U_n$ admet comme racine tout nombre réel qui peut s'écrire $\cos(\theta)$ avec θ dans $\mathbb{R}$, autrement dit tout réel de l'intervalle $[-1, 1]$. Il a donc une infinité de racines, et donc $T_n - U_n = 0$, donc $T_n = U_n$. Donc il y a bien unicité d'un tel polynôme.

c) La définition de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne :

$$\begin{aligned}T_2 &= 2XT_1 - T_0\\ &= \boxed{2X^2 - 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_3 &= 2XT_2 - T_1\\ &= 2X(2X^2 - 1) - X\\ &= \boxed{4X^3 - 3X}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_4 &= 2XT_3 - T_2\\ &= 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1)\\ &= \boxed{8X^4 - 8X^2 + 1}\end{aligned}$$

d) Les calculs de T_1, T_2, T_3 et T_4 suggèrent de montrer par récurrence double pour $n \geq 1$ l'assertion A_n : « T_n est un polynôme de $\boxed{\text{degré } n}$, ayant $\boxed{2^{n-1}}$ comme coefficient dominant et vérifiant $\boxed{T_n(-X) = (-1)^n T_n}$ ».

Initialisation : Pour $n = 1$ et $n = 2$, on vérifie directement que A_1 et A_2 sont vraies, à partir de $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.

Hérédité : Supposons A_n et A_{n+1} vraies pour un certain entier $n \geq 1$. Alors d'après les règles sur le degré,

- $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n + 2$ et
- $\deg(-T_n) = n$,

donc

$$\deg(2XT_{n+1} - T_n) = \max(n+2, n) = n + 2$$

(on est dans le cas où il y a égalité car les degrés des deux polynômes que l'on additionne sont différents).

De plus, comme seul $2XT_{n+1}$ contient un terme non nul en X^{n+2}, le coefficient dominant de T_{n+2} est le coefficient de X^{n+2} de $2XT_{n+1}$, et donc deux fois le coefficient de T_{n+1}, dont $2\times 2^{n+1} = 2^{n+2}$.

Enfin,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) \\ &\underset{H.R.}{=} 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1} - (-1)^n T_n \\ &= (-1)^{n+2}(2XT_{n+1} - T_n) \\ &= (-1)^{n+2}T_{n+2} \end{aligned}$$

puisque $(-1)\times(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$ et $(-1)^n = (-1)^{n+2}$. Donc A_{n+2} est bien vraie.

Conclusion : Par récurrence double, l'assertion A_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

On en déduit que si n est pair, T_n est une fonction paire, et si n est impair, T_n est une fonction impaire.

Remarque – L'assertion A_0 est fausse car le coefficient de T_0 est 1 et non 2^{-1}.

e) De la définition de la suite (T_n), on a pour tout entier n,

$$T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$$

avec $T_0(1) = T_1(1) = 1$. On constate alors que la suite $(T_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout entier n,

$$T_n(1) = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n$$

Pour $n = 0$, on a donc $\lambda = T_0(1) = 1$, et pour $n = 1$ on a $\lambda + \mu = T_1(1) = 1$, donc $\mu = 0$. Donc, pour tout entier n, $\boxed{T_n(1) = 1}$.

Remarque – On aurait aussi pu montrer ce résultat par récurrence double sur n.

3) Soit $x \in [-1, 1]$ une racine de T. Comme $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ avec $x = \cos(\theta)$, et donc

$$0 = T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $n\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Donc les racines dans $[-1, 1]$ de T_n sont les nombres

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)}$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

T_n étant de degré n, il a au plus n racines deux à deux distinctes. Prouvons que les valeurs x_k obtenues pour $0 \leq k \leq n-1$ sont deux à deux distinctes, ce qui nous fera n racines distinctes pour T_n :

$$0 < \frac{\pi}{2n} < \frac{3\pi}{2n} < \cdots < \frac{2(n-1)+1}{2n}\pi = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi,$$

et cos est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) > \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) > \cdots > \cos\left(\frac{2(n-1)+1}{2n}\pi\right)$$

ce qui donne bien $x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1}$, donc les x_k, pour $0 \leq k \leq n-1$, sont bien deux à deux distincts.

Donc $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ sont n racines deux à deux distinctes de T_n, et elles se trouvent dans $[-1, 1]$.

Comme $\deg(T_n) = n$ et que l'on a trouvé n racines réelles deux à deux distinctes de T_n, et comme la somme des multiplicités des racines complexes de T_n fait son degré (donc n) ne peut avoir d'autres racines (réelles ou complexes) que les x_k, et ces racines sont toutes de multiplicité 1, donc simples.

4)

$$\begin{aligned} T_3 &= 4X^3 - 3X \\ &= X(4X^2 - 3) \\ &= X(2X - \sqrt{3})(2X + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

donc les racines de T_3 sont $\boxed{0}$, $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Si l'on part de l'expression des x_k, les racines de T_3 sont

$$x_0 = \cos\left(\frac{2\times 0 + 1}{2\times 3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_1 = \cos\left(\frac{2\times 1 + 1}{2\times 3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0 \text{ et}$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{2\times 2 + 1}{2\times 3}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.33

1) Sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$, f est constante, donc de classe C^∞. Sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, f est définie par la formule $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$, or $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc par composition, f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

2) ⋆ On va montrer l'existence de P_n par récurrence sur n : notons A_n l'assertion « il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, on cherche un polynôme P_0 tel que $\forall x > 0$,

$$f^{(0)}(x) = P_0\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = P_0\left(\frac{1}{x}\right)f(x).$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Or, $f^{(0)}(x) = f(x)$, donc le polynôme $P_0 = 1$ convient.

Hérédité : Supposons A_n vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors, $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &\underset{H.R.}{=} \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Posons alors $\boxed{P_{n+1} = -X^2P_n' + X^2P_n}$, c'est bien un polynôme réel, puisque par hypothèse de récurrence, P_n en est un, et il vérifie bien que $\forall x > 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}},$$

donc A_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par l'axiome de récurrence, A_n est vraie pour tout entier n.

⋆ Montrons l'unicité d'un tel polynôme : supposons qu'il existe $(P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) = Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}$ est racine du polynôme $P_n - Q_n$, mais comme tout élément y de $]0, +\infty[$ peut s'écrire $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$ (on prend $x = \frac{1}{y}$), alors tout élément de $]0, +\infty[$ est racine de $P_n - Q_n$, donc $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul. Donc $P_n = Q_n$, d'où l'unicité.

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0)$, on en déduit bien que f est continue en 0.

Regardons alors le taux d'accroissement de f en 0 : si $x < 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$.

Si $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$. Faisons alors le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, qui va nous permettre de reconnaître une limite usuelle : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$.

On peut donc en conclure que f est dérivable en 0 et que $\boxed{f'(0) = 0}$.

4) Montrons par récurrence sur n l'assertion « f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ » (on sait déjà que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}^*$, donc il suffit de regarder en 0).

Initialisation : pour $n = 0$, être de classe C^0 c'est être continue. La question 1 a montré que f était continue sur $\mathbb{R}^*$, et la question précédente a montré que f était continue en 0. Donc f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que f soit de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$.

Donc $f^{(n-1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a vu que f était de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, donc $f^{(n-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Or, d'après la question 2, on sait qu'il existe un polynôme réel P_n avec : $\forall x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

Faisons le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$:

$$f^{(n)}(x) = P_n(t)e^{-t}.$$

Puis, si $x \to 0^+$, alors $t \to +\infty$. Donc, si P_n est non nul, que $p = \deg(P_n)$, et α est son coefficient dominant, alors on a

$$P_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \alpha t^p,$$

et donc

$$P_n(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \alpha t^p e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cette limite reste vraie si $P_n = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$.

Comme pour $x < 0$, on a $f^{(n)}(x) = 0$, cela donne $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

Toutes les hypothèses du théorème de prolongement de la dérivée ont été vérifiées, on peut donc en conclure que $f^{(n-1)}$ est dérivable en 0, que $(f^{(n-1)})'$ est continue en 0 et de plus $f^{(n)}(0) = (f^{(n-1)})'(0) = 0$.

Donc on obtient bien que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : Par axiome de récurrence, on déduit que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, pour tout n, ce qui donne que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

De plus, le calcul de limite que l'on vient de faire donne que $\boxed{f^{(n)}(0) = 0}$ pour tout entier n.

4.34

1) f est bien définie et de classe C^∞ sur I, comme inverse d'une fonction de classe C^∞ qui ne s'annule pas.

2) $\forall x \in I$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, donc $\boxed{P_0 = 1}$ convient.

$\forall x \in I$, $f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ (d'après la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$), donc $\boxed{P_1 = X}$ convient.

Puis, $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\cos(x)\cos^2(x) - \sin(x)2\cos(x)(-\sin(x))}{\cos^4(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + 2\sin^2(x)}{\cos^3(x)} \\ &= \frac{1 + \sin^2(x)}{\cos^3(x)} \end{aligned}$$

(car $\cos^2 + \sin^2 = 1$). Donc $\boxed{P_2 = X^2 + 1}$ convient.

3) Montrons par récurrence sur n : « il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ convient.

Hérédité : Supposons qu'il existe P_n tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$, alors comme $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$, dérivons $f^{(n)}$ comme un quotient. Posons $u(x) = P_n(\sin(x))$ et $v(x) = \cos^{n+1}(x)$, alors $f^{(n)} = \frac{u}{v}$, donc $f^{(n+1)} = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}$.

Or, on a $\forall x \in I$, $u'(x) = \cos(x)P_n'(\sin(x))$, donc

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{v(x)} &= \frac{\cos(x)P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \\ &= \frac{(1-\sin^2(x))P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \end{aligned}$$

et $v'(x) = (n+1)(-\sin(x))\cos^n(x)$, donc

$$\frac{v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{(n+1)\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}.$$

Donc pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = &\frac{(1-\sin^2(x))P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \\ &+ \frac{(n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \end{aligned}$$

On pose $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$, c'est bien un polynôme car par hypothèse de récurrence, P_n en est un, et on a bien $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ pour tout $x \in I$. D'où l'hérédité.

Conclusion : Par axiome de récurrence, l'assertion est vraie pour tout entier n, d'où l'existence de P_n.

De plus on a vu qu'on a la relation
$\boxed{P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n}$.

Remarque – Le polynôme P_n est unique. En effet, si $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$, alors on en déduit que

$$\forall x \in I,\ P_n(\sin(x)) = Q_n(\sin(x)).$$

Donc tout élément de $\sin(I)$ est racine de $P_n - Q_n$. Or, comme il y en a une infinité, puisque $\sin(I) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, et qu'un polynôme ayant une infinité de racines est nécessairement nul, on a bien $P_n - Q_n = 0$, soit $P_n = Q_n$.

4) La relation demandée a déjà été montrée à la question 3.

Pour calculer P_3, on utilise alors cette relation :

$$\begin{aligned} P_3 &= (1-X^2)P_2' + (2+1)XP_2 \\ &= (1-X^2)2X + 3X(X^2+1) \\ &= \boxed{X^3 + 5X} \end{aligned}$$

5) Montrons par récurrence sur n la proposition : « P_n a pour monôme dominant X^n » (c'est à dire P_n est de $\boxed{\text{degré } n}$ et de coefficient dominant $\boxed{1}$).

L'initialisation est faite pour $n = 0$, d'après les calculs fait dans les questions précédentes.

Hérédité : Supposons que $P_n = X^n + Q_n$ avec $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (c'est une façon d'écrire que P_n a pour monôme dominant X^n). Alors $P_n' = nX^{n-1} + Q_n'$, et donc

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1-X^2)(nX^{n-1} + Q_n') + (n+1)X(X^n + Q_n) \\ &= X^{n+1} + Q_{n+1} \end{aligned}$$

en posant

$$Q_{n+1} = (nX^{n-1} + Q_n' - X^2Q_n' + (n+1)XQ_n).$$

Or,

- $\deg(nX^{n-1}) = n-1$ (car $n \neq 0$),
- $\deg(Q_n') \leq n-2$ (car $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$),
- $\deg(X^2Q_n') = 2 + \deg(Q_n') \leq n$,
- $\deg(XQ_n) = 1 + \deg(Q_n) \leq n$,

donc comme le degré d'une somme est inférieure ou égale au maximum des degrés, on a

$$\deg(Q_{n+1}) \leq n,$$

ce qui donne bien que le monôme dominant de P_{n+1} est X^{n+1}.

Conclusion : Par récurrence sur n, on obtient que P_n a X^n comme monôme dominant, pour tout entier naturel n.

4.35

w est une fonction de classe C^∞, comme composée de la fonction exp et d'un polynôme.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $w'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} w'(x) = -e^{x^2}\left(-2xe^{-x^2}\right) = \boxed{2x}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$\forall x \in \mathbb{R}, w''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, donc

$$\begin{aligned} H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2} w''(x) \\ &= e^{x^2}\left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2} \\ &= \boxed{4x^2 - 2} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, w'''(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{2}} + 8xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2} = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}$, donc

$$\begin{aligned} H_3(x) &= (-1)^3 e^{x^2} w'''(x) \\ &= -e^{x^2}(-8x^3 + 12x)e^{-x^2} \\ &= \boxed{8x^3 - 12x} \end{aligned}$$

2.a) Dérivons la relation qui donne H_n (c'est possible, car w est C^∞, donc $w^{(n)}$ aussi, et $x \mapsto e^{x^2}$ aussi) : on dérive un produit, donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= (-1)^n 2xe^{x^2} w^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2} w^{(n+1)}(x) \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$.

b) Montrons par récurrence sur n que « H_n est un polynôme réel de degré n ».

Initialisation : H_0 est un polynôme réel de degré 0, puisque c'est le polynôme constant égal à 1.

Hérédité : supposons que pour un entier n, H_n est un polynôme réel de degré n. Alors par produit, $2XH_n$ est aussi un polynôme réel, et par dérivation H_n' aussi, donc en additionnant, on obtient bien que H_{n+1} est un polynôme réel.

Puis si $\deg(H_n) = n$, alors

- $\deg(2XH_n) = \deg(2X) + \deg(H_n) = 1 + n$ et
- $\deg(H_n') \leq \deg(H_n) - 1 = n - 1$.

Donc, comme $\deg(2XH_n) \neq \deg(H_n')$, on peut affirmer que

$$\begin{aligned} \deg(2XH_n - H_n') &= \max\left(\deg(2XH_n), \deg(H_n')\right) \\ &= \max(n+1, \deg(H_n')) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

car $\deg(H_n') < n + 1$. Donc H_{n+1} est bien de degré $n + 1$. D'où l'hérédité.

Conclusion : La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n.

c)

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, \\ H_1 &= 2XH_0 - H_0' = 2X \times 1 - 0 = 2X, \\ H_2 &= 2XH_1 - H_1' = 2X \times 2X - 2 = 4X^2 - 2, \\ H_3 &= 2X(4X^2 - 2) - (8X) = 8X^3 - 12X, \\ H_4 &= 2X(8X^3 - 12X) - (24X^2 - 12) \\ &= \boxed{16X^4 - 48X^2 + 12} \end{aligned}$$

3) Notons a_n le coefficient dominant de H_n. Comme $\deg(H_n') < \deg(2XH_n)$, le coefficient dominant de $2XH_n - H_n'$ (c'est à dire de H_{n+1}, donc a_{n+1}) est celui de $2XH_n$, donc celui de H_n (c'est à dire a_n) multiplié par 2. Donc pour tout entier n, $a_{n+1} = 2a_n$, on reconnaît donc une suite géométrique, et comme $a_0 = 1$ (car $H_0 = 1$), on a pour tout entier n, $\boxed{a_n = 2^n}$.

4) Montrons que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = (-1)^n H_n(x),$$

par récurrence sur n.

Initialisation : pour $n = 0$, $H_0(-x) = 1$, et $(-1)^0 H_0(x) = 1 \times 1 = 1$, donc c'est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que la formule $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ soit vraie pour tout réel x. On peut alors la dériver, et on obtient (en dérivant $H_n(-x)$ comme une fonction composée !) que

$$-H_n'(-x) = (-1)^n H_n'(x),$$

soit $H_n'(-x) = (-1)^{n-1} H_n'(x) = (-1)^{n+1} H_n'(x)$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a (par la formule de la question 2.a.) :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(-x) &= 2(-x)H_n(-x) - H_n'(-x) \\ &= 2(-x)(-1)^n H_n(x) - (-1)^{n+1} H_n'(x) \\ &= (-1)^{n+1}[2xH_n(x) - H_n'(x)] \\ &= (-1)^{n+1} H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

d'où la formule au rang $n + 1$.

Conclusion : Par récurrence sur l'entier n, on obtient bien que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$, autrement dit,

- H_n est une fonction paire si n est un entier pair,
- H_n est une fonction impaire si n est un entier impair.

4.36

1.a) Supposons $p \geq 2$. On a $Q = X^2P'' + P'' + 4P' - 2P$. Ecrivons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ (avec $a_p \neq 0$, puisque $p = \deg(P)$), alors

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_{k+1} X^k \text{ et} \\ P'' &= \sum_{k=2}^{p} k(k-1) a_k X^{k-2}, \end{aligned}$$

donc $X^2P'' = \sum_{k=2}^{p} k(k-1)a_k X^k = \sum_{k=0}^{p} k(k-1)a_k X^k$ (car les termes pour $k = 0$ et $k = 1$ de cette somme sont nuls). On aura aussi besoin de réécrire P'' sous la forme $P'' = \sum_{k=0}^{p-2} (k+2)(k+1)a_{k+2} X^k$.

Alors, en reportant, on a

$$\begin{aligned} Q = &\sum_{k=0}^{p} k(k-1)a_k X^k \\ &+ \sum_{k=0}^{p-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k \\ &+4\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)a_{k+1}X^k - 2\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \end{aligned}$$

Donc $Q = (p(p-1)-2)a_pX^p + ((p-1)(p-2)a_{p-1} + 4pa_p - 2a_{p-1})X^{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2}(k(k-1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} + 4(k+1)a_{k+1} - 2a_k)X^k$.

Comme p est le plus grand degré apparaissant, $\deg(Q) \leq p$, et comme le coefficient de X^p est $(p(p-1)-2)a_p = (p^2-p-2)a_p = (p-2)(p+1)a_p$ et qu'il ne s'annule que pour $p = 2$ (car p positif et $a_p \neq 0$), si $p > 2$, on a bien $\deg(Q) = p$.

Si $p = 2$, le coefficient devant X^p est nul, et donc dans l'expression de Q, la plus grande puissance de X qui apparaît est X^{p-1}, donc on a bien $\deg(Q) < p$.

b) D'après la question précédente, si Q est de degré 2, cela force que $\deg(P) \leq 1$.

Mais, si $P(X) = aX + b$, alors $P' = a$ et $P'' = 0$, et donc $Q = -2aX + (4a - 2b)$ n'est pas de degré 2. Donc Q n'est jamais de degré 2.

Remarquons que si $0 \leq p = \deg(P) \leq 1$, le calcul précédent donne que le coefficient dominant de Q est celui de P multiplié par $(p-2)(p+1)$.

2.a) L'équation 1 revient à demander à ce que Q soit nul, donc tous les coefficients de Q doivent être nuls, et d'après le calcul précédent, le coefficient de X^p (où $p = \deg(P)$ est entier, puisque l'on cherche P non nul) est celui de P multiplié par $(p-2)(p+1)$, donc n'est nul que pour $p = 2$. Donc si P est solution de l'équation 1, alors P est de degré 2.

b) Il faut donc chercher P sous la forme

$$P = aX^2 + bX + c.$$

On a alors $P' = 2aX + b$ et $P'' = 2a$, donc $(X^2+1)P'' + 4P' - 2P = 2a(X^2+1) + 8aX + 4b - 2aX^2 - 2bX - 2c = (8a-2b)X + 2a + 4b - 2c = 0$.

Or un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc

$$(X^2+1)P'' + 4P' - 2P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8a - 2b = 0 \\ 2a + 4b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ c = 9a \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation (1) sont les polynômes $\boxed{P = aX^2 + 4aX + 9a = a(X^2 + 4X + 9)}$ avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

3.a) Cherchons $P = aX + b$ solution de l'équation (2) :

$P' = a$ et $P'' = 0$, donc

$$\begin{aligned}(X^2+1)P'' + 4P' - 2P &= 4a - 2aX - 2b \\ &= -2aX + (4a - 2b)\end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même coefficients, donc

$$(X^2+1)P'' + 4P' - 2P = X \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{P_1 = -\frac{1}{2}X - 1}$ est solution.

b) Il y a une équivalence à montrer, donc deux implications.

Supposons que P soit solution de l'équation (2), alors comme P_1 est aussi solution de l'équation (2), on peut écrire : $(X^2 + 1)P'' + 4P' - 2P = X = (X^2 + 1)P_1'' + 4P_1' - 2P_1$, donc en soustrayant :

$$(X^2 + 1)(P'' - P_1'') + 4(P' - P_1') - 2(P - P_1) = 0.$$

Comme $P'' - P_1'' = (P - P_1)''$ et $P' - P_1' = (P - P_1)'$, on obtient bien que $P - P_1$ est solution de l'équation (1).

Réciproquement, supposons que $P - P_1$ soit solution de l'équation (1). Alors

$$(X^2 + 1)(P - P_1)'' + 4(P - P_1)' - 2(P - P_1) = 0,$$

donc on a aussi

$$(X^2 + 1)(P'' - P_1'') + 4(P' - P_1') - 2(P - P_1) = 0,$$

donc en séparant, on a bien $(X^2 + 1)P'' + 4P' - 2P = (X^2 + 1)P_1'' + 4P_1' - 2P_1 = X$ (car P_1 est solution de l'équation (2)), et donc P est bien solution de l'équation (2).

c) Les solutions de l'équation (2) sont donc les polynômes $\boxed{P = -\frac{1}{2}X - 1 + a(X^2 + 4X + 9)}$ avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Systèmes linéaires

CHAPITRE 5

Plan

5.1 Définitions 124
5.2 Opérations élémentaires 125
5.3 Mise en œuvre de la méthode du pivot de Gauss 125
Synthèse 130
Tests et exercices 131
Corrigés des exercices 132

Introduction

Nous allons introduire la notion de système linéaire et décrire la résolution d'un tel système par la méthode du pivot de Gauss. Ce procédé de résolution présente l'avantage d'être facile à mettre en œuvre et systématique.

Prérequis

- Calculs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Objectifs

- Mener à bien la résolution d'un système linéaire par une méthode systématique ne demandant pas de génie, ni d'invention.

5.1 Définitions

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition – *Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$; Un* **système linéaire de n équations à p inconnues** *est un système (S) de la forme :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{où pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{ij} \in \mathbb{K}, b_i \in \mathbb{K}.$$

- $x_1, x_2, \cdots, x_p$ *sont les* **inconnues** *du système (S) ;*
- *les a_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ sont les* **coefficients** *du système (S) ;*
- $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ *est appelé* **second membre** *du système (S).*

Notation – Dans la suite du chapitre, on représentera le système (S) sous la forme d'un tableau de nombres, en ne retenant que les coefficients qui figurent devant les inconnues et en séparant le second membre par un trait vertical :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

Chaque ligne du tableau correspond à une équation du système (S).

- Le système est dit **homogène** lorsque le second membre est nul.
- Le **système homogène associé** *à* (S) est le système obtenu en remplaçant le second membre par $(0, 0, \cdots, 0)$.
- Un p-uplet $\left(s_1, s_2, \cdots, s_p\right)$ est **solution** de (S) si et seulement si les n égalités obtenues en remplaçant $\left(x_1, x_2, \cdots, x_p\right)$ par $\left(s_1, s_2, \cdots, s_p\right)$ sont vraies.
- Deux systèmes sont **équivalents** si et seulement s'ils ont le même ensemble de solutions.
- Un système est dit **impossible** si et seulement s'il n'admet aucune solution, **indéterminé** s'il possède strictement plus d'une solution.

5.2 Opérations élémentaires

Définition – *On note $L_1, L_2, \cdots, L_n$ les n lignes du système (S). On appelle* **opération élémentaire sur les lignes du système** *(S) toute opération du type :*

- $L_i \leftrightarrow L_j \quad$ où $i \neq j$ *: on échange les deux lignes L_iet L_j.*
- $L_i \leftarrow \alpha L_i \quad$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$ *: on multiplie L_i par le scalaire non nul α.*
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad$ où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: *on ajoute à L_i un multiple d'une autre ligne L_j.*

Proposition – *Quand on effectue des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire, on obtient un système équivalent.*

Opérations déduites des précédentes :

1. $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j \quad$ où $i \neq j \quad$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$
 En effet, on effectue d'abord $L_i \leftarrow L_i + \frac{\beta}{\alpha} L_j \quad$ puis $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
2. $L_i \leftarrow L_i + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \lambda_j L_j$ où $\lambda_j \in \mathbb{K}$

Par exemple, $L_i \leftarrow \sum_{j=1}^{n} L_j$: on remplace une ligne par la somme des lignes lorsque celle-ci est simple.

Pour que cette opération conduise à un système équivalent, le **coefficient α de la ligne que l'on remplace** ne doit pas s'annuler. Cela est facile à vérifier lorsque les coefficients du système sont constants. Lorsqu'ils font intervenir un paramètre m, il faut discuter suivant les valeurs de m qui annulent α (qui peut alors être fonction de m).

5.3 Mise en œuvre de la méthode du pivot de Gauss

Ce paragraphe se propose d'illustrer la méthode du pivot sur quelques exemples.

5.3.1 Exemple 1

Énoncé – Résoudre dans $\mathbb{K}$ le système (S1) $\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x - y = -1 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Solution – Le système se réécrit sous forme de tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Echangeons L_1 et L_2 afin de placer un nombre plus simple en haut et à gauche. On va être amené à diviser par ce nombre (ici 1) pour obtenir des zéros en-dessous dans la même colonne ; ce nombre est appelé **pivot** : **le pivot ne doit pas pouvoir s'annuler**.

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Grâce à des opérations du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, créons des zéros en-dessous du pivot :

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

En raisonnant de façon analogue sur les deux dernières lignes, et en choisissant le coefficient 3 comme nouveau pivot, on effectue l'opération $L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_2$. Notons que cette opération est licite car le coefficient 3 devant la ligne que l'on remplace est non nul.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

On revient au système :

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 3y + z = 1 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

Ce système, échelonné, se résout facilement en partant de la troisième ligne et en reportant les valeurs trouvées dans les lignes au-dessus :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Le système (S1) possède un unique triplet solution, à savoir $(-1, 0, 1)$.
L'ensemble des solutions est alors $\{(-1, 0, 1)\}$

5.3.2 Exemple 2

Énoncé – Résoudre dans $\mathbb{K}$ le système (S2) $\begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ x + y - z = 1 \\ 7x + y + 5z = 1 \end{cases}$

Le système se réécrit sous forme de tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Solution – Créons des zéros en-dessous du pivot de la première colonne :

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -16 & 8 \end{array}\right)$$

On utilise le pivot indiqué, puis on divise L_2 par $2 \neq 0$:

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système s'écrit donc :

$$\begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ \quad y - 2z = 1 \end{cases}$$

Il se résout en :

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

Le système (S2) possède une infinité de solutions qui s'expriment, ici, à l'aide de l'inconnue z, que nous appellerons **inconnue secondaire**. x et y sont appelées, dans cette résolution, **inconnues principales**. Les solutions s'écrivent en exprimant les inconnues principales en fonction de l'inconnue secondaire (ou le cas échéant, des inconnues secondaires) qui figurent de cette façon dans la solution. Suivant le mode de résolution choisi, les inconnues principales et secondaires peuvent différer.

L'ensemble des solutions est : $\{(-z, 2z + 1, z) \,|\, z \in \mathbb{K}\}$.

5.3.3 Exemple 3

Énoncé – Résoudre dans $\mathbb{K}$ le système (S3) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ 5x + 3y - z = 3 \end{cases}$

Solution – Procédons de façon analogue aux exemples précédents :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Le système (S3) est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad -zy + 4z = 2 \\ \quad 0 = -1 \end{cases}$$

La troisième équation étant manifestement fausse, ce système n'a pas de solution.

Ce type d'équation dans laquelle plus aucune inconnue ne figure est appelée **équation de compatibilité**. Le système admet au moins une solution si et seulement si toutes les équations de compatibilité sont des énoncés vrais.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

5.3.4 Méthode du pivot de Gauss

Soient n et p dans $\mathbb{N}*$. On part d'un système (S) de n équations à p inconnues ayant au moins un coefficient non nul a_{ij}.

Étape 1

En changeant éventuellement l'ordre des équations et en renumérotant les inconnues, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$. a_{11} est le premier pivot.

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right\}$$

On effectue les combinaisons linéaires de lignes suivantes pour $i \in [\![2, n]\!]$:

$$L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$$

et on obtient un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{2p}} & \overline{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overline{a_{n2}} & \dots & \overline{a_{np}} & \overline{b_n} \end{array}\right\}$$

A cette étape, on examine les différentes lignes :

- Lorsque tous les coefficients $\overline{a_{k2}}, \cdots, \overline{a_{kp}}$ de la $k^{\text{ième}}$ ligne sont nuls, mais que $\overline{b_k} \neq 0$, cette ligne s'écrit $0 = \overline{b_k}$ (c'est une équation de compatibilité). L_k correspond à un énoncé faux, le système n'a alors pas de solution. La résolution est terminée.
- Lorsque tous les coefficients $\overline{a_{k2}}, \cdots, \overline{a_{kp}}$ de la $k^{\text{ième}}$ ligne sont nuls, et que $\overline{b_k} = 0$, L_k s'écrit $0 = 0$; cette ligne qui correspond à un énoncé vrai, est donc inutile, on la supprime. On en fait autant pour toutes les lignes qui sont de ce type. On passe à la deuxième étape.

Étape 2

On recommence alors à l'étape 1 avec le système (S') extrait du système (S) :

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{2p}} & \overline{b_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n'2} & \dots & \overline{a_{n'p}} & \overline{b_{n'}} \end{array}\right\}$$

qui comporte strictement moins de lignes et de colonnes que (S), i.e. $n' \leq n$.

La taille du système diminuant à chaque étape, on est assuré que ce processus se termine. Il permet :

- soit de conclure que le système n'a pas de solution ;

- soit, dans le cas contraire, de transformer le système (S) en un système triangulaire que l'on résout de proche en proche, en partant de la dernière ligne et en remontant. Comme on n'a effectué que des opérations licites sur les lignes de (S), le système obtenu lui est équivalent et a le même ensemble de solutions.

 On peut être amené, lorsque le système final comporte plus d'inconnues que d'équations, à fixer des inconnues secondaires en fonction desquelles les solutions seront exprimées, le système est alors indéterminé (*cf* exemple 2).

Remarque – La méthode décrite ci-dessus est systématique et aboutit à coup sûr. Cependant, ce n'est pas toujours celle qui minimise les calculs.

5.3.5 Exemple d'équation avec un paramètre

Énoncé – Soit m un paramètre complexe. On cherche à résoudre le système (S_m) dans $\mathbb{C}$, suivant les valeurs de m :

$$(S_m) \quad \begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (m+1)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

Solution – Passons à l'écriture sous forme de tableau et mettons en œuvre la méthode du pivot avec les opérations indiquées :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ m+1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -m & 3 & m+2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + mL_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ m+2 & 0 & 3-m & m+2 \\ m+2 & 0 & 3+m-m^2 & (m+2)(m+1) \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ m+2 & 0 & 1-m & m+2 \\ 0 & 0 & 2m-m^2 & m(m+2) \end{array}\right)$$

Revenons à l'écriture sous forme de système :

$$\begin{cases} x + 1y + (1-m)z = m+2 \\ (m+2)x + (3-m)z = m+2 \\ \left(2m-m^2\right)z = m(m+2) \end{cases}$$

On est amené à diviser par les expressions en bleu pour résoudre le système. Il convient par conséquent de distinguer des cas suivant leur nullité. Les valeurs de m conduisant à des cas particuliers sont 0, 2 et (-2).

D'où la discussion suivante :

1er cas : $m = 0$

$$(S_0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3}(4-x) \\ z = \dfrac{2}{3}(1-x) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\left(x, \dfrac{1}{3}(4-x), \dfrac{2}{3}(1-x)\right) | x \in \mathbb{C}\right\}$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

2e cas : $m = 2$

$(S_2) \quad \Rightarrow 0 = 8(L_3)$

Le système n'a pas de solution.

3e cas : $m = -2$

$$(S_{-2}) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(-y, y, 0) \,|\, y \in \mathbb{C}\}$

4e cas : $m \notin \{0, 2, -2\}$

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} y = m + 2 - x + (m-1)z \\ x \quad = 1 + \dfrac{m-3}{m+2}z \\ z = \dfrac{m+2}{2-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m + 2 - 1 - \dfrac{m-3}{2-m} + (m-1)\dfrac{m+2}{2-m} \\ x \quad = 1 + \dfrac{m-3}{2-m} \\ z = \dfrac{m+2}{2-m} \end{cases}$$

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{m+3}{2-m} \\ x = \dfrac{1}{m-2} \\ z = \dfrac{m+2}{2-m} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\left(\dfrac{1}{m-2}, \dfrac{m+3}{2-m}, \dfrac{m+2}{2-m}\right)\right\}$

Synthèse

Savoirs

- Les opérations permises dans la méthode du pivot de Gauss.

Savoir-faire

- Méthode du pivot de Gauss.

Mots-clés

- Système linéaire,
- inconnue,
- second membre,
- système homogène.

Tests de connaissances

5.1

$$\begin{cases} x & & +2z = 2 \\ 2x & -y & +3z = 4 \\ x & -2y & +5z = -2 \end{cases}$$

Par quelles opérations élémentaires commenceriez-vous la méthode du pivot ?

5.2

$$\begin{cases} \lambda x & & +2z = \lambda + 2 \\ x & +2y & = 3 \\ & y & +z = 2 \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow \lambda L_2 - L_1$ transforme-t-elle le système en un système équivalent ?

5.3 Indiquer si $(1, -2, 3)$, $(2, -2, 2)$ sont solutions du système $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + y + z = 2 \\ 6x - y = 8 \end{cases}$.

5.4 La méthode du pivot a permis d'aboutir au système suivant : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

Ecrire l'ensemble des solutions du système de départ.

5.5 Vrai ou faux ?

λ désigne un paramètre réel. On considère le système :

$$\begin{cases} (1 - \lambda)\, x + 3y = 1 \\ 5x + (2 - \lambda)\, y = 0 \end{cases}$$

1) L'opération $L_2 \leftarrow 5L_1 - (1 - \lambda)\, L_2$ est licite dans la méthode du pivot.

2) L'opération $L_1 \leftarrow 5L_1 - (1 - \lambda)\, L_2$ est licite dans la méthode du pivot.

Exercices d'application

5.6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 3x & -y & +z = 5 \\ x & +y & -z = 2 \\ -x & +2y & +z = 3 \end{cases}$$

5.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} x & +2y & -z = 1 \\ & y & +2z = 1 \\ 3x & +7y & -z = 1 \end{cases}$$

5.8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} x & +2y & = -1 \\ 2x & -y & +5z = 3 \\ 3x & & +6z = 3 \end{cases}$$

5.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 2x - 14y + 7z - 7t + 11u = -1 \\ 4x - 10y + 5z - 5t + 7u = 1 \\ x + 2y - z + t - 2u = 1 \\ 2x - 2y + z - t + u = 1 \end{cases}$$

5.10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} -sx & +y & & & = 0 \\ x & -sy & +z & & = 0 \\ & y & -sz & +t & = 0 \\ & & z & -st & = 0 \end{cases}$$

où s est un paramètre réel.

5.11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda^2 z = \alpha \\ \overline{\lambda} x + y + \lambda z = \beta \\ \overline{\lambda}^2 x + \overline{\lambda} y + z = \gamma \end{cases}$$

où λ, α, β, γ sont des paramètres complexes.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

5.1 La deuxième colonne comporte un zéro ; le plus astucieux est donc de commencer par $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$. On peut ensuite échanger L_1 et L_2.

5.2 La réponse est NON. Pour que l'opération transforme le système en un système équivalent, le coefficient de la ligne que l'on remplace (ici L_2) ne doit pas s'annuler. C'est le cas si $\lambda \neq 0$. Mais commencer par cette opération oblige à distinguer 2 cas, qui sont $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$. Il est plus commode de commencer la résolution du système par $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1$.

5.3 On vérifie que $\begin{cases} 1-(-2)+3=6 \\ 1+(-2)+3=2 \\ 6\times 1-(-2)=8 \end{cases}$

$(2,-2,2)$ est donc bien solution du système proposé.

En revanche, $(1,-2,3)$ ne vérifie pas la troisième équation ; en effet, $6\times 2-(-2)=14\neq 8$ et $(2,-2,2)$ n'est donc pas solution du système.

5.4 Le système obtenu est équivalent à $\begin{cases} x=y-1 \\ z=4-2y \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\{(y-1,y,4-2y)\,|y\in\mathbb{R}\}$.

Cependant, comme y et z figurent dans les deux équations, on peut aussi choisir z comme inconnue secondaire. L'ensemble des solutions s'écrit alors : $\left\{\left(1-\frac{z}{2},2-\frac{z}{2},z\right)|z\in\mathbb{R}\right\}$

5.5 **1)** Le coefficient de la ligne L_2 qu'on remplace s'annule pour $\lambda = 1$. L'opération est donc licite pour $\lambda \neq 1$ et illicite pour $\lambda = 1$. C'est donc VRAI pour $\lambda \neq 1$ et FAUX pour $\lambda = 1$.

2) VRAI : Le coefficient de la ligne L_1 qu'on remplace, égal à 5, est non nul, donc cette opération est licite.

5.6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 + \frac{1}{3}L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{12} \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - \frac{1}{3}L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{12} \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{7}{4},\frac{5}{3},\frac{17}{12}\right)\right\}$

5.7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

La troisième équation s'écrit : $0 = -3$; le système est incompatible et n'a pas de solution.

5.8

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions est $\{(1-2z,z-1,z)\,|z\in\mathbb{R}\}$

5.9 Adoptons l'écriture sous forme de tableau :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{L_2}{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A cette étape, le système obtenu est triangulaire et on pourrait le résoudre dès cette étape. Cependant, il est plus simple de

« creuser » un peu plus le haut du tableau.

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{L_2}{9}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{9}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Revenons au système, en n'écrivant pas les lignes 0 = 0 :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3}u = \frac{2}{3} \\ -2y + z - t + \frac{5}{3}u = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Prenons x, z en tant qu'inconnues principales et y, t, u comme inconnues secondaires.

L'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(\frac{2+u}{3},\ y, 2y + t - \frac{5}{3}u - \frac{1}{3},\ t,\ u\right) \middle| (y,t,u) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Cependant, on peut exprimer les solutions à l'aide d'autres inconnues secondaires et les obtenir sous une forme différente.

5.10 Ce système étant homogène, on ne précise pas le second membre qui reste nul tout au long du calcul.

$$\begin{pmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -s & 1 & 0 \\ -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + sL_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1-s^2 & s & 0 \\ 0 & 1 & -s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 1 \\ 0 & 1-s^2 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \left(s^2-1\right)L_2 \begin{pmatrix} 1 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 1 \\ 0 & 0 & s\left(2-s^2\right) & s^2-1 \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \begin{pmatrix} 1 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & s\left(2-s^2\right) & s^2-1 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + s\left(s^2-2\right)L_3 \begin{pmatrix} 1 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & -s^4+3s^2-1 \end{pmatrix}$$

On discute suivant les valeurs qui annulent les coefficients diagonaux :

$$-s^4 + 3s^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow s^4 - 3s^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(s^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } s^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Pour ces valeurs de s, le système équivaut alors à :

$$\begin{cases} x - sy + z = 0 \\ y - sz + t = 0 \\ z - st = 0 \end{cases}$$

donc à

$$\begin{cases} x = \left(s^3 - 2s\right)t \\ y = \left(s^2 - 1\right)t \\ z = st \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z,t) = t\left(s^3 - 2s, s^2 - 1, s, 1\right)$$

Conclusion :

- Si $s \in \left\{-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right\}$
 l'ensemble des solutions est
 $\left\{t\left(s^3 - 2s, s^2 - 1, s, 1\right) | t \in \mathbb{R}\right\}$
- Si $s \notin \left\{-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right\}$
 l'ensemble des solutions est $\{(0,0,0,0)\}$.

5.11

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda^2 & \alpha \\ \overline{\lambda} & 1 & \lambda & \beta \\ \overline{\lambda}^2 & \overline{\lambda} & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \overline{\lambda}L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda^2 & \alpha \\ \overline{\lambda} & 1 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & 1-\lambda\overline{\lambda} & \gamma - \overline{\lambda}\beta \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \overline{\lambda}L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda^2 & \alpha \\ 0 & 1-\lambda\overline{\lambda} & \lambda\left(1-\lambda\overline{\lambda}\right) & \beta - \overline{\lambda}\alpha \\ 0 & 0 & 1-\lambda\overline{\lambda} & \gamma - \overline{\lambda}\beta \end{array}\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

1er cas : $\lambda\overline{\lambda} = 1$ et $\beta = \overline{\lambda}\alpha$ et $\gamma = \overline{\lambda}^2\alpha$

L_2 et L_3 s'écrivent $0 = 0$. Le système est équivalent à sa première ligne et a pour ensemble de solutions :

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x + \lambda y + \lambda^2 z = \alpha\right\}$$

2e cas : $\lambda\overline{\lambda} = 1$ et $\left(\beta \neq \overline{\lambda}\alpha \text{ ou } \gamma \neq \overline{\lambda}\beta\right)$

Le système n'a pas de solution.

3e cas : $\lambda\overline{\lambda} \neq 1$

Effectuons encore deux opérations pour simplifier les coefficients :

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda\overline{\lambda}}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha - \dfrac{\lambda}{1-\lambda\overline{\lambda}}\left(\beta - \overline{\lambda}\alpha\right) \\ 0 & 1-\lambda\overline{\lambda} & \lambda\left(1-\lambda\overline{\lambda}\right) & \beta - \overline{\lambda}\alpha \\ 0 & 0 & 1-\lambda\overline{\lambda} & \gamma - \overline{\lambda}\beta \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha - \dfrac{\lambda}{1-\lambda\overline{\lambda}}\left(\beta - \overline{\lambda}\alpha\right) \\ 0 & 1-\lambda\overline{\lambda} & 0 & \beta - \overline{\lambda}\alpha - \lambda\left(\gamma - \overline{\lambda}\beta\right) \\ 0 & 0 & 1-\lambda\overline{\lambda} & \gamma - \overline{\lambda}\beta \end{array}\right)$$

Le système équivaut à :

$$\begin{cases} x = \alpha - \lambda\dfrac{\beta - \overline{\lambda}\alpha}{1-\lambda\overline{\lambda}} \\ \left(1-\lambda\overline{\lambda}\right)y = \beta\left(1+\lambda\overline{\lambda}\right) - \overline{\lambda}\alpha - \lambda\gamma \\ \left(1-\lambda\overline{\lambda}\right)z = \gamma - \overline{\lambda}\beta \end{cases} \text{ puis à}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha - \lambda\beta}{1-\lambda\overline{\lambda}} \\ y = \dfrac{\beta\left(1+\lambda\overline{\lambda}\right) - \overline{\lambda}\alpha - \lambda\gamma}{1-\lambda\overline{\lambda}} \\ z = \dfrac{\gamma - \overline{\lambda}\beta}{1-\lambda\overline{\lambda}} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(\frac{\alpha - \lambda\beta}{1-\lambda\overline{\lambda}}, \frac{\beta\left(1+\lambda\overline{\lambda}\right) - \overline{\lambda}\alpha - \lambda\gamma}{1-\lambda\overline{\lambda}}, \frac{\gamma - \overline{\lambda}\beta}{1-\lambda\overline{\lambda}}\right)\right\}$$

Espaces vectoriels

CHAPITRE 6

Plan

6.1 Structure d'espace vectoriel 135
6.2 Sous-espaces vectoriels 137
6.3 Familles de vecteurs 143
6.4 Somme de sous-espaces vectoriels 149
Synthèse 153
Tests et exercices 154
Corrigés des exercices 156

Introduction

Nous allons introduire la structure d'espace vectoriel, mettre en évidence les principaux espaces vectoriels connus. Nous appliquerons les théorèmes de ce chapitre aussi bien aux espaces vectoriels du cours d'algèbre qu'aux espaces de suites et de fonctions tirés du cours d'analyse.

Prérequis

- Polynômes.
- Méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires.

Objectifs

- Définir la structure d'espace vectoriel.
- En expliciter les premières propriétés.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Structure d'espace vectoriel

6.1.1 Définition

Soit E un ensemble, $+$ une opération interne sur E appelée **addition,** c'est-à-dire une application $\left|\begin{array}{l} E \times E \to E \\ \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \mapsto \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \end{array}\right.$ et $\cdot$ une multiplication externe sur E, c'est-à-dire une application $\left|\begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \to E \\ \left(\alpha, \overrightarrow{x}\right) \mapsto \alpha \cdot \overrightarrow{x} \end{array}\right.$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** ou **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** si et seulement si :

- L'addition possède dans E les propriétés suivantes :

a) $\forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in E^2, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$: la loi $+$ est *commutative*.

b) $\forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right) \in E^3, \left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \left(\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}\right)$: la loi $+$ est *associative*.

c) L'addition possède dans E un **élément neutre**, i.e.

$\exists \overrightarrow{O_E} \in E / \forall \overrightarrow{x} \in E, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{O_E} = \overrightarrow{O_E} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

d) Tout élément de E possède dans E un **symétrique pour l'addition** ou **opposé** i.e.
$\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists \overrightarrow{x'} \in E / \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'} = \overrightarrow{x'} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{O_E}$
$\overrightarrow{x'}$ est noté $-\overrightarrow{x}$.

• Les propriétés suivantes reliant l'addition et la loi $\cdot$ sont vérifiées :
$\forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,$
e) $\alpha \cdot \left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right) = \alpha \cdot \overrightarrow{x} + \alpha \cdot \overrightarrow{y}$
f) $(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{x} = \alpha \cdot \overrightarrow{x} + \beta \cdot \overrightarrow{x}$
g) $(\alpha\beta) \cdot \overrightarrow{x} = \alpha \cdot \left(\beta \cdot \overrightarrow{x}\right)$
h) $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$.

Remarque – Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel est une question fréquente. Pour y répondre, on utilisera la méthode décrite à la page 139 et non pas cette définition.

Vocabulaire – Les éléments de l'espace vectoriel E sont appelés **vecteurs**, on les notera $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, ...$ dans le début de ce cours, puis $x, y, z, ...$
Les éléments de $\mathbb{K}$ i.e. les réels ou les complexes, sont appelés **scalaires**, on les notera par des lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, ...$
$\overrightarrow{O_E}$, élément neutre pour l'addition, est appelé **vecteur nul de** E.

6.1.2 Autres règles de calcul

• $\forall \overrightarrow{x} \in E, 0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}_E,$
• $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha \cdot \overrightarrow{O}_E = \overrightarrow{O}_E$
• $\forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \begin{cases} \alpha \cdot \left(-\overrightarrow{x}\right) = (-\alpha) \cdot \overrightarrow{x} = -\left(\alpha \cdot \overrightarrow{x}\right) \\ (\alpha - \beta) \cdot \overrightarrow{x} = \alpha \cdot \overrightarrow{x} - \beta \cdot \overrightarrow{x} \\ \alpha \cdot \left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\right) = \alpha \cdot \overrightarrow{x} - \alpha \cdot \overrightarrow{y} \end{cases}$
• $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall \overrightarrow{x} \in E, \left[\alpha \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}_E \Leftrightarrow \left(\alpha = 0 \text{ ou } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}_E\right)\right]$

6.1.3 Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

Rappel – Si K est un ensemble quelconque, $K \times K = \{(x, y) \,|\, x \in K, y \in K\}$.
Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$K^n = \underbrace{K \times K \times \cdots \times K}_{n \text{ fois}} = \{(x_1, \cdots, x_n) \,|\, x_1 \in K, \cdots, x_n \in K\}$$

Exemple 1

$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni des opérations suivantes :
$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K},$
$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
$\alpha \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$

Remarque – On remarquera qu'à droite du signe =, il s'agit de l'addition et de la multiplication usuelle des réels ou des complexes, alors qu'à gauche, + et $\cdot$ désignent les opérations de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Exemple 2

$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où + et $\cdot$ désignent les opérations usuelles sur les polynômes.

Remarque – + et · à droite du signe = désignent les opérations de l'espace vectoriel E, alors qu'à gauche, elles désignent les opérations de E^F que l'on est en train de définir.

Exemple 3

Si F est un ensemble quelconque (i.e. ne possédant pas nécessairement une structure), si E est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^F désigne **l'ensemble de toutes les applications de F dans E**.

On définit alors sur E^F les opérations + et · suivantes :

$$\forall (f,g) \in \left(E^F\right)^2, \forall a \in F, \quad (f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$\forall f \in E^F, \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall a \in F, \quad (\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$$

Alors $\left(E^F, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

C'est en particulier le cas si $E = \mathbb{K}$.

Exemple 4

$\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$, ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

En effet, si on choisit dans l'exemple **3** $F = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{K}$, E^F est alors l'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$.

De façon tout à fait analogue, si J désigne une partie de $\mathbb{N}$, $\left(\mathbb{K}^J, +, \cdot\right)$, ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ indexées par J, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Notation – Lorsque l'on a l'habitude de manipuler les espaces vectoriels, on écrit indifféremment :

« $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel » ou bien « E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ».

En effet, les opérations sont toujours l'addition de E et la multiplication d'un élément de E par un scalaire.

Souvent, on ne précise pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on écrit : « E est un espace vectoriel » au lieu de : « $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel » lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

6.2 Sous-espaces vectoriels

6.2.1 Combinaison linéaire

Définition – Combinaison linéaire

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p entier naturel non nul, et $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}$ p vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire des vecteurs** $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}$ *tout vecteur de E s'écrivant sous la forme :*

$$\lambda_1 \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \overrightarrow{x_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{x_p} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{x_i}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ désignent des scalaires.

6.2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition – *Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E.*

On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** $(E, +, \cdot)$ *(noté SEV dans la suite) si et seulement si F est non vide et stable par combinaison linéaire.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

C'est-à-dire F est non vide et toute combinaison linéaire de vecteurs de F est un vecteur de F.

Théorème – Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E.
F est un SEV de $(E,+,\cdot)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

$$\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in F \end{cases}$$

$$\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}^2, \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F \end{cases}$$

$$\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) \in F^2, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F \quad (F \text{ stable par l'addition}) \\ \forall \overrightarrow{u} \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda\overrightarrow{u} \in F (F \text{ stable par la multiplication par un scalaire}) \end{cases}$$

On admet l'équivalence de ces énoncés, facile à démontrer.

Proposition – *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Si F est un SEV de $(E,+,\cdot)$, alors $\overrightarrow{0_E} \in F$.*
2. *Une intersection de SEV de E est un SEV de E.*

Démonstration

1. Soit F est un SEV de $(E,+,\cdot)$, $F \neq \emptyset$, donc on peut trouver dans F un vecteur $\overrightarrow{x}$.
 F étant stable par la multiplication par un réel, $0 \cdot \overrightarrow{x} \in F$, soit $\overrightarrow{0}_E \in F$.
2. Nous allons montrer cette propriété pour une famille finie $\left(F_1, F_2, ..., F_p\right)$ de SEV de E, où $p \in \mathbb{N}^*$.
 D'après 1., $\forall i \in [\![1,p]\!], \overrightarrow{0}_E \in F_i$; ceci signifie que $\overrightarrow{0}_E \in \bigcap_{i=1}^{p} F_i$; donc $\bigcap_{i=1}^{p} F_i \neq \emptyset$.
 Soient $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right) \in \left[\bigcap_{i=1}^{p} F_i\right]^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, alors F_i étant un SEV de $(E,+,\cdot)$ est stable par combinaison linéaire, donc $\forall i \in [\![1,p]\!], \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y} \in F_i$.
 Ceci se traduit par : $\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y} \in \bigcap_{i=1}^{p} F_i$.
 On a prouvé que $\bigcap_{i=1}^{p} F_i$ est stable par combinaisons linéaires.
 $\bigcap_{i=1}^{p} F_i$ est donc un SEV de E. ■

Théorème – Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E.
F est un SEV de $(E,+,\cdot)$ si et seulement si $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration
F est inclus dans E, donc les propriétés a b c d e f g h de la définition d'un espace vectoriel, vraies dans E, le sont aussi dans F.
Ainsi $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si et seulement si F est stable par + et $\cdot$ i.e. si et seulement si F est un SEV de $(E,+,\cdot)$. ■
Cette proposition est extrêmement utile pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel.

Méthode 1 Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

1. On constate d'abord que F est inclus dans un « grand » espace vectoriel E connu (cf exemples fondamentaux d'espaces vectoriels).
2. On prouve ensuite que F est un SEV de $(E, +, \cdot)$.
 De cette façon, en classe préparatoire ECS, **on n'a jamais** à démontrer les **propriétés a b c d e f g h de la définition d'un espace vectoriel.**

6.2.3 Exemples fondamentaux

Exemple 1

Sous-espaces triviaux.

Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors E et $\emptyset$ sont des SEV de E.

Exemple 2

Espaces de polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

En particulier, $\mathbb{K}_0[X]$ désigne l'ensemble des polynômes constants à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Démonstration – $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$.

Notons $\widetilde{0}$ le polynôme nul, à savoir $\left|\begin{array}{l}\mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto 0\end{array}\right.$. $\widetilde{0}$ a pour degré $-\infty$, donc $\widetilde{0} \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ est non vide.

Enfin, soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}$, puisque P et Q sont de degrés inférieurs ou égaux à n, on a : $d^\circ(\alpha P + \beta Q) \leq \max[d^\circ(\alpha P), d^\circ(\beta Q)] \leq n$.

Donc $(\alpha P + \beta Q) \in \mathbb{K}_n[X]$.

Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires et c'est un SEV de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$, donc. $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ■

Exemple 3

Espaces de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Rappelons les notations usuelles :

$C(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $(C(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$, $(\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

En procédant comme à l'exemple précédent, ces ensembles sont inclus dans $\mathbb{R}^I$, ensemble de toutes les applications de I dans $\mathbb{R}$, qui est un espace vectoriel ; de plus, la continuité et la dérivabilité se conservent par l'addition des applications et la multiplication d'une application par un réel. Autrement dit, ces ensembles sont stables par combinaisons linéaires. De plus, ils contiennent la fonction nulle. Ceci assure que ce sont des SEV de $\left(\mathbb{R}^I, +, \cdot\right)$, donc eux-mêmes des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

6.2.4 Exemples et contre-exemples

Exemple 1

Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\right\}$. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Solution

- Nous constatons d'abord que $F \subset \mathbb{C}^3$; or $\left(\mathbb{C}^3, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
 $0 + 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$: ceci prouve que $(0, 0, 0) \in F$ et par conséquent, $F \neq \emptyset$.
- Montrons que F est stable par combinaisons linéaires :
 $\forall \overrightarrow{u} = (x, y, z) \in F, \forall \overrightarrow{v} = (x', y', z') \in F, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$
- Par définition des opérations dans $\mathbb{C}^3$, $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$
 Montrons que les coordonnées de $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ vérifient l'équation de F :
 $(\alpha x + \beta x') + 2(\alpha y + \beta y') + 3(\alpha z + \beta z') =$
 $\alpha \underbrace{(x + 2y + 3z)}_{=0} + \beta \underbrace{(x' + 2y' + 3z')}_{=0} = 0 \quad (*)$
 En effet, $\overrightarrow{u} \in F$ donc $x + 2y + 3z = 0$
 De même, $\overrightarrow{v} \in F$ donc $x' + 2y' + 3z' = 0$
 (*) montre que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \in F$

Conclusion F est un SEV de $\left(\mathbb{C}^3, +, \cdot\right)$, donc $(F, +, \cdot)$ est lui-même un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exemple 2

L'ensemble A des suites arithmétiques à coefficients réels est-il un espace vectoriel ?

Solution

Rappelons d'abord qu'une suite réelle (u_n) est **arithmétique** si et seulement si $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque – Dans cette formulation, le symbole $\exists$, placé avant $\forall$, signifie que r est le même pour tous les n entiers naturels. r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n). Ainsi, pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de trouver sa raison r, indépendante de n, c'est-à-dire dans laquelle la lettre n ne doit pas figurer.

- La suite identiquement nulle est arithmétique de raison 0, donc est élément de A et $A \neq \emptyset$.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites arithmétiques et α, β deux réels ;

(u_n) étant arithmétique, a une raison r : $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$
De même, (v_n) étant arithmétique, a une raison r' :
$\exists r' \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + r'$
La suite $(w_n) = \alpha(u_n) + \beta(v_n)$ a pour terme général $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \alpha(u_n + r) + \beta(v_n + r') = \alpha u_n + \beta v_n + \alpha r + \beta r'$
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + R$ en posant $R = \alpha r + \beta r'$
R est constant par rapport à n, ceci prouve donc que (w_n) est une suite arithmétique.
A est non vide et stable par combinaisons linéaires, donc A est un SEV de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$
Donc $(A, +, \cdot)$ est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Méthode 2 Montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel.

Pour montrer qu'un ensemble F n'est pas un espace vectoriel, il suffit de montrer que l'une des propriétés requises n'est pas vérifiée, par exemple :

1. Le vecteur nul n'est pas dans F.
2. F n'est pas stable par l'addition : pour cela, il suffit de trouver x, y dans F tels que $x + y \notin F$.
3. F n'est pas stable par la multiplication par un scalaire : pour cela, il suffit de trouver x dans F, λ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda x \notin F$.

Exemple 3

L'ensemble G des suites géométriques à coefficients réels est-il un espace vectoriel ?

Solution

Rappelons d'abord qu'une suite réelle (u_n) est **géométrique** si et seulement si $\exists q \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$

Montrer que G n'est pas stable par l'addition revient à exhiber deux suites géométriques dont la somme n'est pas géométrique :

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; alors pour n impair, $u_n + v_n = 0$ et pour n pair, $u_n + v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Ainsi, $u_0 + v_0 = 2$; $u_1 + v_1 = 0$; $u_2 + v_2 = \frac{1}{2}$; on a donc pour tout q réel, $\frac{1}{2} = u_2 + v_2 \neq q \times (u_1 + v_1) = 0$ et la suite $(u_n + v_n)$ n'est donc pas géométrique. Ainsi l'addition n'est pas une opération interne dans G. Ceci prouve que G n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

L'ensemble P des applications à valeurs positives ou nulles de I dans $\mathbb{R}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Solution

Soit $f : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array} \right.$

$(-1) \cdot f : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -1 \end{array} \right.$. $(-1).f \notin P$ puisque $(-1).f$ prend des valeurs strictement négatives. Donc P n'est pas stable par la multiplication par un réel.

Donc P n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 5

Soit $F = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) + 3f'(x) = 0\}$. F est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Solution

- $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

• Notons $\widetilde{0}$ l'application nulle, à savoir $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 0\end{array}\right.$.

$\widetilde{0}\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall x\in\mathbb{R}, 2\widetilde{0}(x)+3\widetilde{0}(x)=0$ donc $\widetilde{0}\in F$. Par conséquent, $F\neq\emptyset$.

Soient f,g dans F et α,β dans $\mathbb{R}$; f,g étant dérivables sur $\mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g$ l'est également et $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$2(\alpha f+\beta g)'(x)+3(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha\left[\underbrace{2f'(x)+3f(x)}_{=0 \text{ car } f\in F}\right]+\beta\left[\underbrace{2g'(x)+3g(x)}_{=0 \text{ car } g\in F}\right]=0$$

Ceci montre que $\alpha f+\beta g\in F$. Ainsi F est stable par combinaisons linéaires.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donc lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

6.2.5 Espace engendré par une famille de vecteurs

Théorème et définition – Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p\in\mathbb{N}^*$, et $\overrightarrow{x_1},\cdots,\overrightarrow{x_p}$ pvecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{x_1},\cdots,\overrightarrow{x_p}$ est un sous-espace vectoriel de E.

On le note $Vect\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_p}\right)$ et on l'appelle **sous-espace engendré** par la famille $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_p}\right)$. Ceci signifie que :

$$Vect\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_p}\right)=\left\{\lambda_1\overrightarrow{x_1}+\cdots+\lambda_p\overrightarrow{x_p}\,\middle|\,\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_p\right)\in\mathbb{K}^p\right\}$$

$$Vect\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots,\overrightarrow{x_p}\right)=\left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overrightarrow{x_i}\,\middle|\,\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_p\right)\in\mathbb{K}^p\right\}$$

Démonstration

Notons $F=\left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overrightarrow{x_i}\,\middle|\,\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_p\right)\in\mathbb{K}^p\right\}$.

Si on prend $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, on obtient que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overrightarrow{x_i}=\overrightarrow{0_E}$; donc $\overrightarrow{0_E}\in F$ et $F\neq\emptyset$.

Soient $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x'}\right)\in F^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$:

$$\exists\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_p\right)\in\mathbb{K}^p/\overrightarrow{x}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overrightarrow{x_i} \text{ et } \exists\left(\lambda'_1,\cdots,\lambda'_p\right)\in\mathbb{K}^p/\overrightarrow{x'}=\sum_{i=1}^{p}\lambda'_i\overrightarrow{x_i}.$$

Alors $\alpha\overrightarrow{x}+\beta\overrightarrow{x'}=\alpha\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overrightarrow{x_i}+\beta\sum_{i=1}^{p}\lambda'_i\overrightarrow{x_i}=\sum_{i=1}^{p}(\alpha\lambda_i+\beta\lambda'_i)\overrightarrow{x_i}$.

Comme $\forall i\in[\![1,n]\!],\alpha\lambda_i+\beta\lambda'_i\in\mathbb{K}$, on peut affirmer que $\alpha\overrightarrow{x}+\beta\overrightarrow{x'}\in F$.

F est stable par combinaisons linéaires.

On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de E. ■

Méthode 3 Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Si un ensemble F, inclus dans un « grand » espace vectoriel Econnu (cf exemples fondamentaux d'espaces vectoriels), peut être écrit comme le sous-espace engendré par une famille de vecteurs, c'est-à-dire :

$F = Vect\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$, où $\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_p}$ sont des vecteurs de E, en d'autres termes, si F est l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de E, alors F est un SEV de $(E, +, \cdot)$, et en particulier Fest un espace vectoriel.

Exemple 1

$\mathbb{K}_n[X] = Vect\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$

En effet, tout polynôme de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit $\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$ où $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. Il est donc combinaison linéaire de $1, X, X^2, \cdots, X^n$.

Nous retrouvons ainsi le fait que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, et par conséquent un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 2

Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\right\}$. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution

$\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow z = -x - y \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = (x, y, -x - y)$

$$\overrightarrow{u} \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = x\underbrace{(1, 0, -1)}_{\overrightarrow{a}} + y\underbrace{(0, 1, -1)}_{\overrightarrow{b}} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$$

On en déduit que $F = Vect\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et par conséquent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

6.3 Familles de vecteurs

6.3.1 Famille génératrice

Définition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}$ p vecteurs de E.*

On dit que la famille. $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$ **engendre** E

ou que la famille $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$ *est* **génératrice de** E

si et seulement si $E = Vect\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$

si et seulement si $\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_p\right) \in \mathbb{K}^p / \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{x_i}$.

Remarque – « La famille. $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$ engendre E » signifie que « E est le sous-espace engendré par la famille. $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$ », au sens du paragraphe « Espace engendré par une famille de vecteurs ».

Proposition – *Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice, c'est-à-dire que si on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, elle reste génératrice.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple 1

Soit n, entier naturel non nul. Dans $\mathbb{K}^n$, posons pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\overrightarrow{e_i} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, le 1 se trouvant en i^{me} position.

La famille $B_0 = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\right)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$. En effet, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$.

Exemple 2

Nous avons vu à l'exemple 1 du paragraphe « Espace engendré par une famille de vecteurs », que $\mathbb{K}_n[X] = Vect\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$.

Ceci prouve que la famille $\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 3

Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ où $\overrightarrow{u} = (1, 1, 2)$, $\overrightarrow{v} = (3, 0, 1)$, $\overrightarrow{w} = (5, 2, 5)$.

Déterminer l'équation de F, c'est-à-dire à quelle condition sur x, y, z un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ est élément de F.

La famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Solution

$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3 / (x, y, z) = \alpha(1, 1, 2) + \beta(3, 0, 1) + \gamma(5, 2, 5)$ Ceci revient à dire que le système (S) ci-dessous possède au moins une solution :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = x \\ \alpha \quad\quad + 2\gamma = y \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma = z \end{cases}$$

Passons à l'écriture sous forme de tableau $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 2 & 1 & 5 & z \end{array}\right)$ et utilisons la méthode du pivot :

$$\begin{array}{ll} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & x \\ 0 & -3 & -3 & y - x \\ 0 & -5 & -5 & z - 2x \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow 3L_3 - 5L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & x \\ 0 & -3 & -3 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & -x - 5y + 3z \end{array}\right)$$

Le système (S) est donc équivalent à :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - 5\gamma = x \\ -3\beta - 3\gamma = y - x \\ 0 = -x - 5y + 3z \end{cases}$$

Si (S) a une solution, $-x - 5y + 3z = 0$.

Réciproquement, si $-x - 5y + 3z = 0$, alors les 2 pivots en bleu étant non nuls, on peut calculer α, β en fonction de γ, x, y, z à l'aide des deux premières équations. Le système (S) possède donc au moins une solution (et même une infinité qui s'expriment à l'aide de l'inconnue γ).

En conclusion, (S) a une solution si et seulement si $-x-5y+3z=0$, c'est-à-dire $x+5y-3z=0$.

F a pour équation : $x+5y-3z=0$.

Mais le vecteur $(1,0,0)\in\mathbb{R}^3$ et il ne vérifie pas cette équation ; en effet, $1+5\times 0-3\times 0=1\neq 0$, donc $F\subsetneq\mathbb{R}^3$.

La famille $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ n'engendre donc pas $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4

Soit $E=\{P\in\mathbb{C}_2[X]\,|P(1-X)=P(X)\}$.

Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et en déterminer une partie génératrice.

Solution

$P\in\mathbb{C}_2[X]\Leftrightarrow\exists(a,b,c)\in\mathbb{C}^3/P(X)=aX^2+bX+c$.

$P\in E\Leftrightarrow aX^2+bX+c=a\left(X^2-2X+1\right)+b(1-X)+c$

$\Leftrightarrow a(-2X+1)+b(1-2X)=0$

$P\in E\Leftrightarrow(-2X+1)(a+b)=0$

$-2X+1$ n'étant pas le polynôme nul,

$P\in E\Leftrightarrow a+b=0\Leftrightarrow b=-a\Leftrightarrow P(X)=a\left(X^2-X\right)+c\cdot 1$

E est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de X^2-X et 1, ce qui s'écrit aussi : $E=Vect\left(X^2-X,1\right)$.

D'après la méthode 3., E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\left(X^2-X,1\right)$ est une famille génératrice de E.

6.3.2 Famille libre

Définition – *Soien E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p\in\mathbb{N}^*$ et $\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_p}p$ vecteurs de E*

On dit que la famille $\left(\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_p}\right)$ est **libre** *ou que les vecteurs $\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_p}$ sont* **linéairement indépendants** *si et seulement si :*

$$\forall\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_p\right)\in\mathbb{K}^p\left(\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}+\cdots+\lambda_p\vec{x_p}=\vec{0_E}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p=0\right).$$

Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite **liée**, *ou on dit que ses vecteurs sont* **linéairement dépendants**.

Autre formulation – Une famille est libre si et seulement si il n'existe pas de combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des vecteurs de cette famille.

Proposition – *Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

En particulier, toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

Si la famille $\left(\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_p}\right)$ est liée et si $\vec{x_p}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs, alors $Vect\left(\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_p}\right)=Vect\left(\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_{p-1}}\right)$.

Démonstration

Rappelons d'abord que l'énoncé $A\Rightarrow B$ signifie [(*non A*) *ou B*].

et que sa négation (i. e. son énoncé contraire) est : [*A et* (*non B*)].

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

En écrivant la négation de l'énoncé : « $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$ libre », on obtient que :

$\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$ est liée si et seulement si :

$\exists\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_p\right) \in \mathbb{K}^p / \left(\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \lambda_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0_E} \text{ et } \exists \text{i} \in [\![1,\text{p}]\!] / \lambda_i \neq 0\right)$

Supposons par exemple que $\lambda_p \neq 0$ (sinon, il suffit d'échanger $\overrightarrow{x_i}$ et $\overrightarrow{x_p}$) ; alors on peut écrire :

$\overrightarrow{x_p} = -\dfrac{1}{\lambda_p}\left(\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \lambda_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + \lambda_{p-1}\overrightarrow{x_{p-1}}\right)$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{x_p} = \alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + \alpha_{p-1}\overrightarrow{x_{p-1}}$, alors :

$1\cdot\overrightarrow{x_p} - \alpha_1\overrightarrow{x_1} - \alpha_2\overrightarrow{x_2} - \cdots - \alpha_{p-1}\overrightarrow{x_{p-1}} = \overrightarrow{0_E}$ est une combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}$ à coefficients non tous nuls.

On a bien montré que la famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. ■

Cas particuliers :

- $p = 1$ $\quad\left(\overrightarrow{x_1}\right)$ est libre $\Leftrightarrow \overrightarrow{x_1} \neq \overrightarrow{0_E}$.
- $p = 2$ $\quad\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right)$ est libre $\Leftrightarrow \overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ non colinéaires.

Exemple 1

Reprenons pour n, entier naturel non nul. la famille $\left(\overrightarrow{e_i}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{K}^n$, où $\overrightarrow{e_i} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, le 1 se trouvant en $i^{ème}$ position. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$;

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0_E} \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (0, 0, \cdots, 0) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0.$

Donc la famille $\left(\overrightarrow{e_i}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

Exemple 2

Considérons à nouveau la famille $\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$; notons $\widetilde{0}$ le polynôme nul, i.e. l'application nulle de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Supposons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i = \widetilde{0}$, alors $\forall x \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0$

L'application polynômiale $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$ est donc identiquement nulle et tous ses coefficients sont nuls : c'est-à-dire $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
La famille $\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ est donc libre.

Exemple 3

Reprenons l'exemple 3 du paragraphe « Espace engendré par une famille de vecteurs », où $\overrightarrow{u} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v} = (3,0,1)$, $\overrightarrow{w} = (5,2,5)$ et voyons si la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est libre.

$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha(1,1,2) + \beta(3,0,1) + \gamma(5,2,5) = (0,0,0)$

$(*) \Leftrightarrow (\alpha + 3\beta + 5\gamma, \alpha + 2\gamma, 2\alpha + \beta + 5\gamma) = (0,0,0)$

En reprenant la résolution du système dans l'exemple 3 de 6.3.1,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - 5\gamma = 0 \\ -3\beta - 3\gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 8\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(8,1,-1)$$

On en déduit en prenant par exemple $\gamma = 1$ que $8\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (0,0,0)$.

La famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est liée.

Comme $\overrightarrow{w} = 8\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $F = Vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et on a trouvé une famille génératrice de F comportant moins de vecteurs.

Proposition – ***(utile pour les familles de polynômes)*** – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une famille de $\mathbb{K}[X]$ constituée de polynômes* ***tous non nuls****.*
Si $d^\circ(P_0) < d^\circ(P_1) < \cdots < d^\circ(P_n)$, la famille est dite échelonnée en degrés, alors la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est libre.
En particulier, si $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $d^\circ(P_i) = i$, la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est libre.

Méthode 4 Montrer qu'une famille est libre.

Pour montrer que la famille $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_p}\right)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, est libre, il s'agit de montrer que l'équation $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0_E}$ d'inconnues $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ n'a pour solution que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Suivant le cadre dans lequel on se place, plusieurs approches sont possibles :

1. Si $E = \mathbb{K}^n$, en passant aux coordonnées, cela revient à montrer qu'un système de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'a que la solution nulle.
2. Si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on peut écrire les égalités obtenues pour des rangs particuliers afin d'obtenir également un système d'inconnues $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.
3. Si E est un sous-espace de $\mathbb{R}^I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, ou un sous-espace de $\mathbb{K}[\mathbb{X}]$, on peut envisager les approches suivantes pour obtenir des équations comportant $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$,
 - Ecrire l'égalité pour des valeurs particulières,
 - Prendre des limites,
 - Dériver lorsque cela est possible,
 - Le cas échéant, utiliser le fait que la famille, constituée de polynômes non nuls, est échelonnée.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

6.3.3 Base

Définition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}$ p vecteurs de E*
La famille $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_p}\right)$ est une **base** *de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de E.*

Théorème et définition – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$.
Une famille $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots \overrightarrow{e_n}\right)$ de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots \overrightarrow{e_n}$
si et seulement si $\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists!\, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / \overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$.
$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est alors appelé n-uplet des **coordonnées** de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots \overrightarrow{e_n}\right)$.

Exemple 1

Nous avons vu que pour n, entier naturel non nul la famille $\left(\overrightarrow{e_i}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{K}^n$ définie précédemment est libre et engendre $\mathbb{K}^n$.
C'est par conséquent une base de$\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Remarque – On dit qu'elle est canonique, c'est-à-dire qu'il est naturel de choisir celle-ci, car les coordonnées d'un n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dans cette base sont ses coefficients, à savoir que $(x_1, \cdots, x_n) = x_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n \overrightarrow{e_n}$.

Exemple 2

$\{(1,0), (0,1)\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$.
Mais $\mathcal{B} = \{(1,0), (1,1)\}$ et $\mathcal{B}' = \{(1,0), (0,2)\}$ sont aussi des bases de $\mathbb{R}^2$.
Montrons-le pour $\mathcal{B}$:
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) \Leftrightarrow (x,y) = (\alpha + \beta, \beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \end{cases}$$

Le système possède une solution unique, c'est-à-dire que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des deux vecteurs de $\mathcal{B}$. Grâce au théorème ci-dessus, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On pourrait montrer que $\mathbb{R}^2$ possède de nombreuses bases. A suivre dans le chapitre sur les espaces de dimension finie dans lesquels nous aurons des théorèmes plus performants pour établir qu'une famille est une base.

Exemple 3

Nous avons vu que la famille $\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ est une famille à la fois libre et génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 4

Dans l'exemple 3 de **2.3.2**, nous avons vu que $F = Vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ où $\overrightarrow{u} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v} = (3,0,1)$. La famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ engendre donc F.

Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ n'étant pas proportionnelles, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est libre. C'est donc une base de F.

Par contre, la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ qui engendre F, mais est liée, n'est pas une base de F

6.4 Somme de sous-espaces vectoriels

6.4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
La **somme des deux sous-espaces** F **et** G *est l'ensemble* $\left\{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \,\middle|\, \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in F \times G\right\}$.
On le note $F + G$.

Théorème – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration
Montrons que $F + G = \left\{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \,\middle|\, \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in F \times G\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
$0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E + 0_E = 0_E \in F + G$, donc $F + G \neq \emptyset$.
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ dans $F + G$, α, β dans $\mathbb{K}$, $\exists \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in F \times G / \overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$
et $\exists \left(\overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'}\right) \in F \times G / \overrightarrow{v} = \overrightarrow{x'} + \overrightarrow{y'}$.

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \alpha\left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right) + \beta\left(\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{y'}\right) = \underbrace{\left(\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x'}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\alpha\overrightarrow{y} + \beta\overrightarrow{y'}\right)}_{\in G}$$

Ceci prouve que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \in F + G$. Ainsi $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Remarque – Si la somme de deux SEV de E est un SEV de E, en revanche, la réunion de deux SEV de E n'est pas toujours un SEV de E.
Prenons par exemple les SEV suivants de $\mathbb{R}^2$:
$F = Vect(1,0)$ et $G = Vect(0,1)$; alors $(1,0) \in F \cup G$ et $(0,1) \in F \cup G$, mais $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin F \cup G$. $F \cup G$ n'est donc pas stable par combinaison linéaire, et n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$.

6.4.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
On dit que **la somme des deux sous-espaces vectoriels** F **et** G **est directe** *si et seulement si* $\forall \overrightarrow{x} \in F + G \quad \exists ! \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right) \in F \times G / \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$.
On la note alors $F \oplus G$ au lieu de $F+G$ pour indiquer que la somme des deux sous-espaces est directe.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème – La somme de deux sous-espaces F et G de E est directe si et seulement si $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

Démonstration

Condition nécessaire :

Si la somme de deux sous-espaces F et G est directe, alors par définition de $F \oplus G$, $\forall \overrightarrow{x} \in F + G \quad \exists ! \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right) \in F \times G / \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$.

Soit $\overrightarrow{x} \in F \cap G$; on peut écrire : $\overrightarrow{x} = \underbrace{\overrightarrow{x}}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{x}}_{\in G}$.

Vu l'unicité de la décomposition de $\overrightarrow{x}$ en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, $\left(\overrightarrow{x}, 0_E\right) = \left(0_E, \overrightarrow{x}\right)$, donc $\overrightarrow{x} = 0_E$.

On a ainsi montré que : $\forall \overrightarrow{x} \in F \cap G, \ \overrightarrow{x} = 0_E$; donc $F \cap G \subset \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

L'inclusion réciproque est vraie, donc $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

Condition suffisante :

Si l'on a : $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$, par définition de $F + G$:

$$\forall \overrightarrow{x} \in F + G \quad \exists \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right) \in F \times G / \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}.$$

Il reste à prouver l'unicité de cette décomposition.

Supposons qu'il existe une autre décomposition de $\overrightarrow{x}$: $\quad \exists \left(\overrightarrow{y'}, \overrightarrow{z'}\right) \in F \times G / \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y'} + \overrightarrow{z'}$

On a alors : $\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{y'} + \overrightarrow{z'}$; d'où $\underbrace{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'}}_{\in F} = \underbrace{\overrightarrow{z'} - \overrightarrow{z}}_{\in G}$. Ce vecteur est donc élément de $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$;

d'où $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y'} = 0_E$ et $\overrightarrow{z'} - \overrightarrow{z} = 0_E$, c'est-à-dire que $\quad \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right) = \left(\overrightarrow{y'}, \overrightarrow{z'}\right)$.

Ceci montre l'unicité de la décomposition de $\overrightarrow{x}$ en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On a bien montré que F et G sont en somme directe. ■

Exemple

Si $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est une famille libre, alors $Vect\left(\overrightarrow{u}\right)$ et $Vect\left(\overrightarrow{v}\right)$ sont en somme directe.

6.4.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème et définition – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre les énoncés suivants :

1. $E = F \oplus G$
2. $\forall \overrightarrow{x} \in E \quad \exists ! \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right) \in F \times G / \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$.
3. Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
4. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

On dit alors que F et G sont des **sous-espaces supplémentaires de** E.

Dans le cas général, ce supplémentaire n'est pas unique ; c'est pourquoi on dira que F est **un** supplémentaire de G dans E, ou que G est **un** supplémentaire de F dans E lorsque $E = F \oplus G$.

Exemple 1

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ et E sont supplémentaires dans E.

Exemple 2

$Vect(1, X)$ et $Vect\left(X^2, X^3\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_3[X]$, mais pas dans $\mathbb{K}_4[X]$.

En effet, soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$, $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4 / P = a + bX + cX^2 + dX^3$

Donc $P = \underbrace{a + bX}_{\in Vect(1,X)} + \underbrace{cX^2 + dX^3}_{\in Vect\left(X^2,X^3\right)}$

Ceci montre que $\mathbb{K}_3[X] \subset Vect(1, X) + Vect\left(X^2, X^3\right)$.

L'inclusion inverse étant évidente, $\mathbb{K}_3[X] = Vect(1, X) + Vect\left(X^2, X^3\right)$.

Soit $P \in Vect(1, X) \cap Vect\left(X^2, X^3\right) \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4 / P = a + bX = cX^2 + dX^3$ d'où $a + bX - cX^2 - dX^3 = 0$ (polynôme nul).

$\left(1, X, X^2, X^3\right)$ étant une famille libre, $a = b = c = d = 0$ donc $P = 0$ (polynôme nul)

$Vect(1, X) \cap Vect\left(X^2, X^3\right) \subset \{0\}$. L'inclusion inverse étant vraie, on a bien :

$Vect(1, X) \cap Vect\left(X^2, X^3\right) = \{0\}$.

La somme des deux sous-espaces est donc directe.

D'où $\mathbb{K}_3[X] = Vect(1, X) \oplus Vect\left(X^2, X^3\right)$.

$\mathbb{K}_3[X] = Vect(1, X) \oplus Vect\left(X^2, X^3\right) \subsetneq \mathbb{K}_4[X]$, car, par exemple $X^4 \notin \mathbb{K}_3[X]$.

$Vect(1, X)$ et $Vect\left(X^2, X^3\right)$ ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{K}_4[X]$.

Exemple 3

Soit P l'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que P et I sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, espace de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution

- P et I sont inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

 $\widetilde{0}$, application nulle sur $\mathbb{R}$, est à la fois paire et impaire, donc P et I ne sont pas vides.

 Soient f et g dans P [resp.I] et α, β dans $\mathbb{R}$; pour tout x réel,

 $(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$

 [resp.$-\alpha f(x) - \beta g(x) = -(\alpha f(x) + \beta g(x)) = -(\alpha f + \beta g)(x)$].

 Donc $\alpha f + \beta g$ est paire [resp. impaire] et P [resp. I] est stable par combinaison linéaire.

 Nous avons prouvé que P et I sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Montrons maintenant que Pet I sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Procédons par analyse-synthèse (voir chapitre 1 page 37)

 Soit f, application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qu'on fixe le temps de la démonstration.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Unicité : Supposons que $f = i + p$ avec i impaire [resp.p paire]. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} p(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ i(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$$

Ceci montre que si l'on connaît f, les expressions des applications i et p, si elles existent, sont uniques.

Existence : Posons pour tout x réel, $\begin{cases} p(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ i(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$

Pour tout x réel, on a alors : $p(-x) = \dfrac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = p(x)$ et

$i(-x) = \dfrac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -i(x)$.

Ceci prouve que p est paire et i impaire.

De plus, pour tout x réel, on a alors :

$p(x) + i(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$ Donc $f = p + i$.

D'où l'existence du couple (p, i).

Conclusion : Nous avons bien établi l'existence et l'unicité de la décomposition de f, application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en la somme d'une application paire et d'une application impaire. Donc P et I sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Synthèse

Savoirs

- Règles de calcul dans un espace vectoriel.
- Espaces vectoriels classiques.

Savoir-faire

- Reconnaître si un ensemble est ou pas un espace vectoriel.
- Savoir montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.
- Savoir montrer qu'une famille de vecteurs est libre.
- Savoir trouver une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel et en déduire une base.
- Savoir montrer que deux SEV sont supplémentaires, en appliquant l'une des CNS.

Mots-clés

- Espace vectoriel, sous-espace vectoriel, combinaison linéaire.
- Famille libre, famille génératrice, base.
- Somme de deux sous-espaces, somme directe de deux sous-espaces, supplémentaire.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

6.1 $\emptyset$ est-il un espace vectoriel ?

6.2 $A = \left\{\left(x, x^2\right) | x \in \mathbb{R}\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

6.3 L'ensemble des polynômes de degré 12 à coefficients réels est-il un espace vectoriel ?

6.4 $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y + 1 = 0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

6.5 L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en $+\infty$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

6.6 **1)** La famille $\{(1,2),(0,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle libre ?

2) La famille $\{(1,7,2),(4,1,5),(0,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?

6.7 Une famille de 4 vecteurs, deux à deux non colinéaires, est-elle libre.

6.8 Si la famille $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ engendre l'espace vectoriel E, que peut-on dire de la famille $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}\right)$?

6.9 Trouver une famille génératrice de $C = \left\{(a + 2b, 2a - b, 3b) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Est-ce une base de C ?

6.10 Que peut-on dire de la famille $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ si $3\vec{u} - \vec{v} + 5\vec{w} = \vec{0}$?

6.11 Déterminer une base de $Vect\left(X^2, X^4\right)$.

6.12 Si $\vec{a} \in Vect\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$, que peut-on dire de $Vect\left(\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$?

Exercices d'application

■ Déterminer si un ensemble est un espace vectoriel

6.13

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

1) $\mathcal{A} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| x^2 - y^2 + z^2 = 0\right.\right\}$

2) $\mathcal{B} = \left\{(2a + b, 3b, a) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

6.14

Parmi les sous-ensembles suivants de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$.

1) l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes ;

2) l'ensemble $\mathcal{D}$ des suites décroissantes ;

3) a, b, c sont des réels fixés, l'ensemble
$E = \{(u_n) | \exists n \in \mathbb{R}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\}$

6.15

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

1) l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, [f(x)]^2 = 2f(x)$.

2) l'ensemble $\mathcal{N}$ des applications négatives sur [a ;b], segment fixé de $\mathbb{R}$;

3) l'ensemble $\mathcal{M}$ des applications monotones sur $\mathbb{R}$;

4) l'ensemble $\mathcal{B}$ des applications bornées sur $\mathbb{R}$;

5) si a et b sont des réels fixés, l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$

6.16 Déterminer si une famille est génératrice

A quelle condition sur m réel les vecteurs
$\vec{u} = (1, 2, 3m), \vec{v} = (1, -2, 1), \vec{w} = (m, 1, 0)$ forment-ils une partie génératrice de $\mathbb{R}^3$?

■ Déterminer si une famille est libre

6.17

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Lorsque la famille est liée, trouver une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs.

$\mathcal{F} = ((5,2,3),(4,1,3),(7,-8,15))$

$\mathcal{G} = ((0,0,2),(1,0,3),(0,1,4))$

6.18

Les familles suivantes de $\mathbb{R}[X]$ sont-elles libres ?

$\mathcal{H} = \left(2X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, X^2 + X - 1\right)$

$\mathcal{I}_n = \left((X - a)^k (b - X)^{n-k}\right)_{0 \le k \le n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, a, b sont des réels distincts fixés.

6.19

Les familles suivantes d'applications sont-elles libres ? On précisera sur quel intervalle commun les applications de chaque famille sont définies.

$\mathcal{H} = (f, g, h)$ où $f : x \mapsto \ln x$, $g : x \mapsto x \ln x$, $h : x \mapsto x^2 \ln x$.

$\mathcal{J} = (f, g, h)$ où $f : x \mapsto e^x$, $g : x \mapsto x + 1$, $h : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

$\mathcal{K}_n = (\cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ où $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{L}_n = (x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \cdots, x^{\alpha_n})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ est une suite strictement croissante de réels.

6.20 Déterminer l'équation d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$

Trouver un système d'équations linéaires du sous-espace vectoriel J de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$(1, 0, 2, 1), (0, 3, -1, 2), (3, -3, 7, 1).$$

Ces vecteurs forment-ils une base de J ?

■ Déterminer une base d'un espace vectoriel

6.21

Montrer que :
$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z - t = 0\right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base.

6.22

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :
$\vec{u} = (1, 3, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 4, -1, 2)$, $\vec{w} = (2, 9, 0, 5)$
et $\vec{u}_1 = (1, 6, 2, -2)$, $\vec{v_1} = (2, 8, -1, -6)$,
$\vec{w_1} = (1, 3, -1, -5)$.
On pose $F = Vect\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$
et $F_1 = Vect\left(\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{w_1}\right)$.
Déterminer des bases de F, F_1, $F \cap F_1$.

6.23

Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3y = 0 \quad \text{et} \quad 2y + z = 0\right\}$
et $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0\right\}$
Même question pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y - z + t = 0 \text{ et } x + y - 3z + t = 0\right\}$

6.24

Déterminer une base de $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

■ Sommes et supplémentaires

6.25

Dans $\mathbb{R}^3$, on note :
$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$
et $F = Vect(1, 1, 0)$.
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

6.26

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note A l'ensemble des fonctions affines et B l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, puis qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

■ Bases et coordonnées

6.27

Soient a, b, c trois éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On définit :
$P_0 = 1$, $P_1 = X - a$, $P_2 = (X - a)(X - b)$.
1) Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
2) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$; déterminer les coordonnées de P dans la base (P_0, P_1, P_2) en fonction de $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$.

Exercice d'approfondissement

6.28

Soient $a \in \mathbb{K}$ et pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = (X - a)^k$.
1) Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est libre.
2) En raisonnant par récurrence, montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X - a)^k$. Calculer $P^{(j)}(X)$.
4) Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$; déduire de la question précédente les coordonnées de P dans la base $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

6.1 Un espace vectoriel contenant toujours le vecteur nul, ne peut pas être vide. $\emptyset$ n'est donc pas un espace vectoriel.



Distinguer $\emptyset$, qui est l'ensemble vide, et $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$, sous-espace d'un espace vectoriel E réduit au vecteur nul.

6.2 $(1,1) \in A$, mais $-(1,1) = (-1,-1) \notin A$ car -1 n'est pas le carré d'un nombre réel.

A n'est donc pas stable par la multiplication externe ; donc A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Remarque – Pour montrer le contraire (ou la négation) d'un énoncé commençant par $\forall$ (ce qui est le cas pour « stable par combinaison linéaire »), il suffit d'exhiber un contrexemple.
En particulier, pour montrer qu'un ensemble E n'est pas un espace vectoriel (ou sous-espace vectoriel), il suffit de trouver $x \in E$ tel que $(-x) \notin E$.

6.3 Le polynôme nul étant de degré $-\infty$ n'appartient pas à l'ensemble des polynômes de degré 12, qui n'est donc pas un espace vectoriel.

6.4 $(0,0) \notin B$, donc B n'est pas un espace vectoriel, donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

6.5 Notons L l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en $+\infty$.

$L \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'application nulle ayant pour limite 0 en $+\infty$ est élément de L, donc L n'est pas vide.

Soient f, g dans L et α, β deux réels ; on a : $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ et $\lim\limits_{+\infty} g = \ell'$ avec ℓ, ℓ' réels.

D'après les théorèmes d'opérations sur les limites, $\lim\limits_{+\infty} (\alpha f + \beta g) = \alpha\ell + \beta\ell'$, qui est un réel.

$\alpha f + \beta g$ possède donc une limite finie en $+\infty$, donc est élément de L. Ainsi L est stable par combinaison linéaire, donc L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; donc L est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

6.6

1) Les coordonnées des deux vecteurs n'étant pas proportionnelles, ils ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre.

2) La famille, contenant le vecteur nul, est liée.

6.7 Non, car l'énoncé :

« vecteurs non colinéaires $\Rightarrow$ famille libre » n'est valable que pour les familles de **deux** vecteurs.

6.8 La famille engendre encore E car c'est une surfamille d'une famille génératrice.

Le quatrième vecteur étant combinaison linéaire des 3 premiers, elle est liée.

6.9

$\overrightarrow{u} \in C \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{u} = (a+2b, 2a-b, 3b)$

$\overrightarrow{u} \in C \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{u} = a(1,2,0) + b(2,-1,3)$.

Ceci prouve que : $C = Vect((1,2,0),(2,-1,3))$, c'est-à-dire que $((1,2,0),(2,-1,3))$ est une famille génératrice de C.

De plus, les deux vecteurs de la famille ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre. La famille $((1,2,0),(2,-1,3))$ est donc une base de C.

6.10 Elle est liée.

6.11 X^2 et X^4, forment une famille génératrice par construction, et une famille libre car ce sont deux polynômes non nuls de degrés différents, donc $\left(X^2, X^4\right)$ est une base de $Vect\left(X^2, X^4\right)$.

6.12 $Vect\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = Vect\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.

6.13

1) $(1,1,0) \in \mathcal{A}$ et $(0,1,1) \in \mathcal{A}$, mais $(1,1,0) + (0,1,1) = (1,2,1) \notin \mathcal{A}$: en effet, $1^2 - 2^2 + 1^2 = -2 \neq 0$.

Donc $\mathcal{A}$ n'est pas stable par combinaison linéaire (la somme étant une combinaison linéaire particulière),.

Ceci montre que $\mathcal{A}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

2) $\mathcal{B} = Vect((2,0,1),(1,3,0))$, donc $\mathcal{B}$, sous-espace engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

6.14

1) C est l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie.

Or une suite indexée par $\mathbb{N}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La démarche effectuée dans le test 5 convient aussi. Donc C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2) Prenons par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n$. (u_n) est décroissante, donc $(u_n) \in \mathcal{D}$. Cependant, $(-u_n) = (n)$ n'est pas une suite décroissante, puisque $u_0 = 0 < u_1 = 1$. D n'est donc pas stable par combinaison linéaire, donc $\mathcal{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque – Une suite peut être à la fois croissante et décroissante, lorsqu'elle est constante. La négation (ou contraire) de (v_n) décroissante n'est pas (v_n) croissante, mais : $\exists n \in \mathbb{N} / v_n < v_{n+1}$.

3) $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

La suite nulle vérifie l'équation de E, donc est élément de E, donc E n'est pas vide.

Soient $(u_n), (v_n)$ dans E et α, β deux réels ; par définition de E, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$(L_1)\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$

$(L_2)\ av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0$

$\alpha(L_1) + \beta(L_2)$:

$a(\alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}) + b(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + c(\alpha u_n + \beta v_n) = 0$

En posant $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \alpha u_n + \beta v_n$, ceci prouve que la suite (w_n) est élément de E.

Ainsi E est stable par combinaison linéaire, donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

6.15

1) Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2$. On a bien :

$\forall x \in \mathbb{R}, [f(x)]^2 = 4 = 2f(x)$; donc $f \in \mathcal{A}$.

Mais $\forall x \in \mathbb{R}, (-f)(x) = -2$; donc $\forall x \in \mathbb{R}, [(-f)(x)]^2 = 4 \neq -4 = 2(-f)(x)$; donc $-f \notin \mathcal{A}$.

On a montré que $\mathcal{A}$ n'est pas stable par combinaison linéaire, par conséquent, $\mathcal{A}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2) Posons : $\forall x \in [a, b], f(x) = -1$. Alors

$\forall x \in [a, b], (-f)(x) = 1 > 0$. Ainsi, $f \in \mathcal{N}$ et $-f \notin \mathcal{N}$. On a montré que $\mathcal{N}$ n'est pas stable par combinaison linéaire, par conséquent, $\mathcal{N}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3) Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3$ et $g(x) = -3x$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, Ainsi f et g sont éléments de $\mathcal{M}$.

Mais $\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = x^3 - 3x$.

$f + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (f+g)'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right)$

$f + g$ est strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, donc $f + g$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{M}$ n'est pas stable par combinaison linéaire, par conséquent, $\mathcal{M}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

4) $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'application nulle est bornée, donc $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Soient f, g dans $\mathcal{B}$ et α, β deux réels ; f et g étant bornées, on a : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$
et de même, $\exists M' \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leq M'$.

Alors

$\forall x \in \mathbb{R},\ |(\alpha f + \beta g)(x)| = |\alpha f(x) + \beta g(x)|$

$\leq |\alpha| |f(x)| + |\beta| |g(x)| \leq |\alpha| M + |\beta| M'$

Ceci montre que $\alpha f + \beta g$ est bornée sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\alpha f + \beta g$ est élément de $\mathcal{B}$.

Par conséquent, $\mathcal{B}$ est stable par combinaison linéaire ; donc $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

5) $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'application nulle vérifie l'équation de $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$.

Soient f, g dans $\mathcal{E}$ et α, β deux réels ; on a :

Pour tout x réel, on a :

$(L_1)\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$

$(L_2)\ ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = 0$

D'où $(\alpha L_1 + \beta L_2)$:

$a[\alpha f''(x) + \beta g''(x)] + b[\alpha f'(x) + \beta g'(x)] + c[\alpha f(x) + \beta g(x)] = 0.$

Ceci prouve que $\alpha f + \beta g$ est élément de $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire et $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

6.16

$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ engendre $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c) = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$

En passant aux coordonnées, $(a, b, c) = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ correspond au système (S) de tableau $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & a \\ 2 & -2 & 1 & b \\ 3m & 1 & 0 & c \end{array}\right)$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3mL_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & a \\ 0 & -4 & 1-2m & b-2a \\ 0 & 1-3m & -3m^2 & c-3ma \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow 4L_3 + (1 - 3m) L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & a \\ 0 & -4 & 1-2m & b-2a \\ 0 & 0 & -6m^2-5m+1 & -2(1+3m)a + (1-3m)b + 4c \end{array}\right)$$

Le système a une unique solution si et seulement si les pivots indiqués en bleu ne s'annulent pas, c'est-à-dire si $-6m^2 - 5m + 1 \neq 0$.

$-6m^2 - 5m + 1 = -6(m+1)\left(m - \dfrac{1}{6}\right)$. D'où la discussion suivante :

Premier cas : $m \notin \left\{-1, \dfrac{1}{6}\right\}$.

Alors (S) possède une solution (unique) et $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Deuxième cas : $m = -1$.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x + y - z = a \\ -4y + 3z = b + 2a \\ 0 = 4(3a + b + c) \end{array}\right.$$

$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ engendre $\mathbb{R}^3$ si et seulement si (S) possède une solution **pour tout** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Or si $(a, b, c) = (1, 0, 0)$, la troisième équation est fausse, et le système n'a pas de solution. Donc $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^3$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Troisième cas : $m = \frac{1}{6}$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \frac{1}{6}z = a \\ -4y + \frac{2}{3}z = b - \frac{a}{3} \\ 0 = \frac{-5a}{6} + \frac{b}{2} + 4c \end{cases}$$

Comme dans le deuxième cas, la troisième équation est fausse lorsque $(a,b,c) = (1,0,0)$. Donc $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^3$

Conclusion : $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ engendre $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m \notin \left\{-1, \frac{1}{6}\right\}$.

6.17

1) Notons $\vec{u} = (5,2,3)$, $\vec{v} = (4,1,3)$, $\vec{w} = (7,-8,15)$; soient α,β,γ réels,

$(*)\ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \alpha(5,2,3) + \beta(4,1,3) + \gamma(7,-8,15) = (0,0,0)$

$(*) \Leftrightarrow (5\alpha + 4\beta + 7\gamma, 2\alpha + \beta - 8\gamma, 3\alpha + 3\beta + 15\gamma) = (0,0,0)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - 8\gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta + 15\gamma = 0 \end{cases}$$

Passons à l'écriture sous forme de tableau $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}$; du fait que le système est homogène (second membre nul), il n'est pas nécessaire d'écrire le second membre. Utilisons la méthode du pivot :

$$L_1 \leftrightarrow \tfrac{L_3}{3} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -18 \\ 0 & -1 & -18 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Revenons au système :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ -\beta - 18\gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -18\gamma \\ \alpha = 13\gamma \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma) = \gamma(13,-18,1).$$

$(*) \Leftrightarrow \gamma\left(13\vec{u} - 18\vec{v} + \vec{w}\right) = (0,0,0)$.

En prenant $\gamma = 1$, on obtient que $13\vec{u} - 18\vec{v} + \vec{w} = (0,0,0)$; ceci constitue une relation de dépendance linéaire entre $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ et montre que la famille $\mathcal{F} = \left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est liée.

2) En procédant de même, et en notant $\vec{u} = (0,0,2)$, $\vec{v} = (1,0,3)$, $\vec{w} = (0,1,4)$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = (0,0,0)$ correspond au système $\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$ équivalent à $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a montré que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille $\mathcal{G}$ est donc libre.

6.18

1) Soient α,β,γ réels, notons $\widetilde{0}$ le polynôme identiquement nul.

$$\alpha\left(2X^2 + X + 1\right) + \beta\left(X^2 + 3X + 1\right) + \gamma\left(X^2 + X - 1\right) = \widetilde{0}$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha + 3\beta + \gamma)X + (\alpha + \beta - \gamma)\cdot 1 = \widetilde{0}$$

La famille $\left(X^2, X, 1\right)$ étant libre, ceci implique que

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 1\gamma = 0 \end{cases}$$

En prenant le pivot indiqué, on obtient :

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{L_2}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \end{matrix} \quad \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On conclut que la famille $\mathcal{H}$ est libre.

2) Prouvons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la méthode des valeurs particulières.

Pour $n = 1$, $\mathcal{I}_1 = (b - X, X - a)$; a, b étant des réels distincts, $b - X$ et $X - a$ ne sont pas proportionnels, donc forment une famille libre.

Supposons que $\mathcal{I}_{n-1}$ est libre ; soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ réels tels que
$\lambda_0(b - X)^n + \lambda_1(X - a)(b - X)^{n-1} + \cdots$
$+\lambda_{n-1}(X - a)^{n-1}(b - X) + \lambda_n(X - a)^n = 0\ (\bullet)$

Si on remplace X par b, ceci donne : $\lambda_n(b - a)^n = 0$; comme $a \neq b$, ceci entraîne que : $\lambda_n = 0$.

$(\bullet)$ devient alors :

$$\lambda_0(b - X)^n + \lambda_1(X - a)(b - X)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}(X - a)^{n-1}(b - X) = 0$$

$b - X$ n'étant pas le polynôme nul,

$$(\bullet) \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_0(b - X)^{n-1} + \lambda_1(X - a)(b - X)^{n-2} + \cdots \\ +\lambda_{n-1}(X - a)^{n-1} = 0 \end{matrix}$$

On reconnaît une combinaison linéaire de la famille $\mathcal{I}_{n-1}$, qui est libre d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

La famille $\mathcal{I}_n$ est donc libre.

6.19

$\mathcal{H} = (f, g, h)$ où $f : x \mapsto \ln x$, $g : x \mapsto x \ln x$, $h : x \mapsto x^2 \ln x$. f, g, h sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

Voyons si la famille $\mathcal{H}$ est libre : soient α, β, γ réels tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = \widetilde{0}$ (fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$).

Ceci signifie que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \ln x + \beta x \ln x + \gamma x^2 \ln x = 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right) \ln x = 0.$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}, \left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right) = 0.$

Ainsi, $x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma x^2$ est une fonction polynôme qui possède une infinité de racines, à savoir tous les réels de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Elle est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a bien montré que la famille $\mathcal{H}$ est libre.

$\mathcal{J} = (f, g, h)$ où $f : x \mapsto e^x$, $g : x \mapsto x + 1$, $h : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. L'ensemble sur lequel f, g, h sont toutes trois définies est $\mathbb{R}$.

Voyons si la famille $\mathcal{J}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: soient α, β, γ réels tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = \widetilde{0}$ (fonction nulle sur $\mathbb{R}$).

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha e^x + \beta (x + 1) + \gamma \lfloor x \rfloor = 0.$

En prenant en particulier des valeurs de x égales à $0, 1, -1$, il en résulte le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + & \beta & = 0 \\ \alpha e + & 2\beta + & \gamma = 0 \\ \alpha \cdot \dfrac{1}{e} & & -\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} & \beta & = -\alpha \\ & \gamma & = \alpha \cdot \dfrac{1}{e} \\ \alpha \left(e - 2 + \dfrac{1}{e}\right) & & = 0 \end{cases}$$

Comme $e - 2 + \frac{1}{e} \neq 0$, on obtient facilement que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a bien montré que la famille $\mathcal{J}$ est libre.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la famille

$\mathcal{K}_n = (\cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

• Pour $n = 0$, $\mathcal{K}_0 = (1)$; $\mathcal{K}_0$ constituée d'une unique fonction qui n'est pas la fonction nulle, est une famille libre.

Supposons que $\mathcal{K}_{n-1}$ soit libre.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ réels tels que :

$$(L_1)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos(kx) = 0.$$

Comme $\cos'' = -\cos$, on obtient en dérivant deux fois cette égalité que :

$$(L_2)\ \forall x \in \mathbb{R},\ -\sum_{k=0}^{n} \alpha_k k^2 \cos(kx) = 0$$

$\left(L_2 + n^2 L_1\right)$ s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(n^2 - k^2\right) \cos(kx) = 0.$$

Ceci constitue une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{K}_{n-1}$, qui est libre par hypothèse.

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \alpha_k \underbrace{\left(n^2 - k^2\right)}_{\neq 0} = 0$;

d'où $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \alpha_k = 0.$

On reporte ces valeurs dans (L_1), d'où $\alpha_n = 0$.

On a montré que $\forall k \in [\![0, n]\!], \alpha_k = 0$ et que la famille $\mathcal{K}_n$ est libre.

• Pour α_i réel, l'application $x \mapsto x^{\alpha_i} = e^{\alpha_i \ln x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la famille

$\mathcal{L}_n = (x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \cdots, x^{\alpha_n})$

où $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$.

Si $n = 1$, $\mathcal{L}_1 = (x^{\alpha_1})$ avec $x \mapsto x^{\alpha_1} = e^{\alpha_1 \ln x}$ fonction non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, est libre.

Supposons que $\mathcal{L}_{n-1}$ soit libre. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ réels tels que :

$$(L_1)\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_2 x^{\alpha_2} + \cdots + \lambda_n x^{\alpha_n} = 0.$$

Alors en divisant par x^{α_1},

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda_1 + \lambda_2 x^{\alpha_2 - \alpha_1} + \cdots + \lambda_n x^{\alpha_n - \alpha_1} = 0 \quad (\#)$$

En dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda_2 (\alpha_2 - \alpha_1) x^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} + \cdots + \lambda_n (\alpha_n - \alpha_1) x^{\alpha_n - \alpha_1 - 1} = 0.$$

Or $\alpha_2 - \alpha_1 - 1 < \alpha_3 - \alpha_1 - 1 < \cdots < \alpha_n - \alpha_1 - 1$, d'après l'hypothèse de récurrence, la famille $\left(x^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}, x^{\alpha_3 - \alpha_1 - 1}, \cdots, x^{\alpha_n - \alpha_1 - 1}\right)$ qui comporte $n - 1$ fonctions, est une famille libre.

Donc $\lambda_2 (\alpha_2 - \alpha_1) = \lambda_3 (\alpha_3 - \alpha_1) = \cdots = \lambda_n (\alpha_n - \alpha_1) = 0.$
Comme $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, on obtient que :

$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0.$

En reportant dans (#), $\lambda_1 = 0$. Donc la famille $\mathcal{L}_n$ est libre.

On a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\mathcal{L}_n$ est libre.

6.20

$\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in J$

$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{K}^3 / (x, y, z, t) = \alpha (1, 0, 2, 1)$

$+\beta (0, 3, -1, 2) + \gamma (3, -3, 7, 1)$

$\overrightarrow{u} \in J \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^3 /$

$(x, y, z, t) = (\alpha + 3\gamma, 3\beta - 3\gamma, 2\alpha - \beta + 7\gamma, \alpha + 2\beta + \gamma)$

Ceci équivaut à : $(S) \begin{cases} \alpha & & +3\gamma & = x \\ & 3\beta & -3\gamma & = y \\ 2\alpha & -\beta & +7\gamma & = z \\ \alpha & +2\beta & +\gamma & = t \end{cases}.$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

En passant au tableau : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 3 & -3 & y \\ 2 & -1 & 7 & z \\ 1 & 2 & 1 & t \end{array}\right)$, puis en utilisant le pivot indiqué,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 3 & -3 & y \\ 0 & -1 & 1 & z-2x \\ 0 & 2 & -2 & t-x \end{array}\right)$$

Avec les opérations $L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow 2L_3 + L_4$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 3 & -3 & y \\ 0 & 0 & 0 & -6x+y+3z \\ 0 & 0 & 0 & -5x+2z+t \end{array}\right)$$

Le système (S)admet des solutions si et seulement si $\begin{cases} -6x+y+3z=0 \\ -5x+2z+t=0 \end{cases}$ (ε)

(ε) est un système d'équations linéaires de J.

La condition pour que la famille

$\Phi = ((1,0,2,1),(0,3,-1,2),(3,-3,7,1))$ soit libre s'obtient en remplaçant x, y, z, t par zéro dans le système (S), soit en utilisant la dernière étape de la méthode du pivot :

$$\begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ 3\beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

On a donc :

$$-3(1,0,2,1) + (0,3,-1,2) + (3,-3,7,1) = (0,0,0,0)$$

La famille Φ est donc liée. Une base de J est par exemple$((1,0,2,1),(0,3,-1,2))$. En effet, ces deux vecteurs, non colinéaires, forment une famille libre, et la famille Φ étant liée, ils engendrent le même sous-espace que Φ, à savoir J.

6.21

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+2y+3z-t=0\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

$$\vec{u} = (x,y,z,t) \in E \Leftrightarrow x+2y+3z-t=0$$

$$\Leftrightarrow t = x+2y+3z$$

$$\vec{u} \in E \Leftrightarrow \vec{u} = (x,y,z,x+2y+3z)$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,2) + z(0,0,1,3).$$

On a montré que tout vecteur de E est combinaison linéaire des trois vecteurs $(1,0,0,1),(0,1,0,2),(0,0,1,3)$, qui constituent une famille génératrice de E.

Donc $E = Vect((1,0,0,1),(0,1,0,2),(0,0,1,3))$, ce qui prouve que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Voyons que les trois vecteurs obtenus forment une famille libre :

$$\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,2) + \gamma(0,0,1,3) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta,\gamma,\alpha+2\beta+3\gamma) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la famille $((1,0,0,1),(0,1,0,2),(0,0,1,3))$ est libre.

Etant libre et génératrice de E, c'est par conséquent une base deE.

6.22

Déterminons une équation ou un système d'équations de $F = Vect(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$:

$$(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{K}^3/$$

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,3,-3,1) + \beta(1,4,-1,2) + \gamma(2,9,0,5)$$

Ceci équivaut à : $(S)\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = x \\ 3\alpha + 4\beta + 9\gamma = y \\ -3\alpha - \beta = z \\ \alpha + 2\beta + 5\gamma = t \end{cases}$..

En passant au tableau : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & 9 & y \\ -3 & -1 & 0 & z \\ 1 & 2 & 5 & t \end{array}\right)$

En utilisant le pivot indiqué, on obtient : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 3 & y-3x \\ 0 & 2 & 6 & z+3x \\ 0 & 1 & 3 & t-x \end{array}\right)$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 3 & y-3x \\ 0 & 0 & 0 & z-2y+9x \\ 0 & 0 & 0 & t-y+2x \end{array}\right)$$

Le système (S) possède une solution si et seulement si $\begin{cases} 9x-2y+z=0 \\ 2x-y+t=0 \end{cases}$ qui constitue un système d'équations de F.

De plus, la condition pour que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit libre s'écrit avec le système (S) dans lequel on remplace x, y, z, t par des zéros. Cette condition s'écrit : $\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \beta+3\gamma=0 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} \alpha=\gamma \\ \beta=-3\gamma \end{cases}$

On a donc : $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$; la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ n'est donc pas libre ; en revanche, $\vec{u},\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, $(\vec{u},\vec{v})$est une famille libre ; de plus comme :

$F = Vect(\vec{u},\vec{v},-\vec{u}+3\vec{v}) = Vect(\vec{u},\vec{v})$,

$(\vec{u},\vec{v})$est une base de F.

Par un calcul analogue, on trouve que la famille $(\vec{u}_1,\vec{v_1},\vec{w_1})$ est libre et constitue une base de F_1 et qu'une équation de F_1 est : $16x-3y+2z+t=0$.

$$\vec{u} = (x,y,z,t) \in F \cap F_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-2y+z=0 \\ 2x-y+t=0 \\ 16x-3y+2z+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-9x+2y \\ t=-2x+y \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-5x \\ t=0 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = x(1,2,-5,0)$$

D'où $F \cap F_1 = Vect\,(1, 2, -5, 0)$.

Le vecteur $(1, 2, -5, 0)$, non nul, constitue une famille libre et une base de $F \cap F_1$.

6.23

$$\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ z = -2y \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u} \in E \Leftrightarrow (x, y, z, t) = \left(\frac{3y}{2}, y, -2y, t\right)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = \frac{y}{2}(3, 2, -4, 0) + t(0, 0, 0, 1)$$

Ceci montre que $E = Vect\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ en notant $\overrightarrow{v_1} = (3, 2, -4, 0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0, 0, 0, 1)$.

De plus, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre. Nous avons vu qu'ils engendrent E, donc ils forment une base de E.

$$\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

$$\overrightarrow{u} \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = (x, -2x, z, t) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = x(1, -2, 0, 0)$$

$$+z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$$

Notons $\overrightarrow{w_1} = (1, -2, 0, 0)$, $\overrightarrow{w_2} = (0, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{w_3} = (0, 0, 0, 1)$.

On a montré que :

$$F = Vect\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\right).$$

De plus :

$$\alpha(1, -2, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, -2\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la famille $\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\right)$ est libre et constitue une base de F.

$$(x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underset{L_1}{\frac{1}{2}(L_2 - L_1)} \begin{cases} x - z = 0 \\ y = x + z - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z - t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u} \in G \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = (z, 2z - t, z, t)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = z(1, 2, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1)$$

Ceci prouve que :

$$G = Vect\,((1, 2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)).$$

Ces deux vecteurs, non colinéaires, forment une base de G.

6.24

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$.

$$P \in E \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow X - 1 \text{ divise } P$$

$$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X] / P(X) = (X - 1)\,Q(X)$$

Mais P étant de degré ≤ 3, Q est de degré ≤ 2. Donc

$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / Q(X) = aX^2 + bX + c$.

$$P \in E \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / P(X) = (X - 1)\left(aX^2 + bX + c\right)$$

$P \in E \Leftrightarrow$

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / P(X) = a(X - 1)X^2 + b(X - 1)X + c(X - 1).$$

Ainsi $\left((X - 1)X^2, (X - 1)X, (X - 1)\right)$ engendre E. Etant composée de polynômes non nuls de degrés tous différents, cette famille est libre. C'est donc une base de E.

6.25

On montre comme dans **6.21**.que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

F, en tant que sous-espace engendré par une famille de $\mathbb{R}^3$, est également un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ en procédant par analyse-synthèse :

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

Unicité : S'il existe $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \in E \times F / \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, alors :

$\overrightarrow{v} \in E$ donc $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ avec $x' + y' + z' = 0$.

$\overrightarrow{w} \in F$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{w} = \lambda(1, 1, 0) = (\lambda, \lambda, 0)$.

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ s'écrit alors, en passant aux coordonnées

$$(\sigma) \begin{cases} x = x' + \lambda \\ y = y' + \lambda \\ z = z' \end{cases}$$

Mais en additionnant les trois lignes de ce système, il vient : $x + y + z = \underbrace{x' + y' + z'}_{=0} + 2\lambda$.

D'où $\lambda = \dfrac{1}{2}(x + y + z)$.

$$(\sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - \dfrac{1}{2}(x + y + z) \\ y' = y - \dfrac{1}{2}(x + y + z) \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z \\ y' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z \\ z' = z \end{cases}$$

Ceci prouve l'unicité de $\overrightarrow{v}$.

Comme $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}(x + y + z)(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{w}$ est également déterminé de façon unique par la donnée de $\overrightarrow{u}$.

Existence :Reprenons les conditions trouvées ci-dessus :

$$\overrightarrow{v} = (x', y', z') \text{ avec } \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z \\ y' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z \\ z' = z \end{cases}$$

et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

On a alors : $x' + y' + z' = 0$ donc $\overrightarrow{v} \in E$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Par ailleurs :

$$\vec{w} = \left(x - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right), y - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right), z - z\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, 0\right)$$

Donc $\vec{w} = \lambda(1,1,0)$ avec $\lambda = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$,

ce qui prouve que $\vec{w} \in F$.

Enfin, $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

On a bien prouvé que :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \quad \exists!\left(\vec{v}, \vec{w}\right) \in E \times F / \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}.$$

Donc E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

6.26

• Une application f est affine si et seulement si

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = ax + b.$$
$$f \in A \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / f = af_0 + bf_1$$

où $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x$.

Ceci prouve que $A = Vect(f_0, f_1)$ et que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

• $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soient f, g dans B et α, β réels, on a par définition de B,

$f(0) = f(1) = 0$ et $g(0) = g(1) = 0$.

Donc $(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = 0$ et

$(\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = 0$.

Donc $\alpha f + \beta g \in B$. On a montré que B est stable par combinaison linéaire, donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

• A et B sont supplémentaires si et seulement si

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ \exists! (g,h) \in A \times B / \ f = g + h.$$

Procédons par analyse-synthèse : Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;

Unicité : S'il existe $(g,h) \in A \times B / \ f = g + h$, alors $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax + b$ et $h(0) = h(1) = 0$.

Il vient : $\begin{cases} f(0) = b \\ f(1) = a + b \end{cases}$,

c'est-à-dire : $\begin{cases} b = f(0) \\ a = f(1) - f(0) \end{cases}$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$$

et $h(x) = f(x) - g(x)$. $(*)$

Ces égalités définissent h et g de façon unique à partir de f. D'où l'unicité.

Existence : Définissons h et g à partir de $(*)$.

Alors g est bien affine, donc $g \in A$.

Par ailleurs :

$h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - f(1) = 0$, donc $h \in B$.

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) + h(x) = f(x)$.

D'où l'existence.

On a bien montré que A et B sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

6.27

1) Pour $k \in [\![0,2]\!]$, P_k étant de degré k, la famille (P_0, P_1, P_2)est échelonnée en degrés et formée de polynômes non nuls, donc libre.

Montrons que (P_0, P_1, P_2) engendre $\mathbb{K}_2[X]$: Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$,

Le polynôme $F(X) = P(X) - P(a)$ s'annule en a, donc $(X - a)$ divise $F(X)$.

$\exists Q \in \mathbb{K}[X] / P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$; de plus, P étant de degré≤ 2, Q est de degré ≤ 1.

Donc $Q(X) = \alpha X + \beta = \alpha(X - b) + \underbrace{b\alpha + \beta}_{=\lambda}$ avec α, β, λ dans $\mathbb{K}$.

D'où $P(X) - P(a) = (X - a)(\alpha(X - b) + \lambda)$

$$P(X) = P(a) + \lambda(X - a) + \alpha(X - a)(X - b);$$
$$P = \underbrace{P(a)}_{\in \mathbb{K}} \cdot P_0 + \lambda P_1 + \alpha P_2.$$

Ceci prouve que tout polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$ est combinaison linéaire de P_0, P_1, P_2, c'est-à-dire que (P_0, P_1, P_2) engendre $\mathbb{K}_2[X]$.

On conclut que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

2) Reprenons l'égalité

$$P(X) = P(a) + \lambda(X - a) + \alpha(X - a)(X - b).$$

Remplaçons X par b, puis par c :

$$P(b) - P(a) = \lambda(b - a)$$

et $P(c) - P(a) = \lambda(c - a) + \alpha(c - a)(c - b)$.

D'où

$$\lambda = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} \text{ et } \alpha = \frac{P(c) - P(a)}{(c - a)(c - b)} + \frac{P(b) - P(a)}{(b - a)(b - c)}.$$

Le triplet des coordonnées de $P \in \mathbb{K}_2[X]$ dans la base (P_0, P_1, P_2) est donc

$$\left(P(a), \frac{P(b) - P(a)}{b - a}, \frac{P(c) - P(a)}{(c - a)(c - b)} + \frac{P(b) - P(a)}{(b - a)(b - c)}\right)$$

6.28

1) La famille de polynômes non nuls $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est échelonnée en degrés, donc libre.

2) Montrons par récurrence sur n que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Pour $n = 0$, $\mathbb{K}_0[X] = Vect(1) = Vect(P_0)$ donc (P_0) engendre $\mathbb{K}_0[X]$.

Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $(P_0, P_1, \cdots, P_{n-1})$ engendre $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$; d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\exists (\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in P \in \mathbb{K}^n / P' = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (X-a)^k.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{K}, P'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x-a)^k$. Intégrons cette égalité entre 0 et a :

$$\forall x \in \mathbb{K}, P(x) - P(a) = \int_0^a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (t-a)^k \, dt$$

$$\begin{aligned} P(x) &= P(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \left[\frac{(t-a)^{k+1}}{k+1} \right]_0^a \\ &= P(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \\ P(x) &= P(a) \cdot P_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{j} \underbrace{(x-a)^j}_{P_j(x)} \end{aligned}$$

Donc tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire de $P_0, P_1, \cdots, P_n$, i.e. la famille engendre $\mathbb{K}_n[X]$, ce qui achève la récurrence.

3) Si $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k$, comme pour $j \in [\![0, k]\!]$,

$P_k^{(j)}(X) = k(k-1)\cdots(k-j+1) X^{k-j} = \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j}$, et pour $j > k$, $P_k^{(j)} = 0$, on a : $P^{(j)}(X) = \sum_{k=j}^{n} \lambda_k \frac{k!}{(k-j)!} (X-a)^{k-j}$.

4) D'où $P^{(j)}(a) = \lambda_j j!$; d'où $\lambda_j = \frac{P^{(j)}(a)}{j!}$.

On en déduit que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ a une coordonnée suivant P_j égale à $\frac{P^{(j)}(a)}{j!}$ dans la base $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ et que $P = \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!} (X-a)^j$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Applications linéaires

CHAPITRE 7

Plan

7.1 Applications linéaires 164
7.2 Noyau et image d'une application linéaire 167
7.3 Opérations sur les applications linéaires 172
7.4 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire 176
7.5 Projections et symétries 177
Synthèse 185
Tests et exercices 186
Corrigés des exercices 188

Objectifs

- Définir les applications linéaires (qui conservent la structure d'espace vectoriel)
- Étudier les propriétés des applications linéaires classiques (projecteurs, symétries)

Prérequis

- Méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires
- Polynômes
- Espaces vectoriels

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7.1 Applications linéaires

Définition – Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- on appelle **application linéaire de E dans F** toute application $f : E \to F$ vérifiant :

$$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\right) = \lambda f\left(\vec{u}\right) + \mu f\left(\vec{v}\right)$$

- une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme de E**,
- une application linéaire bijective de E dans F est appelée **isomorphisme de E dans (ou sur) F**,
- une application linéaire bijective de E dans E est appelée **automorphisme de E**
- une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire sur E**

Notation – Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F,
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E,
- $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E.

Exemple

L'application $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ définie par :

$$(x, y, z) \mapsto (x - y, x + 2z)$$

est une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$. En effet, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\right) \in \mathbb{K}^3$ de coordonnées : $\overrightarrow{u}_i = (x_i, y_i, z_i)$,

$$\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \quad \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

Pour calculer $f\left(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2\right)$, on remplace (x, y, z) par ces nouvelles coordonnées dans l'expression dans $f(x, y, z)$. On obtient :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2\right) & \\ &= \left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2), \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 2(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)\right) \\ &= \left(\lambda_1 (x_1 - y_1) + \lambda_2 (x_2 - y_2), \lambda_1 (x_1 + 2z_1) + \lambda_2 (x_2 + 2z_2)\right) \\ &= \lambda_1 (x_1 - y_1, x_1 + 2z_1) + \lambda_2 (x_2 - y_2, x_2 + 2z_2) \\ &= \lambda_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right) + \lambda_2 f\left(\overrightarrow{u}_2\right) \end{aligned}$$

On conclut que f est linéaire.

Exemple – Homothétie

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, l'application $f : E \to E$ définie par :

$$\overrightarrow{u} \mapsto \alpha \overrightarrow{u}$$

est un endomorphisme de E. En effet :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad f\left(\overrightarrow{u}\right) = \alpha \overrightarrow{u} \in E$$

donc f est à valeurs dans E.
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in E^2$:

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}\right) &= \alpha\left(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}\right) \\ &= \alpha\lambda \overrightarrow{u} + \alpha\mu \overrightarrow{v} = \lambda \underbrace{\left(\alpha \overrightarrow{u}\right)}_{f(\overrightarrow{u})} + \mu \underbrace{\left(\alpha \overrightarrow{v}\right)}_{f(\overrightarrow{v})} \\ &= \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) + \mu f\left(\overrightarrow{v}\right) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Ainsi, f étant une application linéaire de E dans E, est un endomorphisme de E.

Exemple – Endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $D : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $D(P) = P'$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$, donc a fortiori à n. Donc :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad D(P) = P' \in \mathbb{K}_n[X]$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Enfin, $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$D(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda D(P) + \mu D(Q)$$

Donc D est linéaire.
On a montré que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple

L'application $\varphi : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^2$ définie par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$$

est une application linéaire. En effet, $\forall (u, v) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, notons $w = \lambda u + \mu v$.
Rappelons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \lambda u_n + \mu v_n$$

par définition des opérations sur les suites.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda u + \mu v) &= (w_0, w_1) = (\lambda u_0 + \mu v_0, \quad \lambda u_1 + \mu v_1)\\ &= \lambda (u_0, u_1) + \mu (v_0, v_1)\\ &= \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

Proposition – Propriétés des applications linéaires

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F.

1. $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$
2. $\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad f\left(-\overrightarrow{u}\right) = -f\left(\overrightarrow{u}\right)$
3. $\forall \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in E^2, \quad f\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = f\left(\overrightarrow{u}\right) - f\left(\overrightarrow{v}\right)$
4. $\forall \left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\right) \in E^n, \quad \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,$

$$f\left(\lambda_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u}_n\right) = \lambda_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right) + \cdots + \lambda_n f\left(\overrightarrow{u}_n\right)$$

qui se réécrit : $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(\overrightarrow{u}_i\right)$.

Démonstration

1. $f\left(\overrightarrow{0}_E + \overrightarrow{0}_E\right) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$
 donc $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = f\left(\overrightarrow{0}_E\right) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$
 donc $\underbrace{f\left(\overrightarrow{0}_E\right) - f\left(\overrightarrow{0}_E\right)}_{\overrightarrow{0}_F} = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$
 donc $\overrightarrow{0}_F = f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$

2. $\forall \vec{u} \in E, \quad f\left(-\vec{u}\right) = f\left((-1)\vec{u}\right) = (-1)f\left(\vec{u}\right) = -f\left(\vec{u}\right)$
3. $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in E^2, \quad f\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = f\left(\vec{u}\right) + f\left(-\vec{v}\right) = f\left(\vec{u}\right) - f\left(\vec{v}\right)$
4. se montre par récurrence sur n. ■

Remarque
L'image par une application linéaire d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Pour montrer qu'une application est linéaire, on peut aussi utiliser l'une des deux propriétés suivantes qui s'avèrent plus simples dans certains cas :

Théorème – Caractérisation des applications linéaires

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$. On a équivalence entre les énoncés suivants :

1. f est linéaire, c'est-à-dire :
$$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f\left(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right) = \lambda f\left(\vec{u}\right) + \mu f\left(\vec{v}\right)$$
2. $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},$
$$f\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = f\left(\vec{u}\right) + f\left(\vec{v}\right) \text{ et } f\left(\lambda\vec{u}\right) = \lambda f\left(\vec{u}\right)$$
3. $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f\left(\lambda\vec{u} + \vec{v}\right) = \lambda f\left(\vec{u}\right) + f\left(\vec{v}\right)$

Méthode 1 Montrer qu'une application est linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. Pour montrer que f est linéaire :

1. on considère un ou deux scalaires (éléments de $\mathbb{K}$) et deux vecteurs de E, en adoptant des notations correspondant à la nature de ces vecteurs :
 - P, Q si $E \subset \mathbb{R}[X]$,
 - f, g si E est un espace d'applications,
 - ...
2. on démontre l'une des propriétés du théorème de caractérisation des applications linéaires,

7.2 Noyau et image d'une application linéaire

Rappel – Ensemble-image

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Si A est un sous ensemble de E, *l'ensemble-image de A par f* est le sous ensemble de F noté $f(A)$:

$$f(A) = \left\{y \in F \,\middle|\, \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y\right\}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Définition – Noyau et image

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. L'ensemble :
$$f(E) = \left\{ \overrightarrow{v} \in F \,\middle|\, \exists \overrightarrow{u} \in E \text{ tel que } f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{v} \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de F, appelé **image de f** et noté $\mathrm{Im}(f)$.
2. L'ensemble :
$$\left\{ \overrightarrow{u} \in E \,\middle|\, f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}_F \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de E, appelé **noyau de f** et noté $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration

Remarque – Le vecteur nul est toujours élément de $\mathrm{Ker}(f)$

1. $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} \forall \left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\right) \in \mathrm{Im}(f)^2, \quad & \exists \overrightarrow{u}_1 \in E \text{ tel que } f\left(\overrightarrow{u}_1\right) = \overrightarrow{v}_1 \\ & \exists \overrightarrow{u}_2 \in E \text{ tel que } f\left(\overrightarrow{u}_2\right) = \overrightarrow{v}_2 \\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \quad & \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 = \lambda_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right) + \lambda_2 f\left(\overrightarrow{u}_2\right) \end{aligned}$$

f étant linéaire :
$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 = f\left(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2\right)$$
cette écriture montre que $\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(f)$
$\mathrm{Im}(f)$, stable par combinaisons linéaires et non vide est donc un sous-espace vectoriel de F.
2. $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$ donc $\overrightarrow{0}_E \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$.
Soient $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\right) \in \mathrm{Ker}(f)^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$:
$$f\left(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2\right) = \lambda_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right) + \lambda_2 f\left(\overrightarrow{u}_2\right)$$
$\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ étant dans $\mathrm{Ker}(f)$, $f\left(\overrightarrow{u}_1\right) = f\left(\overrightarrow{u}_2\right) = \overrightarrow{0}_F$, donc
$$f\left(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2\right) = \overrightarrow{0}_F$$
donc $\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.
On a montré que $\mathrm{Ker}(f)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires, donc $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de E. ■

Proposition – Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *f est injective* $\iff \mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$
2. *f est surjective* $\iff \mathrm{Im}(f) = F$

Démonstration

1. (a) Si f est injective, comme $\left\{\vec{0}_E\right\} \subset \text{Ker}\,(f)$ est toujours réalisé, il suffit de montrer que $\text{Ker}\,(f) \subset \left\{\vec{0}_E\right\}$ pour en déduire l'égalité des deux ensembles.

Soit $\vec{u} \in \text{Ker}\,(f)$. $f\left(\vec{u}\right) = \vec{0}_F$ donc $f\left(\vec{u}\right) = f\left(\vec{0}_E\right)$. f étant injective, $\vec{u} = \vec{0}_E$.

On a montré que $\text{Ker}\,(f) = \left\{\vec{0}_E\right\}$

(b) Réciproquement, si $\text{Ker}\,(f) = \left\{\vec{0}_E\right\}$, supposons que $f\left(\vec{u}\right) = f\left(\vec{v}\right)$ où $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in E^2$ et démontrons que $\vec{u} = \vec{v}$.

f étant linéaire, $f\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = f\left(\vec{u}\right) - f\left(\vec{v}\right) = \vec{0}_F$, donc $\vec{u} - \vec{v} \in \text{Ker}\,(f)$, donc $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}_E$, donc $\vec{u} = \vec{v}$.

On a montré :

$$\left(f\left(\vec{u}\right) = f\left(\vec{v}\right)\right) \Longrightarrow \left(\vec{u} = \vec{v}\right)$$

donc f est injective.

2. Le résultat vient de la définition : $\text{Im}\,(f) = f\,(E)$

$$f \text{ surjective} \Longleftrightarrow f\,(E) = F \Longleftrightarrow \text{Im}\,(f) = F \quad \blacksquare$$

Proposition – Image d'une famille génératrice

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}\,(E, F)$. Si $\left(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\right)$ est une famille génératrice de E, $\left(f\left(\vec{e}_1\right), \ldots, f\left(\vec{e}_p\right)\right)$ est une famille génératrice de $\text{Im}\,(f)$, c'est-à-dire :

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\left(f\left(\vec{e}_1\right), \ldots, f\left(\vec{e}_p\right)\right)$$

C'est en particulier le cas lorsque $\left(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\right)$ est une base de E.

Démonstration

$$\vec{v} \in \text{Im}\,(F) \Longleftrightarrow \exists \vec{u} \in E \text{ tel que } f\left(\vec{u}\right) = \vec{v}$$

$\left(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\right)$ engendre E, donc il existe $\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p\right) \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{e}_p$$

f étant linéaire :

$$f\left(\vec{u}\right) = \alpha_1 f\left(\vec{e}_1\right) + \cdots + \alpha_p f\left(\vec{e}_p\right)$$

Donc :

$$\vec{v} \in \text{Im}\,(F) \Longleftrightarrow \exists \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p\right) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } \vec{v} = \alpha_1 f\left(\vec{e}_1\right) + \cdots + \alpha_p f\left(\vec{e}_p\right)$$

On a donc démontré que :

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\left(f\left(\vec{e}_1\right), \ldots, f\left(\vec{e}_p\right)\right) \quad \blacksquare$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple – Calcul d'image et de noyau

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ où :

$$\begin{cases} x' = x + y + 4z \\ y' = 2x \quad + 4z \\ z' = 3x + 2y + 10z \end{cases}$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ par une de leur bases. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Solution

1. *Recherche de* $\mathrm{Im}(f)$

$(x', y', z') \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + 4z = x' \\ 2x \quad + 4z = y' \\ 3x + 2y + 10z = z' \end{cases}$$

Utilisons le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x' \\ 2 & 0 & 4 & y' \\ 3 & 2 & 10 & z' \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x' \\ 1 & 0 & 2 & y'/2 \\ 1 & 0 & 2 & -2x' + z' \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x' - y'/2 \\ 1 & 0 & 2 & y'/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2x' - y'/2 + z' \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$(x', y', z') \in \mathrm{Im}(f) \iff$ le système (S) possède au moins une solution (x, y, z)

$$\iff (S') : \begin{cases} y + 2z = x' - \frac{y'}{2} \\ x \quad + 2z = \frac{y'}{2} \\ 0 = -2x' - \frac{y'}{2} + z' \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\iff -2x' - \frac{y'}{2} + z' = 0$$

$$\iff 4x' + y' - 2z' = 0$$

$$\iff y' = -4x' + 2z'$$

$$\iff (x', y', z') = (x', -4x' + 2z', z')$$

$$\iff (x', y', z') = x'(1, -4, 0) + z'(0, 2, 1)$$

On a ainsi montré que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -4, 0), (0, 2, 1))$$

$(1, -4, 0)$ et $(0, 2, 1)$ n'étant pas colinéaires, forment une famille libre, donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. *Recherche de* $\mathrm{Ker}\,(f)$

$\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff f(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Ceci revient à reprendre le système (S) dans lequel on remplace (x', y', z') par $(0, 0, 0)$. La méthode du pivot reste valable et on obtient directement :

$$\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x \quad + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -2z \\ x = -2z \end{cases} \iff \overrightarrow{u} = z(-2, -2, 1)$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((-2, -2, 1))$

3. *Conclusion*

$(-2, -2, 1) \neq \overrightarrow{0}$ donc $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ donc f n'est pas injective. En particulier f n'est pas bijective.

Par ailleurs $\mathrm{Im}\,(f)$ a pour équation $4x + y - 2z = 0$. $(1, 0, 0)$ ne vérifie pas cette égalité, donc $(1, 0, 0) \notin \mathrm{Im}\,(f)$. $\mathrm{Im}\,(f) \neq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

Exemple – Image et noyau d'une application composée

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

1. $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$

2. $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$

3. $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \iff \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$

Solution

1. Soit $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$. $\exists \overrightarrow{u} \in E$ tel que $g \circ f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{w}$, donc $\exists \overrightarrow{v} \in E$ tel que $g\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{w}$ puisque $\overrightarrow{v} = f\left(\overrightarrow{u}\right)$ convient, donc $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}\,(g)$.

On a montré que $\forall \overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}\,(g \circ f), \overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}\,(g)$, c'est-à-dire que :
$\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$

2. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\,(f)$, $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}_E$ donc $g \circ f\left(\overrightarrow{u}\right) = g\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_E$ donc $g \circ f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}_E$ donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$; c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.

3.
$$g \circ f = 0 \iff \forall \overrightarrow{u} \in E, \quad g \circ f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}_E$$
$$\iff \forall \overrightarrow{u} \in E, \quad g\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = \overrightarrow{0}_E$$
$$\iff \forall \overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}\,(f), \quad g\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}_E$$
$$\iff \forall \overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}\,(f), \quad \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}\,(g)$$
$$\iff \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$$

Exemple – Image et noyau d'une forme linéaire

Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto P(1)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ par une de ses bases. Déterminer $\mathrm{Im}\,(\varphi)$. Que peut-on en déduire ?

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Solution

1. *Montrons que φ est linéaire*
$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1)$.
Par définition des opérations sur les applications, en particulier sur les polynômes :
$$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$
Donc φ est linéaire. φ étant à valeurs dans $\mathbb{R}$, φ est une forme linéaire.
2. *Détermination de* $\text{Ker}(\varphi)$
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff P(1) = 0 \\ &\iff X - 1 \text{ divise } P(X) \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(X) = (X-1)Q(X) \end{aligned}$$
Mais P étant de degré inférieur ou égal à 3, Q est de degré inférieur ou égal à 2, donc $Q(X) = a + bX + cX^2$.
$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } P(X) = (X-1)\left(a + bX + cX^2\right) \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que} \\ &\qquad P(X) = a(X-1) + bX(X-1) + cX^2(X-1) \end{aligned}$$
Ceci prouve que :
$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\left((X-1), X(X-1), X^2(X-1)\right)$$
Les trois polynômes obtenus, non nuls, de degrés tous distincts, forment donc une famille libre et une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
3. *Détermination de* $\text{Im}(\varphi)$
Soit $P(X) = 1$. $\varphi(P) = 1$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda P) = \lambda$ donc $\lambda \in \text{Im}(\varphi)$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \text{Im}(\varphi)$, comme $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et φ est surjective.

7.3 Opérations sur les applications linéaires

Théorème – Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\quad \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E,F)$
- $(\mathcal{L}(E,F), +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

- Si f et g sont linéaires de E dans F, pour tout $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, par définition des opérations sur les applications :
$$(\alpha f + \beta g)\left(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right) = \alpha f\left(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right) + \beta g\left(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right)$$

f et g étant linéaires :

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)\left(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\right) &= \alpha\lambda f\left(\overrightarrow{u}\right)+\alpha\mu f\left(\overrightarrow{v}\right)+\beta\lambda g\left(\overrightarrow{u}\right)+\beta\mu g\left(\overrightarrow{v}\right)\\ &= \lambda\left(\alpha f\left(\overrightarrow{u}\right)+\beta g\left(\overrightarrow{u}\right)\right)+\mu\left(\alpha f\left(\overrightarrow{v}\right)+\beta g\left(\overrightarrow{v}\right)\right)\\ &= \lambda(\alpha f+\beta g)\left(\overrightarrow{u}\right)+\mu(\alpha f+\beta g)\left(\overrightarrow{v}\right)\end{aligned}$$

donc $\alpha f+\beta g$ est linéaire.

- On a : $\mathcal{L}(E,F)\subset F^E$ et $\left(F^E,+,\cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application nulle $E\to F$ définie par :

$$\overrightarrow{u}\mapsto\overrightarrow{0}_F$$

est linéaire. Le début montre que $\mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaisons linéaires, donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\left(F^E,+,\cdot\right)$.
Alors $(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ■

Théorème – Composition des applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$, alors $g\circ f\in\mathcal{L}(E,G)$.
En d'autres termes une composée d'applications linéaires est linéaire.

Démonstration – Pour tout $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\in E^2$, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, par définition de la loi $\circ$:

$$g\circ f\left(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\right)=g\left(f\left(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\right)\right)$$

f étant linéaire :

$$g\circ f\left(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\right)=g\left(\lambda f\left(\overrightarrow{u}\right)+\mu f\left(\overrightarrow{v}\right)\right)$$

g étant linéaire :

$$\begin{aligned}g\circ f\left(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\right) &= \lambda g\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)+\mu g\left(f\left(\overrightarrow{v}\right)\right)\\ &= \lambda g\circ f\left(\overrightarrow{u}\right)+\mu g\circ f\left(\overrightarrow{v}\right)\end{aligned}$$

Donc $g\circ f$ est linéaire. ■

Corollaire

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(\mathcal{L}(E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, stable pour la loi $\circ$, ce qui signifie qu'une composée d'endomorphismes de E est un endomorphisme de E.

Remarque – Non commutativité de la loi $\circ$

La loi $\circ$ n'est pas commutative dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que si f et g sont deux endomorphismes de E, les deux composées de f et g sont définies, mais, en général, $g\circ f\neq f\circ g$. Lorsque $g\circ f=f\circ g$ (cela arrive) on dit que *f et g commutent*.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Proposition – *Soient f, g, h dans $\mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :*

- $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$
- $h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g$
- $(\lambda f)\circ g = f\circ(\lambda g) = \lambda(f\circ g)$.

Définition – Composées successives d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit les **composées successives de f** par récurrence :

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad f^{n+1} = f^n \circ f \end{cases}$$

Remarque

Lorsque $n \geq 1$, les composées successives sont donc :

$$f^1 = f \qquad f^2 = \underbrace{f\circ f}_{2 \text{ fois } f} \qquad f^3 = \underbrace{f\circ f\circ f}_{3 \text{ fois } f} \quad \text{etc...}$$

Elles vérifient :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad f^p \circ f^q = f^{p+q}$$

Définition – Polynôme d'endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

On définit alors l'**endomorphisme** $P(f)$ de E par :

$$P(f) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_n f^n$$

Quand on écrit un polynôme d'endomorphisme $P(f)$, le point délicat est de penser à remplacer le terme constant a_0 du polynôme par l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E$. Les puissances de f représentent des *composées* (le produit d'endomorphismes n'est pas défini).

Avant d'appliquer la formule du binôme, il faut bien vérifier que les deux endomorphismes commutent. C'est toujours le cas lorsque l'un des deux est Id_E ou une homothétie $\lambda\mathrm{Id}_E$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

Théorème – Formule du binôme de Newton

Soient f, g endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $f\circ g = g\circ f$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^k \circ f^{n-k}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_E + f)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \\ &= \mathrm{Id}_E + nf + \binom{n}{2} f\circ f + \cdots + \binom{n}{n} \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois } f}\end{aligned}$$

Théorème et définition – Réciproque d'un isomorphisme

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f un isomorphisme de E sur F. Alors f^{-1} est linéaire, c'est-à-dire que f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E sur F.

Démonstration

$f : E \to F$ est bijective, donc f^{-1} existe.

$$\forall \left(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\right) \in F^2, \overrightarrow{u}_1 = f^{-1}\left(\overrightarrow{v}_1\right) \Longleftrightarrow f\left(\overrightarrow{u}_1\right) = \overrightarrow{v}_1$$
$$\overrightarrow{u}_2 = f^{-1}\left(\overrightarrow{v}_2\right) \Longleftrightarrow f\left(\overrightarrow{u}_2\right) = \overrightarrow{v}_2$$

f étant linéaire, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} f\left(\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2\right) &= \lambda_1 f\left(\overrightarrow{u}_1\right) + \lambda_2 f\left(\overrightarrow{u}_2\right) \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 \end{aligned}$$

Par définition de f^{-1} :

$$\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 = f^{-1}\left(\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2\right)$$

C'est à dire :

$$\lambda_1 f^{-1}\left(\overrightarrow{v}_1\right) + \lambda_2 f^{-1}\left(\overrightarrow{v}_2\right) = f^{-1}\left(\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2\right)$$

donc f^{-1} est linéaire. f^{-1} étant bijective, f^{-1} est donc un isomorphisme de F sur E. ■

Exemple

Soit f dans $\mathcal{L}(E)$. S'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul, avec $P(0) \neq 0$, alors f est un automorphisme de E.

En effet, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, $a_0 \neq 0$, tels que

$P(X) = a_0 + \cdots + a_n X^n$.

$P(f) = \tilde{0}$ s'écrit $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_n f^n = \tilde{0}$, donc

$$f \circ \left(\frac{a_1 \mathrm{Id}_E + \cdots + a_n f^{n-1}}{-a_0}\right) = \mathrm{Id}_E \text{ et } \left(\frac{a_1 \mathrm{Id}_E + \cdots + a_n f^{n-1}}{-a_0}\right) \circ f = \mathrm{Id}_E$$

Donc f est bijective, de réciproque $g = \dfrac{a_1 \mathrm{Id}_E + \cdots + a_n f^{n-1}}{-a_0}$.

f étant linéaire, f est un automorphisme de E.

Proposition – Composée d'isomorphismes

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G.

Alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

7.4 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Théorème – Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\right)$ une base de E et $\left(\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\right)$ n vecteurs arbitraires de F.
Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f\left(\overrightarrow{u}_k\right) = \overrightarrow{v}_k$$

Démonstration

$\mathcal{B}$ étant une base de E, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$,

$$\exists!\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } \overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u}_n$$

On pose alors :

$$f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v}_n$$

Soit $\overrightarrow{w} \in E$. $\exists!\, (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\overrightarrow{w} = \mu_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \mu_n \overrightarrow{u}_n$. Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

$$\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{w} = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) \overrightarrow{u}_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) \overrightarrow{u}_n$$

$$f\left(\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{w}\right) = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) \overrightarrow{v}_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) \overrightarrow{v}_n$$

$$= \alpha \underbrace{\left(\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v}_n\right)}_{f(\overrightarrow{u})} + \beta \underbrace{\left(\mu_1 \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \mu_n \overrightarrow{v}_n\right)}_{f(\overrightarrow{w})}$$

$$= \alpha f\left(\overrightarrow{u}\right) + \beta f\left(\overrightarrow{v}\right)$$

Donc f ainsi définie est linéaire. De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\overrightarrow{u}_k = 0.\overrightarrow{u}_1 + \cdots + 0.\overrightarrow{u}_{k-1} + 1.\overrightarrow{u}_k + 0.\overrightarrow{u}_{k+1} + \cdots + 0.\overrightarrow{u}_n$$

Donc :

$$f\left(\overrightarrow{u}_k\right) = 0.\overrightarrow{v}_1 + \cdots + 0.\overrightarrow{v}_{k-1} + 1.\overrightarrow{v}_k + 0.\overrightarrow{v}_{k+1} + \cdots + 0.\overrightarrow{v}_n$$

Donc f satisfait à la condition cherchée. ■

Interprétation

Si l'espace de départ possède une base finie, une application linéaire est entièrement déterminée en fixant les images des vecteurs d'une base de E.

En particulier, pour montrer que deux applications linéaires sont égales, il suffit de montrer que les vecteurs d'une base ont même image par ces deux applications.

Théorème – Images de familles particulières

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si f est injective, si $\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right)$ est une famille libre de E, alors $\left(f\left(\vec{u}_1\right), \ldots, f\left(\vec{u}_n\right)\right)$ est une famille libre de F,
2. Si f est surjective, si $\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right)$ est une famille génératrice de E, alors $\left(f\left(\vec{u}_1\right), \ldots, f\left(\vec{u}_n\right)\right)$ est une famille génératrice de F,
3. on a équivalence entre les énoncés suivants :
 (a) f est un isomorphisme de E sur F,
 (b) il existe une base de E que f transforme en une base de F
 (c) f transforme toute base de E en une base de F

7.5 Projections et symétries

7.5.1 Projections

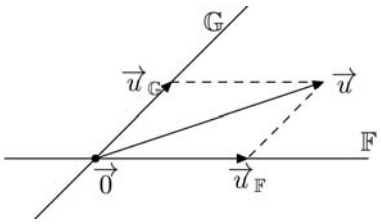
Définition – Projection

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

$$\forall \vec{u} \in E, \exists ! \left(\vec{u}_F, \vec{u}_G\right) \in F \times G \text{ tels que } \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$$

On appelle **projection de E sur F parallèlment à G (ou de direction G)** l'application $p : E \to E$ définie par :

$$\vec{u} \mapsto \vec{u}_F$$



Proposition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, p la projection de E sur F de direction G.*

1. *p est linéaire,*
2. $\mathrm{Ker}(p) = G$,
3. $\mathrm{Im}(p) = F$,
4. *F est l'ensemble des vecteurs invariants par p, c'est à dire :*

$$F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$

5. $p \circ p = p$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

1. Soient $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. En adoptant les notations de la définition :

$$\exists ! \left(\overrightarrow{u}_F, \overrightarrow{u}_G\right) \in F \times G \text{ tels que } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_F + \overrightarrow{u}_G$$
$$\exists ! \left(\overrightarrow{v}_F, \overrightarrow{v}_G\right) \in F \times G \text{ tels que } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_F + \overrightarrow{v}_G$$

Alors :

$$\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \underbrace{\left(\lambda\overrightarrow{u}_F + \overrightarrow{v}_F\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\lambda\overrightarrow{u}_G + \overrightarrow{v}_G\right)}_{\in G}$$

Par unicité de la décomposition du vecteur $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sur F et G, on en déduit que :

$$\begin{aligned} p\left(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) &= \lambda\overrightarrow{u}_F + \overrightarrow{v}_F \\ &= \lambda p\left(\overrightarrow{u}\right) + p\left(\overrightarrow{v}\right) \end{aligned}$$

donc p est linéaire.

2. Avec les même notations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker}(f) &\iff p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{u}_F = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_G \\ &\iff \overrightarrow{u} \in G \end{aligned}$$

3. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $p\left(\overrightarrow{u}\right) \in F$, donc $\operatorname{Im}(p) \subset F$.

Réciproquement, pour tout $\overrightarrow{u} \in G$,

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in G}$$

Donc :

$$p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} \text{ donc } \overrightarrow{u} \in \operatorname{Im}(p)$$

on a montré que $F \subset \operatorname{Im}(p)$, donc $\operatorname{Im}(p) = F$.

4. $\overrightarrow{u}$ est invariant par p si et seulement si, successivement :

$$\begin{aligned} &p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} \\ &\overrightarrow{u}_F = \overrightarrow{u} \\ &\overrightarrow{u} \in F \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} &\iff p\left(\overrightarrow{u}\right) - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \\ &\iff p\left(\overrightarrow{u}\right) - \mathrm{Id}_E\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0} \\ &\iff (p - \mathrm{Id}_E)\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

Ceci montre que $F = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

5. $\forall \vec{u} \in E$, $p\left(\vec{u}\right) \in F$ donc $p\left(p\left(\vec{u}\right)\right) = p\left(\vec{u}\right)$. On a montré que $p \circ p = p$. ■

Définition – Projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme f de E vérifiant :

$$f \circ f = f$$

Théorème – Caractérisation des projections

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. f est un projecteur de E si et seulement si f est une projection et dans ce cas f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ de direction $\mathrm{Ker}(f)$.
En particulier si $f \circ f = f$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous espaces supplémentaires de E.

Démonstration

1. *Condition suffisante*
 Nous avons vu que, si f est la projection sur F de direction G, alors $f \circ f = f$ et f est linéaire, donc f est un projecteur et $F = \mathrm{Im}(f)$, $G = \mathrm{Ker}(f)$.
2. *Condition nécessaire*
 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f$. Montrons que :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

 par analyse-synthèse. Soit $\vec{u} \in E$ fixé.
 (a) *Unicité*
 Supposons que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\vec{w} \in \mathrm{Im}(f)$. Alors $\exists \vec{w}_1$ tel que $f\left(\vec{w}_1\right) = \vec{w}$. En composant par f :

$$f\left(\vec{w}\right) = \underbrace{f \circ f}_{=f}\left(\vec{w}_1\right) = f\left(\vec{w}_1\right) = \vec{w}$$

 De plus $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f\left(\vec{v}\right) = \vec{0}$. f étant linéaire :

$$f\left(\vec{u}\right) = \underbrace{f\left(\vec{v}\right)}_{\vec{0}} + \underbrace{f\left(\vec{w}\right)}_{\vec{w}} = \vec{w}$$

 D'où :

$$\vec{v} = \vec{u} - f\left(\vec{u}\right)$$

 Ceci prouve l'unicité de $\left(\vec{v}, \vec{w}\right)$.
 (b) *Existence*
 Posons $\vec{w} = f\left(\vec{u}\right)$ et $\vec{v} = \vec{u} - f\left(\vec{u}\right)$. On a alors :

$$\vec{w} \in \mathrm{Im}(f)$$

$$f\left(\vec{v}\right) = f\left(\vec{u}\right) - \underbrace{f \circ f}_{=f}\left(\vec{u}\right) = \vec{0} \text{ donc } \vec{v} \in \mathrm{Ker}(f)$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{u} - f\left(\vec{u}\right) + f\left(\vec{u}\right) = \vec{u}$$

 d'où l'existence de $\left(\vec{v}, \vec{w}\right)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On a ainsi démontré que, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$,

$$\exists ! \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \in \text{Ker}\,(f) \times \text{Im}\,(f) \text{ tels que } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

c'est-à-dire :

$$E = \text{Ker}\,(f) \oplus \text{Im}\,(f)$$

Il en résulte de plus que :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}_{\text{Im}(f)}$$

donc que f est la projection sur $\text{Im}\,(f)$ de direction $\text{Ker}\,(f)$ ■

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x + 3y - z = 0\right\}$$
$$G = \text{Vect}\,((1, -1, -1))$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$
2. Soit p la projection sur F de direction G. Déterminer l'expression analytique de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire exprimer (x', y', z') en fonction de (x, y, z) lorsque $p\,(x, y, z) = (x', y', z')$.

Solution

1. Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Procédons par analyse-synthèse pour montrer que :

$$\exists ! \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \in F \times G \text{ tels que } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

- *Unicité*

 Supposons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = (x', y', z') \in F \\ \overrightarrow{w} = \lambda(1, -1, -1) \in G \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v} = (x', y', z') \in F \iff x' + 3y' - z' = 0$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \iff \begin{cases} x = x' + \lambda \\ y = y' - \lambda \\ z = z' - \lambda \end{cases}$$

$$\implies x + 3y - z = \underbrace{x' + 3y' - z'}_{=0} - \lambda$$

$$\implies \lambda = -x - 3y + z$$

D'où :

$$\begin{cases} x' = x - \lambda = 2x + 3y - z \\ y' = y + \lambda = -x - 2y + z \\ z' = z + \lambda = -x - 3y + 2z \end{cases}$$

D'où :

$$(1)\quad \begin{cases} \overrightarrow{v} = (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z) \\ \overrightarrow{w} = (-x-3y+z)\,(1,-1,-1) \end{cases}$$

d'où l'unicité.

- *Existence*

 Définissons $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ par (1). On a alors :

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{w} = (-x-3y+z)\,(1,-1,-1) \in G$$

$$(2x+3y-z) + 3\,(-x-2y+z) - (-x-3y+2z) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{v} \in F$$

d'où l'existence.

2. En 1., nous avons obtenu, pour $\overrightarrow{u} \in E$, l'expression de $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \in F \times G$ tels que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

D'après la définition de p, projection sur F de direction G :

$$p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{v}$$

donc l'expression analytique de p est :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y - z \\ y' = -x - 2y + z \\ z' = -x - 3y + 2z \end{cases}$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, $f : a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mapsto a_0 + a_3X^3$ est la projection sur Vect $\left(1, X^3\right)$ parallèlement à Vect $\left(X, X^2\right)$.

7.5.2 Symétries

Définition – Symétrie

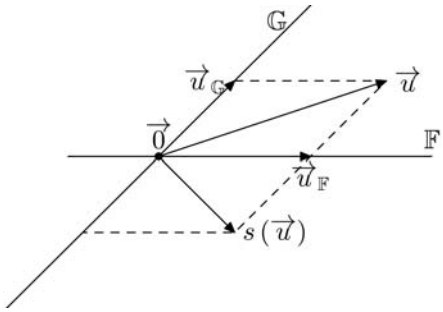
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \exists ! \left(\overrightarrow{u}_F, \overrightarrow{u}_G\right) \in F \times G \text{ tels que } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_F + \overrightarrow{u}_G$$

On appelle **symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G)** l'application $p : E \to E$ définie par :

$$\overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{u}_F - \overrightarrow{u}_G$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, s la symétrie par rapport à F de direction G.

1. $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ *où p est la projection sur F de direction G,*
2. *s est linéaire,*
3. $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ *: F est l'ensemble des vecteurs invariants par s,*
4. $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ *: G est l'ensemble des vecteurs que s transforme en leur opposé,*
5. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. *En particulier, s est un automorphisme de E*

Démonstration

1. Pour tout $\vec{u} \in E$:

$$\begin{aligned} s\left(\vec{u}\right) &= \vec{u}_F - \vec{u}_G \\ &= 2\vec{u}_F - \left(\vec{u}_F + \vec{u}_G\right) \\ &= 2p\left(\vec{u}\right) - \vec{u} \\ &= 2p\left(\vec{u}\right) - \mathrm{Id}_E\left(\vec{u}\right) \end{aligned}$$

 Ceci prouve que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
2. p et Id_E étant linéaires, $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est linéaire,
3. Utilisons $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \in F &\iff p\left(\vec{u}\right) = \vec{u} \\ &\iff s\left(\vec{u}\right) = 2\vec{u} - \vec{u} \\ &\iff s\left(\vec{u}\right) = \vec{u} \\ &\iff (s - \mathrm{Id}_E)\left(\vec{u}\right) = \vec{0} \end{aligned}$$

 Ainsi $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$

$$\begin{aligned} \vec{u} \in G &\iff p\left(\vec{u}\right) = \vec{0} \\ &\iff s\left(\vec{u}\right) = 2\vec{0} - \vec{u} \\ &\iff s\left(\vec{u}\right) = -\vec{u} \\ &\iff (s + \mathrm{Id}_E)\left(\vec{u}\right) = \vec{0} \end{aligned}$$

Ainsi $G = \text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$

4. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$:

$$\begin{aligned} s \circ s\left(\overrightarrow{u}\right) &= s\left(s\left(\overrightarrow{u}\right)\right) \\ &= s\left(\overrightarrow{u}_F - \overrightarrow{u}_G\right) \\ &= \overrightarrow{u}_F + \overrightarrow{u}_G \\ &= \overrightarrow{u} \end{aligned}$$ ■

Théorème – Caractérisation des symétries

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une symétrie si et seulement si :

$$f \circ f = \text{Id}_E$$

Dans ce cas, f est la symétrie par rapport à $\text{Ker}\,(s - \text{Id}_E)$, de direction $\text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$. En particulier :

$$E = \text{Ker}\,(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$$

Démonstration – Posons $p = \frac{1}{2}(\text{Id}_E + f)$ et vérifions que p est un projecteur.

$$p \circ p = \frac{1}{4}(\text{Id}_E + f)^2$$

Id_E et f commutent, donc d'après la formule du binôme :

$$p \circ p = \frac{1}{4}(\text{Id}_E + 2f + f \circ f)$$

Comme $f \circ f = \text{Id}_E$:

$$\begin{aligned} p \circ p &= \frac{1}{4}(2\text{Id}_E + 2f) \\ &= \frac{1}{2}(\text{Id}_E + f) = p \end{aligned}$$

ainsi p est un projecteur. De plus, p est la projection sur F, de direction G où :

$$\begin{aligned} F &= \text{Ker}\,(p - \text{Id}_E) \\ &= \text{Ker}\left(\frac{1}{2}(\text{Id}_E + f) - \text{Id}_E\right) \\ &= \text{Ker}\left(\frac{1}{2}(f - \text{Id}_E)\right) = \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E) \\ G &= \text{Ker}\,(p) \\ &= \text{Ker}\left(\frac{1}{2}(f + \text{Id}_E)\right) = \text{Ker}\,(f + \text{Id}_E) \end{aligned}$$ ■

Exemple – Symétrie dans $\mathbb{K}^2$

L'application $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ définie par :

$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

est la symétrie par rapport à $\text{Vect}\,((1, 0))$ de direction $\text{Vect}\,((0, 1))$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$P(X) \mapsto P(-X)$$

est une symétrie et indiquer les sous-espaces qui la définissent.

Solution

1. *f est linéaire*

En effet :

$$\begin{aligned}\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (f(\lambda P + Q))(X) &= (\lambda P + Q)(-X) \\ &= \lambda P(-X) + Q(-X) \\ &= (\lambda f(P) + f(Q))(X)\end{aligned}$$

2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\begin{aligned}((f \circ f)(P))(X) &= (f(Q))(X) \text{ où } Q(X) = P(-X) \\ &= Q(-X) = P(-(-X)) = P(X)\end{aligned}$$

Donc $(f \circ f)(P) = P$.

$f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$. On en déduit que f est une symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$ de direction $G = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$.

Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}P \in F &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(-x) = P(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad a - bx + cx^2 = a + bx + cx^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2bx = 0 \\ &\iff b = 0 \iff P = a + cX^2\end{aligned}$$

Donc $F = \mathrm{Vect}\left(1, X^2\right)$

$$\begin{aligned}P \in G &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(-x) = -P(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad a - bx + cx^2 = -a - bx - cx^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2a + 2cx^2 = 0 \\ &\iff a = c = 0 \iff P = bX\end{aligned}$$

Donc $G = \mathrm{Vect}(X)$

f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left(1, X^2\right)$ de direction $\mathrm{Vect}(X)$.

Synthèse

Savoirs

- Formule du binôme
- Liens entre noyau/image et injectivité/surjectivité de l'application linéaire,

Savoir-faire

- Savoir montrer qu'une application est linéaire
- Savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ où $(p, n) \in [\![1, 4]\!]^2$

Mots-clés

- Application linéaire,
- endomorphisme,
- automorphisme,
- noyau,
- image,
- projection,
- symétrie.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

7.1 Parmi les applications suivantes, reconnaître celles qui sont linéaires :

$$f_1\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{cases} \quad f_2\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\mapsto(x+2y+1,2x+y)\end{cases}$$

$$f_3\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\mapsto(x+y,xy)\end{cases} \quad f_4\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto|x|\end{cases}$$

$$f_5\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\mapsto(4x,5y)\end{cases}$$

7.2 En admettant que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau et leur image par une de leurs bases.

$$g_1\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\mapsto(2x+5y,-6x-15y)\end{cases}$$

$$g_2\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\\ (x,y,z)\mapsto(x+y,2x+y-3z)\end{cases}$$

7.3 Cocher les bonnes réponses lorsque g désigne l'application g_1, puis l'application g_2 du **7.2**

□ g est injective.

□ g est surjective.

□ g est un automorphisme.

□ g est un projecteur.

7.4 Trouver une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ d'image engendrée par $((-2,0,5),(1,3,2))$.

7.5 Montrer que $\varphi : P(X)\mapsto P(X-1)-P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

φ est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

7.6 **Vrai ou faux ?**

1) Un isomorphisme est un endomorphisme.

2) Si f est un isomorphisme, son noyau est $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

3) Si f est un isomorphisme alors f est un automorphisme

7.7 Soient E un espace vectoriel et p un endomorphisme de E.

1) Montrer que p est un projecteur si et seulement si Id_E-p est un projecteur.

2) Préciser le noyau et l'image de Id_E-p par rapport à ceux de p.

Exercices d'application

7.8

On définit l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x+2y+z,-2x+3z,8x+4y-13z)$.

On admet que f est linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}\,f$ et Imf par une de leurs bases. f est-elle injective ? surjective ? Est-ce un automorphisme ?

Si f est bijective, déterminer l'expression de son automorphisme réciproque.

■ **Applications linéaires sur des espaces de polynômes**

7.9

On considère $f\begin{cases}\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}[X]\\ P\mapsto Q\end{cases}$, où Q est le quotient de la division de P par $X-3$.

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer $\mathrm{Ker}\,f$ et Imf.

7.10

Soient les applications ψ et φ de $\mathbb{R}[X]$dans $\mathbb{R}[X]$ définies par : $\forall P\in\mathbb{R}[X],\psi(P)=P'$ et $\varphi(P)=XP$.

1) Montrer que ψ et φ sont deux endomorphismes de$\mathbb{R}[X]$, l'un injectif, l' autre surjectif.

2) Calculer $\psi o\varphi-\varphi o\psi$.

3) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\psi o\varphi^n-\varphi^n o\psi=n\varphi^{n-1}$.

7.11

Pour a réel non nul, on considère l'application f_a de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe $P(aX+1-a)$.

1) Pour a,b réels non nuls, déterminer $f_b o f_a$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $(f_a)^n$.

2) Montrer que f_a est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Déterminer le noyau et l'image de f_a

7.12 **D'après EML 2008**

On note f,g,h les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définies par : pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$,

$f(P)=-P''+2XP'+P$,

$g(P)=2XP-P'$, $\quad h(P)=P'$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$, et on note Id l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

2) Etablir : $goh=f-Id$ et $hog=f+Id$.

3) En déduire que $fog-gof=2g$.

■ Exercices généraux utilisant noyau/image

7.13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E tels que $fog = gof$.

On dit qu'un sous-espace F de E est *stable par l'endomorphisme* f si et seulement si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire que $\forall x \in F, f(x) \in F$.

1) Montrer que $\text{Ker}\, g$ et Img sont stables par f

2) On suppose que $E = \text{Ker}\, f + \text{Ker}\, g$; montrer que $Img \subset \text{Ker}\, f$.

7.14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $Imf = Vect\left(\overrightarrow{u}\right)$ avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

1) Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{K} / f^2 = \lambda f$.

2) On suppose $\lambda \neq 1$. On pose $g = f - Id_E$. Déterminer un polynôme P tel que $P(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Puis en déduire que g est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque.

■ Projecteurs et symétries

7.15

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux endomorphismes de E. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

1) $poq = p$ et $qop = q$

2) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

7.16 D'après Edhec 2009 S

On note $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$

Pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$, on admet que l'expression $X^{2n+1} \times \frac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.

On note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par : $f(P) = X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) Vérifier que $fof = Id_E$. Que peut-on en déduire ?

3) Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\text{Ker}\,(f - Id_E)$.

Montrer que les a_k pour $0 \leqslant k \leqslant 2n+1$ sont solutions du système : $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = a_{2n+1-k}$.

En déduire une base de $\text{Ker}\,(f - Id_E)$.

4) Déterminer de la même façon une base de $\text{Ker}\,(f + Id_E)$.

5) Conclure en décrivant f.

Exercices d'approfondissement

7.17

Soit E un K-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$ et f un endomorphisme de E, non identiquement nul, tel que $f^3 = -f$.

1) En raisonnant par analyse-synthèse, montrer que $E = \text{Ker}\, f \oplus Imf$.

2) On note $\widetilde{f}$ la restriction de f à Imf. Montrer que $\widetilde{f}$ est un automorphisme de Imf.

3) Montrer que Imf contient au moins une partie libre de deux vecteurs. Pour cela, on pourra montrer que si $x \in Imf - \{0_E\}$, la famille $(x, f(x))$ est libre.

Que peut-on en déduire ?

7.18

Soit f, application linéaire d'un espace vectoriel E vérifiant : $f^2 - 5f + 6Id_E = \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de E.

Montrer que : $E = \text{Ker}\,(f - 2Id_E) \oplus \text{Ker}\,(f - 3Id_E)$.

On pourra procéder par analyse-synthèse.

7.19

Soient p et q deux projecteurs de l'espace vectoriel E. $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de E.

Montrer qu'on a équivalence entre les énoncés suivants :

1) $(p+q)$ est un projecteur.

2) $poq + qop = \widetilde{0}$

3) $poq = qop = \widetilde{0}$

4) $Imp \subset \text{Ker}\, q$ et $Imq \subset \text{Ker}\, p$

Montrer qu'alors $Im(p+q) = Imp \oplus Imq$ et que $\text{Ker}\,(p+q) = \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$.

7.20 D'après Essec 2011. Centre de $\mathcal{L}(E)$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-espace vectoriel possédant une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et u un endomorphisme de E.

1) On suppose que pour tout vecteur non nul x de E, $u(x)$ est colinéaire à x. Montrer que u est une homothétie.

Pour cela, on pourra considérer le vecteur $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

2) Si v est un endomorphisme de E commutant avec tous les projecteurs, montrer que v est une homothétie.

On pourra pour cela considérer e, vecteur non nul de E, G un supplémentaire dans E de $Vect(e)$, et p la projection sur $Vect(e)$ parallèlement à G.

3) Déterminer $C = \{v \in \mathcal{L}(E) \,|\, \forall u \in \mathcal{L}(E), uov = vou\}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

7.1

- $f_1(-1) = 1 = f_1(1)$. On n'a donc pas $f_1(-1) = -f_1(1)$. Donc f_1 n'est pas linéaire.
- $f_2(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$ donc f_2 n'est pas linéaire.
- $f_3(1,1) = (2,1)$ et $f_3(-1,-1) = (-2,1) \neq -f_3(1,1)$ donc f_3 n'est pas linéaire.
- $f_4(1,1) = 1 = f_4(-1,-1)$ donc $f_4(-1,-1) \neq -f_4(1,1)$, donc f_4 n'est pas linéaire.
- $\forall \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
 $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1)$,
 $f_5\left(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = f_5(\lambda x + x_1, \lambda y + y_1)$
 $f_5\left(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = (4(\lambda x + x_1), 5(\lambda y + y_1))$
 $f_5\left(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = (4\lambda x + 4x_1, 5\lambda y + 5y_1)$
 $f_5\left(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \lambda \underbrace{(4x, 5y)}_{f_5(\overrightarrow{u})} + \underbrace{(4x_1, 5y_1)}_{f_5(\overrightarrow{v})}$
 $f_5\left(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \lambda f_5\left(\overrightarrow{u}\right) + f_5\left(\overrightarrow{v}\right)$
 On a prouvé que f_5 est linéaire.

7.2

1) $\overrightarrow{u} = (x,y) \in \operatorname{Ker} g_1 \Leftrightarrow g_1(x,y) = (0,0)$

$$\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker} g_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -6x - 15y = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker} g_1 \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = -\dfrac{2}{5}x \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x$$

$$\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker} g_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \frac{x}{5}(5,-2)$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} g_1 = Vect(5,-2)$

Img_1 est engendré par les images de la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$Img_1 = Vect[g_1(1,0), g_1(0,1)]$

$$Img_1 = Vect\left(\underbrace{(2,-6)}_{2(1,-3)}, \underbrace{(5,-15)}_{5(1,-3)}\right) = Vect(1,-3)$$

2) $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} g_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$

$$\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker} g_2 \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = \dfrac{x}{3} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker} g_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \left(x, -x, \frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \frac{x}{3}(3,-3,1)$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} g_2 = Vect(3,-3,1)$

$Img_2 = Vect[g_2(1,0,0), g_2(0,1,0), g_2(0,0,1)]$

$Img_2 = Vect[(1,2),(1,1),(0,-3)]$

$Img_2 = Vect[(1,2) - 2(1,1),(1,1),(0,-3)]$

$Img_2 = Vect[(-1,0),(1,1),(0,-3)]$

$Img_2 = Vect[(1,0),(0,1)] = \mathbb{R}^2$

7.3

- $\operatorname{Ker} g_1 = Vect(5,-2) \neq \{(0,0)\}$ donc g_1 n'est pas injective. En particulier, g_1 n'est pas bijective, donc n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
 $Img_1 = Vect(1,-3) \neq \mathbb{R}^2$ donc g_1 n'est pas surjective
 Par ailleurs, $g_1 o g_1(1,0) = g_1(2,-6) = (-26,78)$
 Donc $g_1 o g_1(1,0) \neq g_1(1,0) = (-2,6)$
 Donc $g_1 o g_1 \neq g_1$, ce qui prouve que g_1 n'est pas un projecteur.
- $\operatorname{Ker} g_2 = Vect(3,-3,1) \neq \{(0,0,0)\}$ donc g_2 n'est pas injective.
 $Img_2 = \mathbb{R}^2$ donc g_2 est surjective.
 $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donc son espace de départ et son espace d'arrivée ne sont pas les mêmes et on ne peut pas parler d'« automorphisme », ni de projecteur pour g_2 ; de toute façon, g_2 n'étant pas injective, n'est pas non plus bijective et ce n'est pas non plus un isomorphisme.

7.4

$((1,0),(0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit f une application dont l'image est engendrée par $((-2,0,5),(1,3,2))$,

alors $Imf = Vect(f(1,0), f(0,1))$.

Les conditions $\begin{cases} f(1,0) = (-2,0,5) \\ f(0,1) = (1,3,2) \end{cases}$ définissent une unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, qui convient. Voyons son expression :

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = xf(1,0) + yf(0,1)$

$f(x,y) = x(-2,0,5) + y(1,3,2)$

$f(x,y) = (-2x + y, 3y, 5x + 2y)$

Remarque – f n'est pas unique On pourrait par exemple échanger les images de $(1,0)$ et $(0,1)$.

7.5

- Remarquons que l'écriture $P(X-1)$ désigne une composée, et qu'a priori, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$
- Montrons que φ est linéaire : soient P, Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
 $\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X-1) - (\lambda P + Q)(X)$
 Par définition des opérations sur les polynômes,
 $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda P(X-1) + Q(X-1) - \lambda P(X) - Q(X)$
 $= \lambda[P(X-1) - P(X)] + [Q(X-1) - Q(X)]$
 $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$, donc φ est linéaire.

$\left(1, X, X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, aussi calculons les images de X^k où $0 \leqslant k \leqslant 2$:

$\varphi\left(X^0\right) = \varphi(1) = 1 - 1 = 0$

$\varphi(X) = (X-1) - X = -1$

$\varphi\left(X^2\right) = (X-1)^2 - X^2 = -2X + 1.$

$Im\varphi = Vect\left(\varphi(1), \varphi(X), \varphi\left(X^2\right)\right)$

$Im\varphi = Vect(-1, -2X+1) = Vect(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$

$Im\varphi = \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_2[X].$

φ, linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. En revanche, $Im\varphi \neq \mathbb{R}_2[X]$, donc φ n'est pas surjective, ni bijective.

De plus, nous avons vu que $\varphi(1) = 0$, donc φ n'est pas injective.

7.6

1) VRAI si l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques, FAUX dans le cas contraire, puisqu'un endomorphisme a même espace de départ et d'arrivée.

2) VRAI car un isomorphisme est bijectif, donc injectif, donc vérifie que son noyau est $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

3) VRAI si l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques, FAUX dans le cas contraire.

7.7

1) $*$ p étant linéaire, p est un projecteur si et seulement si $pop = p$. Alors d'une part, $Id_E - p$ est linéaire, d'autre part $(Id_E - p)^2 = Id_E - 2p + \underbrace{pop}_{=p} = Id_E - p$

Donc $Id_E - p$ est un projecteur.

Donc (1) p projecteur$\Rightarrow$ $Id_E - p$ projecteur.

$*$ Réciproquement, $p = Id_E - (Id_E - p)$; en appliquant (1) à $Id_E - p$, on obtient que ;

$Id_E - p$ projecteur$\Rightarrow$ p projecteur.

D'où l'équivalence.

2) Ker $(Id_E - p)$ est l'espace des vecteurs invariants par p, qui est un projecteur, donc Ker $(Id_E - p) = Imp$.

Comme $p = Id_E - (Id_E - p)$, Ker $(p) = Im(Id_E - p)$.

7.8

Notons $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{u'} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{u'} = f\left(\overrightarrow{u}\right) \Leftrightarrow (S)\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = -2x + 3z \\ z' = 8x + 4y - 13z \end{cases}$$

$\overrightarrow{u'} \in Imf$ $\Leftrightarrow$Le système (S) possède au moins une solution, c'est-à-dire est compatible. Utilisons la méthode du pivot et la notation sous forme de tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x' \\ -2 & 0 & 3 & y' \\ 8 & 4 & -13 & z' \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & y' \\ 1 & 2 & 1 & x' \\ 8 & 4 & -13 & z' \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & y' \\ 0 & 4 & 5 & 2x' + y' \\ 0 & 4 & -1 & z' + 4y' \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & y' \\ 0 & 4 & 5 & 2x' + y' \\ 0 & 0 & -6 & -2x' + 3y' + z' \end{array}\right)$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \quad\quad +3z = y' \\ \quad 4y \quad +5z = 2x' + y' \\ \quad\quad -6z = -2x' + 3y' + z' \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux, en bleu, du système sont tous non nuls ; (S) a donc une solution unique quelle que soit la valeur de $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. On a donc montré : $\forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \exists!\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (x', y', z')$

f est donc bijective, et par conséquent injective et surjective. f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Pour obtenir l'expression analytique de f^{-1},il suffit de résoudre (S).

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(-y' + 3z) \\ y = \dfrac{1}{4}(2x' + y' - 5z) \\ z = \dfrac{1}{6}(2x' - 3y' - z') \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}(2x' - 5y' - z') \\ y = \dfrac{1}{24}(2x' + 21y' + 5z') \quad (*) \\ z = \dfrac{1}{6}(2x' - 3y' - z') \end{cases}$$

$f(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow (x, y, z) = f^{-1}(x', y', z')$

f^{-1} est donc définie par $f^{-1} : (x, y, z) \mapsto (x_1, y_1, z_1)$ où :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}(2x - 5y - z) \\ y_1 = \dfrac{1}{24}(2x + 21y + 5z) \\ z_1 = \dfrac{1}{6}(2x - 3y - z) \end{cases}$$

7.9

1) Soient P, P_1 dans $\mathbb{R}_3[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

par définition de la division euclidienne des polynômes, quand on divise P par $(X-3)$, le reste est de degré < 1, i.e. le reste est un polynôme constant, donc$\exists a \in \mathbb{R} / P = (X-3)Q + a$. En remplaçant X par 3 dans cette égalité, on obtient : $a = P(3)$

$f(P)$ étant le quotient de la division de P par $X - 3$,

$Q = f(P) \Leftrightarrow P = (X-3)Q + P(3)$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$Q_1 = f(P_1) \Leftrightarrow P_1 = (X-3)Q_1 + P_1(3)$

Par combinaison linéaire,

$\lambda P + P_1 = (X-3)(\lambda Q + Q_1) + \underbrace{\lambda P(3) + Q(3)}_{\text{polynôme de degré} < 1}$

Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne, on en déduit que $\lambda Q + Q_1$ est le quotient de la division de $\lambda P + P_1$ par $(X-3)$, c'est-à-dire que $\lambda Q + Q_1 = f(\lambda P + P_1)$, ce qui prouve que f est linéaire.

2) $*$ Déterminons le noyau de f :

$P \in \text{Ker}\, f \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow Q = 0 \Leftrightarrow P = P(3)$

$P \in \text{Ker}\, f \Leftrightarrow P$ est un polynôme constant

Donc $\text{Ker}\, f = \mathbb{R}_0[X]$.

$*$ Montrons que $Imf \subset \mathbb{R}_2[X]$:

Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$,

$Q \in Imf \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]/P = (X-3)Q + \underbrace{P(3)}_{\deg 0}$

Mais $d^oP \leqslant 3 \Rightarrow d^oQ \leqslant 2 \Rightarrow Q \in \mathbb{R}_2[X]$

Donc $Imf \subset \mathbb{R}_2[X]$

$*$ Montrons que $\mathbb{R}_2[X] \subset Imf$:

Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, posons $P = (X-3)Q$, alors Q est le quotient de la division de P par $X-3$, avec un reste nul. Donc $Q = f(P)$

donc $\exists P \in \mathbb{R}_3[X]/Q = f(P)$, donc $Q \in Imf$.

Donc $\mathbb{R}_2[X] \subset Imf$.

$*$ On conclut que $Imf = \mathbb{R}_2[X]$.

7.10

1) La dérivée d'un polynôme à coefficients réels est un polynôme à coefficients réels, donc ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.

$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ donc $\psi(\lambda P + Q) = \lambda\psi(P) + \psi(Q)$; ainsi ψ est linéaire.

$\mathbb{R}[X]$ étant stable par le produit, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.

$\varphi(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q) = \lambda XP + XQ$

$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$

Donc φ est linéaire.

On a montré que ψ et φ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.

$*$ De plus, en notant $\widetilde{0}$ le polynôme nul, $\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = \widetilde{0} \Rightarrow XP = \widetilde{0} \underset{X \neq \widetilde{0}}{\Rightarrow} P = \widetilde{0}$

Donc $\text{Ker}\,\varphi = \left\{\widetilde{0}\right\}$ et φ est injectif.

$*$ Montrons que ψ *est surjectif* : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$P(x) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont réels ; posons $Q(x) = a_0X + \frac{a_1}{2}X^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}X^{n+1}$.

Ainsi défini, Q est un polynôme, qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R}, Q'(x) = P(x)$; donc $\psi(Q) = P$.

On a montré que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists Q \in \mathbb{R}[X]/\psi(Q) = P$

donc ψ est surjectif.

2) $(\psi o\varphi - \varphi o\psi)(P) = \psi(XP) - \varphi(P')$

$(\psi o\varphi - \varphi o\psi)(P) = (XP)' - XP' = (P + XP') - XP'$

$(\psi o\varphi - \varphi o\psi)(P) = P = Id_{\mathbb{R}[X]}(P)$

Cette égalité est valable pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, donc

$\psi o\varphi - \varphi o\psi = Id_{\mathbb{R}[X]}$

3) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$\psi o\varphi^n - \varphi^n o\psi = n\varphi^{n-1}$

$*$ Pour $n = 1$, $\psi o\varphi - \varphi o\psi = Id_{\mathbb{R}[X]}$ et $n\varphi^{n-1} = 1 \times \varphi^0 = Id_{\mathbb{R}[X]}$; la propriété est vraie.

$*$ Supposons $\psi o\varphi^n - \varphi^n o\psi = n\varphi^{n-1}$, alors

$\psi o\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1} o\psi = (\psi o\varphi^n - \varphi^n o\psi) o\varphi + \varphi^n o(\psi o\varphi - \varphi o\psi) =$

$n\varphi^{n-1} o\varphi + \varphi^n o Id_{\mathbb{R}[X]} = n\varphi^n + \varphi^n = (n+1)\varphi^n$.

On a bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\psi o\varphi^n - \varphi^n o\psi = n\varphi^{n-1}$.

7.11

1) Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$f_b o f_a(P) = f_b(Q) = Q(bX + 1 - b)$ en notant $Q = f_a(P)$

$f_b o f_a(P) = P(a(bX + 1 - b) + 1 - a)$

$f_b o f_a(P) = P(abX + a - ab + 1 - a)$

$f_b o f_a(P) = P(abX + 1 - ab) = f_{ab}(P)$

On en déduit que $f_b o f_a = f_{ab}$.

Par récurrence, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, (f_a)^n = f_{a^n}$

$*$ Si $n = 0$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f_{a^0}(P) = f_1(P) = P(X) = P$

Donc $f_{a^0} = Id_{\mathbb{R}_n[X]} = (f_a)^0$

$*$ Si on suppose que $(f_a)^n = f_{a^n}$, alors

$(f_a)^{n+1} = (f_a)^n o f_a = f_{a^n} o f_a = f_{a^n \times a} = f_{a^{n+1}}$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, (f_a)^n = f_{a^n}$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$*$ $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$f_a(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(aX + 1 - a)$

Par définition des opérations sur les polynômes,

$f_a(\lambda P + Q) = \lambda P(aX + 1 - a) + Q(aX + 1 - a)$

$f_a(\lambda P + Q) = \lambda f_a(P) + f_a(Q)$

Donc f_a est linéaire.

$*$ a étant non nul, $R = aX + 1 - a$ est de degré un ; si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P) \leqslant n$, $\deg(PoR) \leqslant n$. donc f_a est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

$*$ De plus, d'après la question **1**, $f_a o f_{\frac{1}{a}} = f_1 = Id_{\mathbb{R}[X]}$ et $f_{\frac{1}{a}} o f_a = f_1 = Id_{\mathbb{R}[X]}$

donc f_a est bijectif, de réciproque $f_{\frac{1}{a}}$.

On a montré que f_a est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) f_a étant bijectif, est injectif et surjectif, donc $\text{Ker}(f_a) = \{0\}$ et $Im(f_a) = \mathbb{R}_n[X]$.

7.12

1) $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$f(P + \lambda Q) = -(P + \lambda Q)'' + 2X(P + \lambda Q)' + P + \lambda Q$

$f(P + \lambda Q) = -P'' - \lambda Q'' + 2XP' + 2\lambda XQ' + P + \lambda Q$

$f(P + \lambda Q) = -P'' + 2XP' + P + \lambda(-Q'' + 2XQ' + Q)$

$f(P + \lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q)$

Donc f est linéaire. De plus, $\mathbb{R}[X]$ étant stable par la dérivation, le produit et la somme, $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) \in \mathbb{R}[X]$.

Ainsi, f, linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

2) $\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad goh(P) = g(P') = 2XP' - P''$

$goh(P) = (-P'' + 2XP' + P) - P$

$goh(P) = f(P) - Id(P) = (f - Id)(P)$

Donc $goh = f - Id$.

$\forall P \in \mathbb{R}[X], hog(P) = h(2XP - P') = (2XP - P')'$

$hog(P) = 2P + 2XP' - P'' = P + f(P)$

$hog(P) = Id(P) + f(P) = (Id + f)(P)$

Donc $hog = Id + f$.

3) On déduit de la question 2 que $f = goh + Id$ et que $f = hog - Id$; d'où

$fog - gof = (goh + Id)\,og - go(hog - Id)$

$fog - gof = gohog + g - gohog + g = 2g$

7.13

1) $*$ Soit $x \in \text{Ker}\, g$, $g(x) = 0_E$, donc $fog(x) = f(0_E) = 0_E$.

Mais $gof = fog$, donc $gof(x) = 0_E$, donc $g[f(x)] = 0_E$, donc $f(x) \in \text{Ker}\, g$.

On a montré que $\forall x \in \text{Ker}\, g, f(x) \in \text{Ker}\, g$. Donc $\text{Ker}\, g$ est stable par f.

$*$ Soit $y \in Img$, alors $\exists x \in E / y = g(x)$.

Alors $f(y) = f(g(x)) \underset{gof=fog}{=} \underbrace{g(f(x))}_{\in Img}$

On a montré que $\forall y \in Img, f(y) \in Img$. Donc Img est stable par f

2) Si $E = \text{Ker}\, f + \text{Ker}\, g$,soit $y \in Img$, $\exists x \in E / y = g(x)$

Mais comme $E = \text{Ker}\, f + \text{Ker}\, g$,

$\exists (a, b) \in \text{Ker}\, f \times \text{Ker}\, g / x = a + b$.

Alors $y = g(a + b) = g(a) + \underbrace{g(b)}_{=0 \text{ car } b \in \text{Ker}\, g}$; donc

$f(y) = f(g(a)) = g\underbrace{(f(a))}_{=0_E \text{ car } a \in \text{kerf}} = 0_E$

On a prouvé que $\forall y \in Img, y \in \text{Ker}\, f$.

Donc $Img \subset \text{Ker}\, f$.

7.14

1) $Imf = Vect\left(\vec{u}\right)$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, donc

$\forall \vec{x} \in E, f\left(\vec{x}\right) \in Vect\left(\vec{u}\right)$ donc

$\forall \vec{x} \in E, \exists \alpha_{\vec{x}} \in \mathbb{K} / f\left(\vec{x}\right) = \alpha_{\vec{x}} \vec{u}$.

f étant linéaire, $f^2\left(\vec{x}\right) = \alpha_{\vec{x}} f\left(\vec{u}\right)$

En notant $f\left(\vec{u}\right) = \lambda \vec{u}$, $f^2\left(\vec{x}\right) = \lambda \alpha_{\vec{x}} \vec{u} = \lambda f\left(\vec{x}\right)$.

On a montré que

$\exists \underbrace{\lambda}_{\text{indépendant de } \vec{x}} \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E / f^2\left(\vec{x}\right) = \lambda f\left(\vec{x}\right)$

Donc $f^2 = \lambda f$.

2) On a $\lambda \neq 1$; $g = f - Id_E$.donc $f = g + Id_E$.

L'égalité de la question 1 s'écrit successivement :

$\cdot\ (g + Id_E)^2 = \lambda(g + Id_E)$

$\cdot\ g^2 + 2g + Id_E = \lambda(g + Id_E)$

$\cdot\ g^2 + (2 - \lambda) g = (\lambda - 1) Id_E$

Mais par hypothèse, $\lambda - 1 \neq 0$, donc

$go\left[\frac{1}{\lambda - 1}(g + (2 - \lambda) Id_E)\right] = Id_E$

Et de façon analogue, $\left[\frac{1}{\lambda - 1}(g + (2 - \lambda) Id_E)\right] og = Id_E$

Ceci montre qu'en posant $h = \frac{1}{\lambda - 1}(g + (2 - \lambda) Id_E)$, on a : $goh = hog = Id_E$, et que g est bijective.

$g = f - Id_E$ étant de plus linéaire est un automorphisme de E.

7.15

- **Condition nécessaire :** Supposons que $poq = p$ et $qop = q$; alors $pop = \underbrace{poq}_{=p} op = po \underbrace{qop}_{=q} = poq = p$.

 p étant linéaire, p est un projecteur.

 p et q jouant des rôles symétriques, q est aussi un projecteur.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

De plus, $\forall x \in E$, si $p(x) = 0_E$ alors $\underbrace{qop}_{=q}(x) = 0_E$ donc $q(x) = 0_E$, donc $x \in \text{Ker}\, q$.

Ceci montre que $\forall x \in \text{Ker}\, p, x \in \text{Ker}\, q$.

C'est-à-dire que $\text{Ker}\, p \subset \text{Ker}\, q$.

p et q jouant des rôles symétriques, on a aussi :

$\text{Ker}\, q \subset \text{Ker}\, p$.

Donc $\text{Ker}\, p = \text{Ker}\, q$.

- **Condition suffisante :** Si p et q sont deux projecteurs de même noyau, d'après les propriétés des projecteurs, $E = Imp \oplus \text{Ker}\, p$; donc

$\forall x \in E, \exists!\,(y,v) \in Imp \times \text{Ker}\, p / x = y + v$.

$p(x) = p(y) + \underbrace{p(v)}_{=0_E}$; comme $y \in Imp$, $p(y) = y$ d'après les propriétés des projecteurs.

Donc $x = p(x) + v$ avec $v \in \text{Ker}\, p = \text{Ker}\, q$; donc $q(x) = qop(x) + q(v) = qop(x)$. On a ainsi montré que $\forall x \in E, q(x) = qop(x)$, donc $qop = q$. De façon analogue, on montre que $poq = p$. Donc la condition 1 est vérifiée.

7.16

1) Soit $P \in E$,

$$\exists (a_0, \cdots, a_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2} / P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k.$$

$$f(P) = X^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^{2n+1-k}$$

Effectuons le changement d'indice $j = 2n + 1 - k$:

$$f(P) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_{2n+1-j} X^j \text{ donc } f(P) \in E.$$

f est donc à valeurs dans E.

Soient P, Q dans E, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(P + \lambda Q) = X^{2n+1}(P + \lambda Q)\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$= X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) + \lambda X^{2n+1} Q\left(\frac{1}{X}\right) = f(P) + \lambda f(Q)$$

donc fest linéaire. Etant à valeurs dans E, f est un endomorphisme de E

2) Soit $P \in E$,

$$fof(P) = f(Q) \text{ en posant } f(P) = Q(X) = X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$fof(P) = X^{2n+1} Q\left(\frac{1}{X}\right) = X^{2n+1} \cdot \frac{1}{X^{2n+1}} P\left(\frac{1}{\frac{1}{X}}\right)$$

$fof(P) = P$, valable pour tout $P \in E$.

donc $fof = Id_E$.

On en déduit que f est une symétrie et en particulier un automorphisme de E.

3) Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \in \text{Ker}\,(f - Id_E)$, on a alors $f(P) = P$.

En réutilisant le calcul de la question 1,

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} X^k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$$

Ces deux polynômes, égaux, ont mêmes coefficients.

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = a_{2n+1-k}$

Un polynôme P de $\text{Ker}\,(f - Id_E)$ s'écrit donc :

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^{2n} + a_0 X^{2n+1}$$

$$P = a_0\left(1 + X^{2n+1}\right) + a_1\left(X + X^{2n}\right) + \cdots + a_n\left(X^n + X^{n+1}\right)$$

$$\text{Ker}\,(f - Id_E) = Vect\left(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \cdots, X^n + X^{n+1}\right)$$

La famille $\left(X^k + X^{2n+1-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ engendre donc $\text{Ker}\,(f - Id_E)$. Comme c'est une famille échelonnée en degrés de polynômes non nuls, elle est libre.

$\left(X^k + X^{2n+1-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est donc une base de $\text{Ker}\,(f - Id_E)$.

4) Soit $= \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \in \text{Ker}\,(f + Id_E)$

En raisonnant comme à la question 3, on obtient :

$$f(P) = -P, \text{ puis } \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} X^k = -\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$$

D'où $\forall k \in [\![0, n]\!], a_{2n+1-k} = -a_k$

Un polynôme P de $\text{Ker}\,(f + Id_E)$ s'écrit donc :

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n - a_n X^{n+1} - \cdots - a_1 X^{2n} - a_0 X^{2n+1}$$

$$P = a_0\left(1 - X^{2n+1}\right) + a_1\left(X - X^{2n}\right) + \cdots + a_n\left(X^n - X^{n+1}\right)$$

$$\text{Ker}\,(f - Id_E) = Vect\left(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \cdots, X^n - X^{n+1}\right)$$

La famille $\left(X^k - X^{2n+1-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ engendre donc $\text{Ker}\,(f + Id_E)$. Comme c'est une famille échelonnée en degrés de polynômes non nuls, elle est libre.

$\left(X^k - X^{2n+1-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est donc une base de $\text{Ker}\,(f + Id_E)$.

5) f est une symétrie, c'est donc la symétrie par rapport à $\text{Ker}\,(f - Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}\,(f + Id_E)$.

Donc f est la symétrie par rapport à $Vect\left[\left(X^k + X^{2n+1-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}\right]$ parallèlement à $Vect\left[\left(X^k - X^{2n+1-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}\right]$.

7.17

1) Soit $u \in E$; prouvons par analyse-synthèse que :

$\exists!\,(y,v) \in Imf \times \text{Ker}\, f / u = y + v$.

Unicité : Si (y, v) existe, alors $y \in Imf$, donc $\exists x \in E / y = f(x)$.

Ainsi $u = f(x) + v$, par linéarité de f^2,

$$f^2(u) = f^3(x) + \underbrace{f^2(v)}_{=0_E \text{ car } v \in \operatorname{Ker} f} = -f(x) = -y$$

D'où $\begin{cases} y = -f^2(u) \\ v = u + f^2(u) \end{cases}$

D'où l'unicité du couple (y, v).

Existence : Posons $y = -f^2(u)$ et $v = u + f^2(u)$.

On a alors : $\begin{cases} y + v = u \\ y = f(-f(u)) \in Imf \\ f(v) = f(u) + f^3(u) = 0_E \text{ donc } v \in \operatorname{Ker} f \end{cases}$

D'où l'existence du couple (y, v).

Conclusion : $\forall u \in E, \exists!\, (y, v) \in Imf \times \operatorname{Ker} f / u = y + v$

C'est la définition de $E = \operatorname{Ker} f \oplus Imf$.

2) $\widetilde{f} \begin{cases} Imf \to Imf \\ u \mapsto f(u) \end{cases}$. Donc $\widetilde{f}$ est linéaire comme f.

$*$ Soit $u \in \operatorname{Ker} \widetilde{f}$, alors $u \in (\operatorname{Ker} f) \cap (Imf) = \{0_E\}$

donc $u = 0_E$, $\operatorname{Ker} \widetilde{f} = \{0_E\}$, donc $\widetilde{f}$ est injective.

$*$ Montrons que $\widetilde{f}$ est aussi surjective :

Soit $y \in Imf$, $\exists x \in E / y = f(x)$.

Mais on a vu que $E = \operatorname{Ker} f \oplus Imf$, donc

$\exists (u, v) \in Imf \times \operatorname{Ker} f / x = u + v$

$$y = f(x) = f(u) + \underbrace{f(v)}_{=0_E} = f(u) \underset{u \in Imf}{=} \widetilde{f}(u)$$

Ainsi $\forall y \in Imf, \exists u \in Imf / y = \widetilde{f}(u)$.

Ceci montre que $\widetilde{f}$ est surjective

Conclusion : $\widetilde{f}$, linéaire et bijective, est un automorphisme de Imf.

3) f n'étant pas l'application nulle, on peut trouver

$x \in Imf - \{0_E\}$, x n'étant pas le vecteur nul,

x et $f(x)$ sont colinéaires si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R} / f(x) = \lambda x$.

Par l'absurde, supposons que ceci est réalisé : alors

$f^3(x) = \lambda f^2(x)$.

Or $f^3 = -f$ donc $-f(x) = \lambda f^2(x)$; par linéarité, $f(x + \lambda f(x)) = 0_E$, donc $x + \lambda f(x) \in \operatorname{Ker} f$

Mais $\underbrace{x}_{\in Imf} + \lambda \underbrace{f(x)}_{\in Imf}$;

donc $x + \lambda f(x) \in (\operatorname{Ker} f) \cap (Imf) = \{0_E\}$

donc $x + \lambda \underbrace{f(x)}_{=\lambda x} = 0_E$, d'où $\underbrace{(\lambda^2 + 1)}_{\neq 0 \text{ car } \geq 1 > 0} x = 0_E$,

d'où $x = 0_E$, ce qui contradictoire avec l'hypothèse.

On en déduit que si $x \in Imf - \{0_E\}$, la famille $(x, f(x))$ est libre.

On en déduit que Imf contient une famille libre de deux vecteurs.

7.18 $E = \operatorname{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$ est équivalent à : pour tout $x \in E$,

$\exists!\, (y, z) \in \operatorname{Ker}(f - 2Id_E) \times \operatorname{Ker}(f - 3Id_E) / x = y + z$.

$x \in E$ étant donné, prouvons par analyse-synthèse cette propriété :

Unicité : Supposons qu'il existe $y \in \operatorname{Ker}(f - 2Id_E)$ et

$z \in \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$ tels que $x = y + z$.

$y \in \operatorname{Ker}(f - 2Id_E)$ se traduit par $f(y) = 2y$.

$z \in \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$ se traduit par $f(z) = 3z$.

Par linéarité de f, $f(x) = f(y) + f(z) = 2y + 3z$

On dispose alors du système : $(S) \begin{cases} y + z = x \\ 2y + 3z = f(x) \end{cases}$

$$(S) \underset{\substack{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} y = 3x - f(x) \\ z = f(x) - 2x \end{cases}$$

D'où l'unicité du couple (y, z).

Existence : Posons $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$.

Alors $y + z = (3x - f(x)) + (f(x) - 2x) = x$.

De plus, nous allons utiliser $f^2 - 5f + 6Id_E = \widetilde{0}$:

Calculons

$$\begin{aligned} (f - 2Id_E)(y) &= (f - 2Id_E)(3x - f(x)) \\ &= (f - 2Id_E)((3Id_E - f)(x)) \\ &= (f - 2Id_E) \, o \, (3Id_E - f)(x) \\ &= -\underbrace{\left(f^2 - 5f + 6Id_E\right)}_{=\widetilde{0}}(x) = \widetilde{0}(x) = 0_E \end{aligned}$$

De façon analogue,

$$\begin{aligned} (f - 3Id_E)(z) &= (f - 3Id_E)(f(x) - 2x) \\ &= (f - 3Id_E) \, o \, (f - 2Id_E)(x) \\ &= \underbrace{\left(f^2 - 5f + 6Id_E\right)}_{=\widetilde{0}}(x) = \widetilde{0}(x) = 0_E \end{aligned}$$

Ces calculs prouvent que $y \in \operatorname{Ker}(f - 2Id_E)$ et que

$z \in \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$.

y et z vérifient donc les conditions requises, d'où l'existence du couple (y, z).

Conclusion : $\operatorname{Ker}(f - 2Id_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$ sont supplémentaires dans E.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

7.19

- Rappelons que la composition (ou loi o) n'est pas commutative dans $\mathcal{L}(E)$. Et qu'en général, $poq \neq qop$.
- Montrons que (1) $\Leftrightarrow$ (2) :

 p et q étant des projecteurs, sont linéaires, donc $(p+q)$ est linéaire. De plus, $pop = p$ et $qoq = q$.

 On a équivalence entre les énoncés suivants :

 – $(p+q)$ est un projecteur.

 – $(p+q)\,o\,(p+q) = p+q$.

 – $pop + poq + qop + qoq = p+q$.

 – $p + poq + qop + q = p+q$

 – $poq + qop = \widetilde{0}$

 D'où l'équivalence de (1) et (2).
- Montrons que (2) $\Leftrightarrow$ (3) :

 Si (2)est vrai, $poq + qop = \widetilde{0}$, donc $po\,(poq + qop) = \widetilde{0}$,

 donc $\underbrace{pop}_{=p} oq + poqop = \widetilde{0}$, donc $poq + poqop = \widetilde{0}$ (L)

 Par ailleurs, $(poq + qop)\,op = \widetilde{0}$, donc $poqop + qo\underbrace{pop}_{=p} = \widetilde{0}$,

 donc $poqop + qop = \widetilde{0}\,(L')$

 D'après (L) et (L'), $-poqop = qop = poq$

 On a montré que $qop = poq$ et par hypothèse, $qop + poq = \widetilde{0}$, donc $2qop = \widetilde{0}$, donc $qop = poq = \widetilde{0}$.

 Donc (3)est vrai.

 Réciproquement, (3) $\Rightarrow$ (2) par addition.

 On a bien montré l'équivalence de (2) et (3).
- Montrons que (3) $\Leftrightarrow$ (4) :

 On a équivalence entre les énoncés suivants :

 $poq = \widetilde{0}$

 – $\forall x \in E, p(q(x)) = 0_E$

 – $\forall x \in E, \underbrace{q(x)}_{\text{décrit } Imq} \in \operatorname{Ker} p$

 – $\forall y \in Imq, y \in \operatorname{Ker} p$

 $Imq \subset \operatorname{Ker} p$

 Ceci montre que $poq = \widetilde{0} \Leftrightarrow Imq \subset \operatorname{Ker} p$.

 p et q jouant des rôles symétriques, on a de même :

 $qop = \widetilde{0} \Leftrightarrow Imp \subset \operatorname{Ker} q$

 l'équivalence de (3) et (4).
- Supposons à présent que ces quatre conditions sont vérifiées.
- Soit $y \in Imp \cap Imq$, d'après (4), $y \in \operatorname{Ker} p$, donc $p(y) = 0_E$.

 De plus, p étant un projecteur, y, élément de Imp, est invariant par p, donc $p(y) = y$

 Donc $y = 0_E$. Ceci montre que $Imp \cap Imq \subset \{0_E\}$

 L'inclusion inverse étant évidente, $Imp \cap Imq = \{0_E\}$

 Donc Imp et Imq sont en somme directe.
- Montrons que $Im(p+q) = Imp \oplus Imq$.

 Soit $y \in Im(p+q)$, $\exists x \in E / y = (p+q)(x)$, d'où

 $y = \underbrace{p(x)}_{\in Imp} + \underbrace{q(x)}_{\in Imq}$

 donc $y \in Im(p) + Im(q)$. Donc $Im(p+q) \subset Im(p) \oplus Im(q)$.

 Réciproquement, soit $y \in Im(p) \oplus Im(q)$

 $\exists (x_1, x_2) \in E^2 / y = p(x_1) + q(x_2)$

 $p(y) = \underbrace{pop}_{p}(x_1) + \underbrace{poq}_{\widetilde{0}}(x_2) = p(x_1)$.

 p et q jouant des rôles symétriques, $q(y) = q(x_2)$.

 Ainsi $y = p(y) + q(y) = (p+q)(y)$ donc $y \in Im(p+q)$.

 Ceci prouve que $Im(p) \oplus Im(q) \subset Im(p+q)$.

 Conclusion : $Im(p) \oplus Im(q) = Im(p+q)$.
- Montrons que $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

 Soit $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, alors $p(x) = 0_E = q(x)$, donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$.

 Soit $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$, alors $p(x) + q(x) = 0_E$,

 En composant par p, $\underbrace{pop}_{p}(x) + \underbrace{poq}_{\widetilde{0}}(x) = 0_E$

 D'où $p(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker} p$; de façon analogue, $x \in \operatorname{Ker} q$; donc $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

 Ceci prouve que $\operatorname{Ker}(p+q) \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

 Conclusion : $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

7.20

1) Tout $u(e_i)$ est colinéaire à e_i, donc

$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_i \in \mathbb{R} / u(e_i) = \lambda_i e_i$.

Il est à noter qu'a priori, λ_i dépend de i.

Par ailleurs, considérons $x = e_1 + \cdots + e_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

$u(x)$ est colinéaire à x, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / u(x) = \lambda x$.

u étant linéaire, $u(x) = u(e_1) + \cdots + u(e_n)$

D'où $\lambda(e_1 + \cdots + e_n) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

D'où $(\lambda_1 - \lambda)e_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda)e_n = 0_E$

Mais $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base, donc une famille libre, donc $\lambda_1 - \lambda = \cdots = \lambda_n - \lambda = 0$

Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$.

On a donc montré qu'en fait, λ_i est indépendant de i et que $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = \lambda e_i$.

L'application linéaire u étant entièrement déterminée par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, $u = \lambda Id_E$.

2) Soit v un endomorphisme de E commutant avec tous les projecteurs.

Considérons e, vecteur non nul de E, G un supplémentaire dans E de $Vect(e)$, et p la projection sur $Vect(e)$ parallèlement à G.

Alors $vop = pov$.

En particulier, $vop(e) = pov(e)$

ce qui s'écrit : $v(e) = p(v(e))$

Ainsi $v(e)$ est invariant par p, donc $v(e) \in Vect(e)$.

On en déduit que pour tout vecteur e non nul de E, $v(e)$ est colinéaire à e. D'après la question 1, v est une homothétie.

3) Montrons que C est constitué des homothéties, c'est-à-dire que $C = Vect(Id_E)$:

Soit $h = \lambda Id_E$ une homothétie et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors

$\forall x \in E, hof(x) = \lambda f(x)$ et $foh(x) = f(\lambda x) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \lambda f(x)$.

Donc $\forall f \in \mathcal{L}(E), hof = foh$, ce qui prouve que $h \in C$. D'où $Vect(Id_E) \subset C$.

Réciproquement, si $v \in C$, v commute avec tous les projecteurs qui sont des applications linéaires particulières ; d'après 2, v est une homothétie.

Donc $C \subset Vect(Id_E)$.

On a bien montré que C est constitué des homothéties.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Espaces vectoriels de dimension finie

CHAPITRE 8

Plan

8.1 Dimension 196
8.2 Sous-espaces d'un espace de dimension finie 201
8.3 Rang 203
Synthèse 207
Tests et exercices 208
Corrigés des exercices 210

Introduction

Dans les espaces de dimension finie, l'espace est engendré par un nombre fini de vecteurs, des théorèmes spécifiques permettent d'améliorer les méthodes des chapitres 6 et 7 concernant les espaces vectoriels et les applications linéaires.

Prérequis

- Polynômes.
- Méthode du pivot pour les systèmes linéaires.
- Espaces vectoriels.
- Applications linéaires.

Objectifs

- S'approprier les méthodes propres aux espaces de dimension finie.

8.1 Dimension

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

8.1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition – *Un espace vectoriel est dit* **de dimension finie** *lorsqu'il possède une partie génératrice finie.*
En d'autres termes, il existe $n \in \mathbb{N}$ *et* $(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E^n$ *tels que* $E = Vect\,(u_1, \cdots, u_n)$

Convention – $\{0_E\} = Vect\,(\emptyset)$. Ceci correspond au cas où $n = 0$ et on convient que $\{0_E\}$ est un espace de dimension finie, puisqu'il possède une partie génératrice à zéro vecteur.

Premiers exemples

Exemple 1

$\mathbb{K}^n$ possède une base finie, $(e_1, \cdots, e_n)$ où $e_i = \left(0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{i^e \text{coordonnée}}, 0, \cdots, 0\right)$, donc $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 2

$\mathbb{K}_n[X] = Vect\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Par contre, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. En effet, par l'absurde, si $\mathbb{K}[X]$ possédait une partie génératrice finie $(P_1, P_2, \cdots, P_k)$, notons $d = \max_{1 \leq i \leq k} (d^\circ P_i)$.

Alors X^{d+1} ne serait pas combinaison linéaire de $P_1, P_2, \cdots, P_k$, ce qui est contradictoire.

Exemple 3

On admet que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, espace des suites réelles, n'est pas de dimension finie

Existence d'une base finie

Théorème – Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base finie, que l'on peut extraire d'une partie génératrice finie.

Idée de la démonstration

E, espace vectoriel de dimension finie, possède une partie génératrice finie $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$. Si u_p est combinaison linéaire de $u_1, u_2, \cdots, u_{p-1}$, $\left(u_1, u_2, \cdots, u_{p-1}\right)$ engendre encore E. On recommence ainsi avec tous les vecteurs u_i qui sont en nombre fini, jusqu'à ce qu'aucun des vecteurs ne soit combinaison linéaire des autres. La famille obtenue est libre et constitue une base finie de E. ■

8.1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Proposition – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si L est une famille libre de E et G une famille génératrice de E, alors le nombre de vecteurs de L est inférieur ou égal au nombre de vecteurs de G.*

(admis)

Théorème et définition – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.

Alors toutes les bases de E comportent le même nombre de vecteurs ; cette valeur commune est appelée **dimension de E sur $\mathbb{K}$**, notée $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou plus simplement $\dim E$.

Par convention, on pose : $\dim\{0_E\} = 0$.

Démonstration

Si $E \neq \{0_E\}$, soient B et B′ deux bases de E, n le nombre de vecteurs de B, n' le nombre de vecteurs de B′ ; B étant libre et B′ génératrice, on a d'après la proposition précédente, $n \leq n'$, et en inversant les rôles de B et B′, $n' \leq n$. D'où l'égalité de n et n'. ■

Définition –

- *Un espace de dimension 1 est appelé* **droite vectorielle**.
- *Un espace de dimension 2 est appelé* **plan vectoriel**.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Dimension des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels usuels

Pour $n \in \mathbb{N}$,

- dim $(\mathbb{K}^n) = n$
- dim $(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

En effet, la dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs d'une de ses bases. Or $\mathbb{K}^n$ possède la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ à n vecteurs, donc est de dimension n, alors que $\mathbb{K}_n[X]$ a pour base $\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ à $n+1$ vecteurs, donc est de dimension $n+1$.

8.1.3 Famille de vecteurs

Théorème – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.

Toute famille libre de E comporte un nombre de vecteurs inférieur ou égal à n. Si de plus elle possède n vecteurs, c'est une base de E.

Toute famille génératrice de E comporte un nombre de vecteurs supérieur ou égal à n. Si de plus elle possède n vecteurs, c'est une base de E.

Démonstration pour une famille libre

Soit $\Phi = \left(x_1, x_2, \cdots, x_p\right)$ une famille libre de E ; soit par ailleurs B une base de E, qui est en particulier une famille génératrice de E ; d'après la proposition du **8.1.2.**, $p \leq n$, puisque B, base de E, comporte n vecteurs.

Supposons maintenant que Φ soit libre à n vecteurs ; par l'absurde, si Φ n'engendrait pas E, on pourrait trouver $u \in E \backslash Vect(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et la famille $(u, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ serait libre à $n+1$ vecteurs, ce qui contredit le théorème précédent. ■

Méthode 1 En dimension finie, montrer qu'une famille est une base

Pour montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace E de dimension finie est une base de E, il suffit de montrer

– Soit qu'elle est libre et comporte un nombre de vecteurs égal à la dimension de E,

– Soit qu'elle est génératrice et comporte un nombre de vecteurs égal à la dimension de E.

On notera qu'il est souvent plus simple de montrer qu'une famille est libre plutôt que génératrice.

Exemple d'application

Soit $a \in \mathbb{K}$; considérons la famille $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

Cette famille, formée de polynômes non nuls de degrés tous distincts, est libre. De plus, elle comporte $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, espace de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

On en déduit que tout polynôme P de degré $\leq n$ s'écrit de façon unique $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k$ où $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n$ sont éléments de $\mathbb{K}$.

Théorème de la base incomplète – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, et B une base de E. Alors toute famille libre $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$ de E, où $p < n$, peut être complétée en une base de E par $n - p$ vecteurs de B. Autrement dit, on peut trouver $(n - p)$ vecteurs de B, $u_{p+1}, u_{p+2}, \cdots, u_n$ tels que $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ soit une base de E.

Démonstration

$p < n$. Notons $\mathrm{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

Par *récurrence* finie sur $k \in [\![1, n-p]\!]$, montrons qu'on peut trouver $e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}$ tels que la famille $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p, e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}\right)$ soit libre.

Initialisation : Si $e_1, e_2, \cdots, e_n$ se trouvaient tous dans $Vect\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$, la famille $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$ serait génératrice de E, ce qui est faux car $p < n$.

$*\exists i_1 \in [\![1, n]\!] / e_{i_1} \notin Vect\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$; alors la famille $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p, e_{i_1}\right)$ est libre et comporte $p + 1$ vecteurs.

Hérédité : Si on suppose que pour $k < n - p$, on a trouvé $i_1, i_2; \cdots, i_k$ tels que la famille $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p, e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}\right)$ soit libre, on recommence comme en $*$ et on obtient ainsi une famille libre $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p, e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}, e_{i_{k+1}}\right)$ à $p + k + 1$ vecteurs.

Conclusion : Lorsque $k = n - p$, on arrive à $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p, e_{i_1}, \cdots, e_{i_{n-p}}\right)$, famille libre à n vecteurs, qui constitue par conséquent une base de E. ■

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille $((1,1,0,0),(0,0,1,1))$, qui est libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ en choisissant deux vecteurs de la base canonique : on peut par exemple choisir $(1,0,0,0)$ et $(0,0,0,1)$; en effet, on montre facilement à l'aide d'un système que la famille $((1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1))$ est libre.

8.1.4 Isomorphisme avec $\mathbb{K}^n$

Théorème – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}*$.
E est de dimension n si et seulement si E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Si E est de dimension n, alors E possède une base à n vecteurs, que nous noterons $\mathrm{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$.

Notons $\mathrm{B}_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Définissons $\varphi : \mathbb{K}^n \to E$ par $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = \varepsilon_i$.

B_0 étant une base de $\mathbb{K}^n$, ceci définit une unique application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans E.

De plus, $\mathrm{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ étant une base de E, φ est bijective et réalise un isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et E.

Réciproquement, s'il existe $\varphi : \mathbb{K}^n \to E$, isomorphisme, alors φ transforme la base B_0 de $\mathbb{K}^n$ en une base de E ; ainsi, $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n))$ est une base de E comportant n vecteurs, ce qui prouve que E est de dimension finie égale à n. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire – – Soient $n \in \mathbb{N}*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Si un espace vectoriel F est isomorphe à E, alors F est de dimension finie égale à n.

Méthode 2 Déterminer la dimension finie d'un espace vectoriel.

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

1. Déterminer une base de E. La dimension de E est alors le nombre de vecteurs de cette famille.
2. Montrer que E est isomorphe à un autre espace vectoriel dont on connaît la dimension. E a alors même dimension que l'espace auquel il est isomorphe.

Exemple d'application

On considère $E = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0\right\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Définir un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les réels $q \neq 0$ tels que la suite (q^n) soit élément de E.
4. En déduire une base de E et l'expression générale d'une suite de E.

Solution

1. Notons (θ_n) la suite nulle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = 0$; alors $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_{n+2} - 3\theta_{n+1} + 2\theta_n = 0$; elle est donc élément de E et $E \neq \emptyset$.
 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de E et λ un réel.
 Notons $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + v_n$.
 $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $$w_{n+2} - 3w_{n+1} + 2w_n = \lambda u_{n+2} + v_{n+2} - 3(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + 2(\lambda u_n + v_n)$$
 $$= \lambda \underbrace{(u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)}_{=0} + \underbrace{(v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n)}_{=0} = 0$$
 Donc $(w_n) \in E$. E, non vide, stable par combinaisons linéaires, inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc E est lui-même un espace vectoriel.
2. Définissons $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ par $\varphi((u_n)) = (u_0, u_1)$.
 $\forall (u_n) \in E, \forall (v_n) \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
 $$\varphi(\lambda(u_n) + (v_n)) = \varphi((\lambda u_n + v_n)) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1)$$
 $$= \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1) = \lambda\varphi((u_n)) + \varphi((v_n))$$
 Donc φ est linéaire.
 De plus, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists!\, (u_n) \in E / \varphi((u_n)) = (a, b)$.
 En effet, $\varphi((u_n)) = (a, b) \Leftrightarrow (u_0 = a \text{ et } u_1 = b)$.
 Or cette condition définit une unique suite (u_n) de E, car une fois que u_0 et u_1 sont fixés, les termes suivants sont définis de proche en proche par la condition $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$.
 Ceci montre que φ est bijective.
 φ est par conséquent un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur $\mathbb{R}^2$, donc $\dim E = \dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$.
3. Soit q réel non nul.
 $(q^n) \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} - 3q^{n+1} + 2q^n = 0$
 $(q^n) \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^n\left(q^2 - 3q + 2\right) = 0$

Comme $q \neq 0$, $(q^n) \in E \Leftrightarrow q^2 - 3q + 2 = 0 \Leftrightarrow q \in \{1, 2\}$.

On en déduit que les suites de la forme (q^n) de E sont (1) et (2^n).

4. Montrons que ces deux suites forment une famille libre :

$\alpha(1) + \beta(2^n) = (0) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha + \beta 2^n = 0$

Or en prenant $n = 0$ et $n = 1$, ceci entraîne que : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$ d'où $\alpha = \beta = 0$

Ainsi, la famille $((1), (2^n))$ est une famille libre de E. De plus, d'après la question 2, E, isomorphe à $\mathbb{R}^2$, espace de dimension deux, est lui-même de dimension deux. Cette famille est donc une base de E. On en déduit que pour toute suite (u_n) de E, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(u_n) = \alpha(1) + \beta(2^n)$, c'est-à-dire que $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + \beta 2^n$.

Ceci donne l'expression d'une suite de E.

Remarque – Dans le cours d'analyse, on donne l'expression générale d'une suite linéaire récurrente d'ordre deux. On vient de prouver ce résultat dans un cas particulier. On pourrait démontrer le cas général par une méthode analogue.

8.2 Sous-espaces d'un espace de dimension finie

8.2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors Fest de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

Proposition – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*

Si $\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases}$ *alors* $F = G$.

Théorème – Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Remarque – Cette formule qui ressemble à celle du crible pour deux sous-espaces ne se généralise pas de la même façon à n sous-espaces.

Idée de la démonstration

On part d'une base de $F \cap G$, que l'on complète, d'une part en une base de F, d'autre part en une base de G. On montre que lorsqu'on réunit tous ces vecteurs (en ne comptant qu'une fois ceux de $F \cap G$, d'où le « moins »), on obtient une base de $F + G$. ■

8.2.2 Supplémentaires en dimension finie

Rappel – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si

$\forall \vec{x} \in E, \quad \exists ! \left(\vec{y}, \vec{z}\right) \in F \times G / \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. On note alors $E = F \oplus G$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Notation (non universelle) – Si B_1 et B_2 sont deux familles de vecteurs d'un même espace vectoriel, B_1 B_2 désigne la famille de vecteurs obtenue en juxtaposant les vecteurs de B_1 et ceux de B_2. On n'utilise pas le symbole $\cup$ (union) qui s'applique à des ensembles, une famille de vecteurs est une liste ordonnée alors que dans un ensemble, l'ordre ne compte pas.

Théorème – Caractérisations de deux sous-espaces supplémentaires.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On a équivalence entre les énoncés suivants :

1. F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E
2. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$
3. $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.
4. $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0_E\}$
5. Pour toute base B_1 de F et toute base B_2 deG, B_1_B_2 est une base de E.
6. Il existe une base B_1 de F et une base B_2 deG telles que B_1_B_2 soit une base de E.

Remarque – Pour retenir les conditions 2, 3, 4, on peut remarquer que cela revient à ce que deux des trois énoncés $E = F + G$, $F \cap G = \{0_E\}$, $\dim E = \dim F + \dim G$ soient réalisés.

Corollaire – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E, alors $\dim E = \dim F + \dim G$

Méthode 3 Déterminer un supplémentaire d'un sous-espace.

Pour déterminer un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F de E, espace de dimension finie :

1. On détermine une base de F.
2. On complète cette base de F, (qui est en particulier une famille libre de E) en une base de E. Pour cela, on peut piocher les vecteurs manquants dans une base de E fixée à l'avance, par exemple dans la base canonique, en vérifiant ensuite que la famille totale obtenue est une base.

Exemple d'application

Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 3y - z = 0\right\}$ et $G = Vect\,(1, 1, 1)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Solution

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$u \in F \Leftrightarrow x + 3y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + 3y \Leftrightarrow u = (x, y, x + 3y) \Leftrightarrow u = x\,(1, 0, 1) + y\,(0, 1, 3)$

Donc $F = Vect\,((1, 0, 1), (0, 1, 3))$. De plus, ces deux vecteurs, non colinéaires, forment une base de F ; F possède une base formée de deux vecteurs, donc $\dim F = 2$.

Une base de G est $(1, 1, 1)$, donc $\dim G = 1$.

On a donc $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.

De plus, soit $u = (x, y, z) \in F \cap G$, $u \in F$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / u = (\lambda, \lambda, \lambda)$.

$u \in G$ donc $x + 3y - z = 0$, donc $\lambda + 3\lambda - \lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ donc $u = (0, 0, 0)$. On a ainsi montré que $F \cap G \subset \{(0, 0, 0)\}$.

L'inclusion réciproque étant vraie, $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

La condition 4. du théorème est réalisée, donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque – Dans le chapitre 6, exercice 6.25, nous avons traité une question analogue par analyse-synthèse ; les théorèmes sur la dimension finie facilitent bien la preuve.

Théorème – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel F de E possède au moins un supplémentaire dans E, de dimension égale à $\dim E - \dim F$.

Démonstration

C'est une conséquence du théorème de la base incomplète : F étant un espace de dimension finie, possède une base $B_1 = \left(u_1, \cdots, u_p\right)$ que l'on complète en une base $B = \left(u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_n\right)$ de E. D'après la condition 6. du théorème ci-dessus, $Vect\left(u_{p+1}, \cdots, u_n\right)$ est un supplémentaire de F dansE, de dimension égale à $n - p = \dim E - \dim F$. ■

8.3 Rang

8.3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}*$ et $u_1, u_2, \cdots, u_p$ p vecteurs de E.*
Le **rang de la famille** $\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$ *est la dimension de* $Vect\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$.

$$rg\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right) = \dim\left(Vect\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)\right).$$

Le mot « dimension » s'emploie exclusivement pour un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel. On définit le rang d'une famille de vecteurs, mais parler de la « dimension d'une famille de vecteurs » n'a aucun sens.

Proposition – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, u_2, \cdots, u_p$ p vecteurs de E.*

1. $rg\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right) \leq \min(\dim E, p)$
2. $rg\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right) = \dim E \Leftrightarrow \left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$ *engendre* E.
3. $rg\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right) = p \Leftrightarrow \left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$ *est libre.*

8.3.2 Rang d'une application linéaire

Définition

Rappel – Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie et f, application linéaire de E dans F ; si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors $Imf = Vect\left(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\right)$.
En particulier, Imf est de dimension finie et $\dim(Imf) \leq n = \dim E$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Définition – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si f est une application linéaire de E dans F, le* **rang de l'application linéaire** *f est la dimension de Imf.*

$$rg(f) = \dim(Imf).$$

Proposition – *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors*

$$rg(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$$
$$rg(f) = \dim F \Leftrightarrow f \text{ est surjective.}$$
$$rg(f) = \dim E \Leftrightarrow f \text{ est injective.}$$

Exemple

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par $f(e_1) = (1, 2, 0)$, $f(e_2) = (3, -1, 2)$, $f(e_3) = (5, 3, 2)$.
Déterminer le rang de f.

Solution

$Imf = Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
Voyons si la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est libre :
Soient α, β, γ réels tels que $\alpha(1, 2, 0) + \beta(3, -1, 2) + \gamma(5, 3, 2) = (0, 0, 0)$.
On obtient le système : $(S)\begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$
Par la méthode du pivot, on obtient successivement :

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ -7\beta - 7\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 7L_3 \begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ 0 = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

En prenant $\beta = 1$, il vient : $2(1, 2, 0) + (3, -1, 2) - (5, 3, 2) = (0, 0, 0)$
Donc la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est liée et vérifie $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$,
donc $Imf = Vect(f(e_1), f(e_2)) = Vect((1, 2, 0), (3, -1, 2))$.
Ces deux vecteurs, non colinéaires, forment une base de Imf.
Donc $rg(f) = \dim(Imf) = 2$.

Formule du rang

Théorème – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application linéaire de E dans F.
Alors $\dim(\text{Ker } f) + \dim(Imf) = \dim E$

Démonstration

Soit G un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E.

Pour $u \in G$, définissons $\widetilde{f}(u) = f(u)$. $\widetilde{f}$ est linéaire comme f.
$u \in \text{Ker}\,\widetilde{f} \Leftrightarrow u \in \text{Ker}\,f \cap G \Leftrightarrow u = 0_E$ donc $\widetilde{f}$ est injective.
De plus, soit $v \in Imf$; $\exists x \in E / v = f(x)$
$E = \text{Ker}\,f \oplus G$ donc $\exists (y,u) \in \text{Ker}\,f \times G / x = y + u$.
f étant linéaire, $f(x) = \underbrace{f(y)}_{=0_F} + f(u) = \widetilde{f}(u)$

On a montré que $\forall v \in Imf$, $\exists u \in G / v = \widetilde{f}(u)$, donc $Imf \subset Im\widetilde{f}$.
L'inclusion inverse étant vraie, $Im\widetilde{f} = Imf$
Ainsi $\widetilde{f}$ est un isomorphisme de G sur Imf**,** donc $\dim Imf = \dim G$.
Comme G est un supplémentaire de $\text{Ker}\,f$ dans E. $\dim(\text{Ker}\,f) + \dim(G) = \dim E$, donc $\dim(\text{Ker}\,f) + \dim(Imf) = \dim E$. ■

Corollaire – Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de même dimension finie**, et f une application linéaire de E dans F.
Alors : f bijective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f injective.

Démonstration – Il suffit de montrer que f surjective $\Leftrightarrow$ f injective ; f bijective est alors acquis.
f surjective $\Leftrightarrow \dim(Imf) = \dim F \Leftrightarrow \dim(Imf) = \dim E$.
D'après la formule du rang, $\dim(Imf) = \dim E - \dim(\text{Ker}\,f)$
Donc f surjective $\Leftrightarrow$ $\dim(\text{Ker}\,f) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}\,f = \{0_E\} \Leftrightarrow f$ injective. ■

Corollaire – Si f est une application linéaire de E dans F,
1. $\dim E > \dim F \Rightarrow f$ non injective.
2. $\dim E < \dim F \Rightarrow f$ non surjective.

Démonstration – D'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker}\,f) = \dim E - \dim(Imf)$
1. Si $\dim E > \dim F$, alors $Imf \subset F$, donc $\dim(Imf) \leq \dim F$
 donc $\dim E - \dim(Imf) \geq \dim E - \dim F$
 donc $\dim(\text{Ker}\,f) \geq \dim E - \dim F > 0$
 donc $\text{Ker}\,f \neq \{0_E\}$ donc f non injective.
2. Si $\dim E < \dim F$, d'après la formule du rang,
 $\dim Imf = \dim E - \dim(\text{Ker}\,f) \leq \dim E$
 Donc $\dim Imf < \dim F$, donc f n'est pas surjective. ■

8.3.3 Application aux formes linéaires

Rappel – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Théorème – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n. Une forme linéaire sur E est
- Soit identiquement nulle,
- Soit surjective ; dans ce cas son noyau est de dimension $n - 1$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration – Soit f une forme linéaire sur E. $f : E \to \mathbb{K}$.
Appliquons-lui la formule du rang : $\dim \text{Ker}\, f + \dim Imf = \dim E$
Comme $Imf \subset \mathbb{K}$, $\dim(Imf) \in \{0, 1\}$, d'où deux cas :

- $\dim(Imf) = 0$ donc $Imf = \{0_E\}$, ce qui signifie que f est identiquement nulle.
- $\dim(Imf) = 1$. On a alors $\begin{cases} \dim(Imf) = \dim \mathbb{K} \\ Imf \subset \mathbb{K} \end{cases}$ d'où $Imf = \mathbb{K}$ et f est alors surjective. ■

Définition – Hyperplan

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.
On appelle **hyperplan** *de E tout sous-espace de E de dimension $n - 1$.*

Exemple

Un hyperplan d'un espace de dimension 3 est un plan vectoriel.

Comme nous vivons dans un espace de dimension 3, nous nous représentons très bien un plan vectoriel comme l'ensemble des vecteurs d'un plan physique. Lorsque la dimension de l'espace devient strictement supérieure à 3, nous n'avons plus de représentation, mais pouvons imaginer qu'un hyperplan en dimension $n > 3$ est l'analogue d'un plan en dimension 3.

Corollaire – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n et f une forme linéaire *non identiquement nulle* sur E. Le noyau de f est un hyperplan de E.

Ce résultat découle directement du théorème précédent et de la définition d'un hyperplan.

Exemple

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, le sous-espace de $\mathbb{K}^2$ d'équation $ax + by = 0$ est une droite vectorielle (i.e. un hyperplan de $\mathbb{K}^2$).

Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, le sous-espace de $\mathbb{K}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$ est un plan vectoriel (i.e. un hyperplan de $\mathbb{K}^3$).

En effet, l'application $\begin{cases} \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K} \\ (x, y) \mapsto ax + by \end{cases}$ est une forme linéaire non nulle de noyau $\left\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \,|\, ax + by = 0\right\}$, qui est un hyperplan de $\mathbb{K}^2$, c'est-à-dire une droite vectorielle. C'est analogue dans $\mathbb{K}^3$.

Exemple

L'ensemble des polynômes s'annulant en a est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

En effet, l'application $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a) \end{cases}$ est une forme linéaire non nulle de noyau l'espace des polynômes s'annulant en a. Au passage, on obtient que l'ensemble des polynômes s'annulant en a est un espace vectoriel, en tant que noyau d'une application linéaire.

Synthèse

Savoirs

- Tout espace de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Formule du rang.

Savoir-faire

- Savoir montrer qu'une famille de vecteurs est une base.
- Savoir trouver la dimension d'un sous-espace vectoriel.
- Savoir montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires, en appliquant l'une des caractérisations.

Mots-clés

- Espace de dimension finie, base, dimension d'un espace vectoriel, supplémentaire.
- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'un endomorphisme
- Forme linéaire, hyperplan.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

8.1 Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'ensemble est un espace vectoriel de dimension finie.

1) L'ensemble des polynômes à coefficients réels.

2) L'ensemble des polynômes de degré $\geq n$.

3) L'ensemble des polynômes de degré $\leq n$.

4) L'ensemble des suites arithmétiques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

5) L'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

6) L'ensemble des solutions d'un système linéaire de n équations à p inconnues.

8.2 Quelle peut être la dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^2$?

8.3 Montrer qu'une condition sur a, b, c, d réels pour que $((a, b), (c, d))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$ est que $ad - bc \neq 0$.

8.4 Vrai ou faux ?

1) L'intersection de deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie est un sous-espace de dimension finie de E.

2) La somme de deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie est un sous-espace de dimension finie de E.

3) La réunion de deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie est un sous-espace de dimension finie de E.

4) Le complémentaire dans E d'un sous-espace d'un espace E de dimension finie est un sous-espace de dimension finie de E.

1) Un sous-espace d'un espace de dimension finie est de dimension finie.

8.5 Vrai ou faux ?

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle.

1) Un hyperplan de E contient toujours un vecteur non nul.

2) Un hyperplan de E est un espace de dimension finie.

3) Un hyperplan de E est le noyau d'un isomorphisme.

4) Un hyperplan de E est le noyau d'un certain endomorphisme.

8.6 Vrai ou faux ?

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

1) Si F n'est pas de dimension finie, la formule du rang reste vraie.

2) Si E n'est pas de dimension finie, la formule du rang reste vraie.

3) Si $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$, si f est l'endomorphisme nul, alors $\dim(\text{Ker } f) = 0$.

4) Si $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$, si f est l'endomorphisme nul, alors $\dim(Imf) = 0$.

5) Si f n'est pas l'endomorphisme nul, alors $\dim(Imf) \geq 1$.

Exercices d'application

8.7

Montrer que la famille $((-2, 0, 1), (1, 1, 1), (3, 2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

8.8

Dans $\mathbb{R}_4[X]$, soit :

$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, P(2) = P(4) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$, en déterminer une base et la dimension. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

8.9

On définit l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x - y + 4z, 4x + 3y - 2z)$.

Déterminer Ker f et Imf par une de leurs bases.

f est-il injectif ? surjectif ? Est-il un isomorphisme ?

8.10

On considère

$E = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\right\}$.

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) Montrer que l'application $\varphi \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}^2 \\ (u_n) \mapsto (u_0, u_1) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^2$.

3) Déterminer un réel $q \neq 0$ tels que la suite (q^n) soit élément de E et montrer que la suite (nq^n) est aussi élément de E.

4) Montrer que $((q^n), (nq^n))$ est une base de E

5) En déduire l'expression générale d'une suite de E.

8.11

1) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = (P(0), P(1), P(2))$ est un isomorphisme.

2) En déduire que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \exists! P \in \mathbb{R}_2[X] / \begin{cases} P(0) = a \\ P(1) = b \\ P(2) = c \end{cases}$

3) Formuler un résultat analogue à l'aide de l'application : $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], g(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$.

8.12

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les deux sous-espaces donnés par leur équation : $F : x - y = 0$ et $G : 2x + y = 0$

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer la décomposition de $\overrightarrow{v} = (a,b)$ en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

3) Soit p la projection sur F parallèlement à G ; si on note $(a',b') = p(a,b)$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, écrire a', b'en fonction de a, b.

8.13

Dans $\mathbb{R}^3$, soient : $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x + 2y + 3z = 0\right\}$ et $G = Vect(1,2,3)$.

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) Soit p la projection sur F parallèlement à G

Si on note $(x',y',z') = p(x,y,z)$ écrire x', y', z' en fonction de x, y, z.

8.14

a, b, c, d sont des réels fixés. On considère l'application linéaire $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (ax + by, cx + dy) \end{cases}$

Déterminer à quelles conditions sur a, b, c, d l'application f est

1) Injective.

2 Bijective.

3) Un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

4) Une symétrie de $\mathbb{R}^2$.

5) Vérifie $fof = 0$.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice **8.3**.

Exercices d'approfondissement

8.15 D'après EDHEC 99 S

Soit n un entier naturel non nul ; on considère les fonctions réelles définies par $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = e^{-x}$

et pour tout $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f_k(x) = x^k e^{-x}$. On note E_n l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$.

On note d l'application qui à toute fonction de E_n associe sa fonction dérivée.

1) Montrer que la famille $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ est une base de E_n.

2) Calculer $d(f_0)$, puis montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$d(f_k) = kf_{k-1} - f_k$.

3) Montrer que d est un endomorphisme de E_n

4) On pose : $\forall k \in [\![0,n]\!], \ g_k = \dfrac{1}{k!} f_k$

Montrer que $(g_k)_{0 \le k \le n}$ est une base de E_n.

5) Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!], \ d(g_k) = g_{k-1} - g_k$ En déduire que d est un automorphisme de E_n et pour tout j de $[\![0,n]\!]$, l'expression de $d^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$.

8.16 D'après Essec 2008 S

On considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

Ceci signifie que $\forall x \in \mathbb{R}, (\Delta(P))(x) = P(x+1) - P(x)$.

A.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) Pour P, polynôme de degréd strictement positif, déterminer le degré de $\Delta(P)$.

3) Montrer alors que le noyau de Δ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.

B.

On considère, pour $r \in \mathbb{N}*$, l'application

$\Delta_r \begin{cases} \mathbb{R}_r[X] \to \mathbb{R}_r[X] \\ P \mapsto \Delta(P) \end{cases}$.

1) Justifier la définition de Δ_r et montrer que Δ_r est linéaire.

2) Quel est le noyau de Δ_r ?

3) Montrer alors que $Im\Delta_r = \mathbb{R}_{r-1}[X]$.

4) En déduire que l'application Δ est surjective.

C.

On désigne par E le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les fonctions polynomiales s'annulant en 0 ; Montrer que la restriction de Δ à E est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

D.

1) Déduire de la question précédente qu'il existe une suite et une seule d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(N_n) = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.

2) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, N_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

3) Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}$, la famille $(N_n)_{n \in [\![0,r]\!]}$ forme une base de $\mathbb{R}_r[X]$.

4) Montrer que pour toute fonction polynomiale Q de degré r, $Q = \sum_{n=0}^{r} (\Delta^n(Q))(0) N_n$ où suivant l'usage, $\Delta^0 = Id_{\mathbb{R}[X]}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta^n = \Delta o \Delta^{n-1}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

8.1

1) NON : $\mathbb{R}[X]$, espace des polynômes à coefficients réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais il n'est pas de dimension finie.

2) NON : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme nul étant de degré $-\infty$ n'est pas élément de cet ensemble qui n'est donc pas un espace vectoriel.

3) OUI : L'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ est $\mathbb{K}_n[X]$, qui est de dimension finie égale à $n+1$.

4) (u_n) est arithmétique si et seulement si

$\exists (a,b) \in \mathbb{K} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = an + b$.

L'ensemble des suites arithmétiques à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit $Vect((1),(n))$. C'est donc un $\mathbb{K}$-espace de dimension inférieure ou égale à deux. La réponse est OUI.

5) OUI : De façon tout à fait analogue, une application affine sur $\mathbb{R}$ s'écrit $aId_{\mathbb{R}} + bf_0$ où $f_0 \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array} \right.$.

L'ensemble des applications affines est $Vect(Id_{\mathbb{R}}, f_0)$; de plus, $Id_{\mathbb{R}}$ et f_0 ne sont pas colinéaires, et forment une base de $Vect(Id_{\mathbb{R}}, f_0)$, qui est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux.

6) OUI si le système est homogène, NON dans le cas contraire.

En effet, si le système est homogène, sa i^{ime} ligne s'écrit $f_i\left(x_1, \cdots, x_p\right) = 0_{\mathbb{R}^n}$. où f_i est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$.

$X = \left(x_1, \cdots, x_p\right)$est solution du système si et seulement si $X \in (\text{Ker } f_1) \cap \cdots \cap (\text{Ker } f_n)$.

En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, donc un espace vectoriel de dimension finie.

En revanche, si le système n'est pas homogène, l'une au moins des lignes s'écrit $f_i\left(x_1, \cdots, x_p\right) = b_i$ avec $b_i \neq 0$. f_i étant une forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$, $f_i(0, \cdots, 0) = 0 \neq b_i$ donc $(0, \cdots, 0)$ n'est pas dans l'ensemble des solutions qui n'est donc pas un espace vectoriel.

8.2

$\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2, ses sous-espaces vectoriels peuvent donc être de dimension 0,1 ou 2.

Le seul sous-espace de dimension 0 est $\{(0,0)\}$.

Le seul sous-espace de dimension 2 est $\mathbb{R}^2$.

8.3

$\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2, donc une famille de deux vecteurs est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si elle est libre. Notons $\overrightarrow{u} = (a,b)$ et $\overrightarrow{v} = (c,d)$.

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ n'est pas libre $\Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires$(*)$.

Ce dernier point équivaut à

$$\left(\exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}\right) \text{ ou } \left(\exists \mu \in \mathbb{R} / \overrightarrow{u} = \mu \overrightarrow{v}\right).$$

Or si $\mu \neq 0$, l'existence de μ implique celle de λ (en prenant $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$).

Si $\mu = 0$, l'existence de μ équivaut à $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}}$.

Ainsi $(*) \Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}\right)$ ou $\left(\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}}\right)$

Premier cas : $\overrightarrow{u} = (a,b) = (0,0)$

Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et $ad - bc = 0$.

Deuxième cas : $a \neq 0$

$$(*) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} c = \lambda a \\ d = \lambda b \end{array} \right.$$

$$(*) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{c}{a} \\ d = \dfrac{c}{a} b \end{array} \right. \Leftrightarrow ad - bc = 0.$$

Troisième cas : $b \neq 0$

Analogue au deuxième cas.

On a donc établi que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$.

8.4

1) VRAI : L'intersection de deux sous-espaces de E est un sous-espace de E qui est de dimension finie car E est lui-même de dimension finie.

2) VRAI (cf **8.2.1**.)

3) FAUX : La réunion de deux sous-espaces d'un espace E n'est en général pas un espace vectoriel. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, $Vect(1,0)$ et $Vect(0,1)$ sont des sous-espaces vectoriels, mais $Vect(1,0) \cup Vect(0,1)$ n'en est pas un (en effet, il n'est stable par la somme : $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ n'est pas élément de $Vect(1,0) \cup Vect(0,1)$)

4) FAUX : Le complémentaire dans E d'un sous-espace F n'est jamais un sous-espace de E.

En effet, il ne contient pas 0_E, donc n'est pas un sous-espace de E.

5) VRAI.

8.5

Remarquons déjà qu'on parle d'hyperplan **d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$**.

1) Si $n = 1$, l'hyperplan est de dimension zéro et ne contient que le vecteur nul.

La réponse est : VRAI si $n > 1$, FAUX si $n = 1$.

2) VRAI par définition.

3) Un isomorphisme étant bijectif, donc injectif, son noyau est $\{0_E\}$. La réponse est donc le contraire de celle de la question 1.

4) Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire f sur E. $\dim E \geq 1$, donc E contient un vecteur $\overrightarrow{a}$ non nul. Considérons $g \left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ \overrightarrow{x} \mapsto f\left(\overrightarrow{x}\right) \cdot \overrightarrow{a} \end{array} \right.$.

g est un endomorphisme de E de noyau $\text{Ker}\, f$ qui est l'hyperplan considéré. C'est donc VRAI.

8.6 Rappelons la formule du rang : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel, $f : E \to F$, linéaire, alors $\dim E = \dim(\text{Ker}\, f) + \dim(Imf)$.

1) VRAI : F peut ne pas être de dimension finie, vu les hypothèses du théorème.

2) FAUX : Le fait que E soit de dimension finie est une hypothèse essentielle.

3) FAUX : Si f est l'endomorphisme nul,

$\forall x \in E, f(x) = 0_F$, donc $\text{Ker}\, f = E$. Or par hypothèse, $E \neq \{0_E\}$ puisque $\dim E \geq 1$.

4) VRAI : Si f est l'endomorphisme nul, $Imf = \{0_F\}$ qui est de de dimension nulle.

5) VRAI : Si f n'est pas l'endomorphisme nul, cela signifie : $\exists x \in E / f(x) \neq 0_E$

Alors $Vect[f(x)] \subset Imf$ et $Vect[f(x)] \neq \{0_F\}$ donc $\dim(Imf) \geq 1$.

8.7 Voyons si la famille est libre : Soient α, β, γ dans $\mathbb{R}^3$

$$\alpha(-2,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(3,2,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3\beta + 5\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ce calcul prouve que la famille est libre. Comme elle est formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, espace de dimension trois, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

8.8 Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on a équivalence entre les énoncés suivants :

· $P \in F$

· $P(2) = P(4) = 0$

· $(X-2)$ divise P et $(X-4)$ divise P

· $(X-2)(X-4)$ divise P

· $\exists Q \in \mathbb{R}_2[X] / P = (X-2)(X-4)Q$

· $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / P = \left(a + bX + cX^2\right)(X-2)(X-4)$

· $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / P = aP_0 + bP_1 + cP_2$

Où $\begin{cases} P_0 = (X-2)(X-4) \\ P_1 = X(X-2)(X-4) \\ P_2 = X^2(X-2)(X-4) \end{cases}$

Ceci montre que $F = Vect(P_0, P_1, P_2)$.

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$, de partie génératrice (P_0, P_1, P_2).

De plus, P_0, P_1, P_2 étant non nuls de degrés tous différents, forment une famille libre. D'où (P_0, P_1, P_2) est une base de F. La dimension de F, égale au nombre de vecteurs d'une de ses bases, est donc 3.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter (P_0, P_1, P_2) en une base de $\mathbb{R}_4[X]$ en prenant les polynômes manquants dans la base canonique.

La famille $(1, X, P_0, P_1, P_2)$ est libre, car échelonnée en degrés, et comporte 5 polynômes non nuls de $\mathbb{R}_4[X]$, espace de dimension 5, c'est donc une base de $\mathbb{R}_4[X]$. Prenons $G = Vect(1, X)$. D'après la caractérisation des supplémentaires, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[X]$.

8.9

• Déterminons d'abord le noyau :

$$u = (x,y,z) \in \text{Ker}\, f \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -5y + 10z = 0 \\ -5y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2/5}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases}$$

Donc $u \in \text{Ker}\, f \Leftrightarrow u = z(-1,2,1)$

Donc $\text{Ker}\, f = Vect(-1,2,1)$.

• Déterminons l'image de f. D'après la formule du rang, $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \dim(\text{Ker}\, f) + \dim(Imf)$

Donc $\dim(Imf) = 3 - \dim(\text{Ker}\, f) = 3 - 1 = 2$

Une base de Imf est donc formée de deux vecteurs non colinéaires de Imf.

Comme $f(1,0,0) = (1,2,4)$ et $f(0,1,0) = (2,-1,3)$ sont non colinéaires et sont par construction éléments de Imf, ils forment une base de Imf.

• $\dim(\text{Ker}\, f) = 1$ donc $\text{Ker}\, f \neq \{0_E\}$, ce qui prouve que f n'est pas injective.

$\dim(Imf) = 2 < 3$ donc $Imf \neq \mathbb{R}^3$, ce qui prouve que f n'est pas surjective.

En particulier, f n'est pas bijective et n'est pas un isomorphisme.

8.10

1) $*$ Notons (θ_n) la suite nulle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = 0$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_{n+2} - 4\theta_{n+1} + 4\theta_n = 0$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Donc $(\theta_n) \in E$, donc $E \neq \emptyset$.

$*$ Soient (u_n) et(v_n) deux suites de E et λ un réel. Notons $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + v_n$.

$w_{n+2} - 4w_{n+1} + 4w_n =$

$\lambda u_{n+2} + v_{n+2} - 4(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + 4(\lambda u_n + v_n) =$

$\lambda \underbrace{(u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n)}_{=0 \text{ car } (u_n) \in E} + \underbrace{(v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n)}_{=0 \text{ car } (v_n) \in E} = 0$

Donc $(w_n) \in E$. Ceci montre que E est stable par combinaisons linéaires

$*$ On conclut que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) $\forall (u_n) \in E \quad , \forall (v_n) \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$\varphi(\lambda(u_n) + (v_n)) = \varphi((\lambda u_n + v_n)) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1)$

$= \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1) = \lambda\varphi((u_n)) + \varphi((v_n))$

Donc φ est linéaire.

De plus, montrons que

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists! (u_n) \in E / \varphi((u_n)) = (a, b)$

En effet, $\varphi((u_n)) = (a, b) \Leftrightarrow (u_0 = a \text{ et } u_1 = b)$

Or cette condition définit une unique suite (u_n) de E, car une fois que u_0 et u_1 sont fixés, les termes suivants sont définis de proche en proche par la condition $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Donc φ est bijective. C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3) Soit $q \in \mathbb{R}^*$

$(q^n) \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} - 4q^{n+1} + 4q^n = 0$
$(q^n) \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^n\left(q^2 - 4q + 4\right) = 0$

Comme $q \neq 0$, $(q^n) \in E \Leftrightarrow (q-2)^2 = 0$

$(q^n) \in E \Leftrightarrow q = 2.$

On en déduit que la seule suite du type (q^n)dans E est (2^n).

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = n2^n$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$b_{n+2} - 4b_{n+1} + 4b_n =$

$(n+2)2^{n+2} - 4(n+1)2^{n+1} + 4n2^n =$

$2^{n+2}(n + 2 - 2(n+1) + n) = 0$

Donc $(n2^n)$est élément de E.

4) Les suites $(2^n) = (1, 2, 4, 8, \cdots)$ et $(n2^n) = (0, 2, 8, 24, \cdots)$ ne sont pas proportionnelles donc ne constituent pas deux vecteurs colinéaires de l'espace vectoriel E. On en déduit que la famille $((2^n), (n2^n))$ est une famille libre de E.

D'après la question 2, E est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, donc est de dimension deux. $((2^n), (n2^n))$, famille libre formée de deux vecteurs de E est une base de E.

5) Toute suite (u_n) de E est donc combinaison linéaire de ces deux suites, donc vérifie $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (a + bn) \cdot 2^n$.

8.11

1) $*$ Montrons que f est linéaire :

Soient P, Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$f(P + \lambda Q) = ((P + \lambda Q)(0), (P + \lambda Q)(1), (P + \lambda Q)(2))$

Par définition des opérations sur les polynômes,

$f(P + \lambda Q) = (P(0) + \lambda Q(0), P(1) + \lambda Q(1), P(2) + \lambda Q(2))$

$= (P(0), P(1), P(2)) + \lambda(Q(0), Q(1), Q(2))$

Donc $f(P + \lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q)$

Donc f est linéaire.

$*$ Montrons que f est injective :

On a équivalence entre les énoncés suivants :

$\cdot$ $P \in \text{Ker } f$

$\cdot$ $f(P) = (0, 0, 0)$

$\cdot$ $(P(0), P(1), P(2)) = (0, 0, 0)$

$\cdot$ $P(0) = P(1) = P(2) = 0$

Ainsi, $P \in \text{Ker } f$ si et seulement si les réels 0,1 et 2 sont racines de P. Comme P est un polynôme de degré ≤ 2, ceci équivaut à ce que P soit le polynôme nul.

On a montré que $\text{Ker } f = \{\overrightarrow{0}\}$, donc f est injective.

$*$ De plus, comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, f, application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie, est bijective :

$*$ On conclut que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) Ecrivons la définition de f bijective :

$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \exists! P \in \mathbb{R}_2[X] / f(P) = (a, b, c)$

c'est-à-dire en utilisant l'expression de f :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \exists! P \in \mathbb{R}_2[X] / \begin{cases} P(0) = a \\ P(1) = b \\ P(2) = c \end{cases}$$

3) $*$Montrons que g est linéaire :

Soient P, Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$g(P + \lambda Q) = ((P + \lambda Q)(0), (P + \lambda Q)'(0), (P + \lambda Q)''(0))$

Par linéarité de la dérivation,

$f(P + \lambda Q) = (P(0) + \lambda Q(0), P'(0) + \lambda Q'(0), P''(0) + \lambda Q''(0))$

$= (P(0), P'(0), P''(0)) + \lambda(Q(0), Q'(0), Q''(0))$

Donc $g(P + \lambda Q) = g(P) + \lambda g(Q)$

Donc g est linéaire.

$*$ On a équivalence entre les énoncés suivants :

$\cdot$ $P \in \text{Ker } g$

· $g(P) = (0,0,0)$

· $(P(0), P'(0), P''(0)) = (0,0,0)$

· $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$

· 0 est racine d'ordre trois de P

· X^3 divise P

· $\exists Q \in \mathbb{R}[X] / P = X^3 Q$

Mais si $P \in \operatorname{Ker} g$, P étant de degré ≤ 2, Q ne peut pas être de degré ≥ 0. Donc Q est le polynôme nul, ainsi que P. Donc $\operatorname{Ker} g = \{\overrightarrow{0}\}$.

Ainsi g est injective ; comme à la question 2, c'est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie. Donc g est un isomorphisme.

On en déduit que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \exists! P \in \mathbb{R}_2[X] / \begin{cases} P(0) = a \\ P'(0) = b \\ P''(0) = c \end{cases}$

8.12

1) $F = \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\} = Vect(1,1)$ donc $\dim F = 1$.

$G = \{(x,-2x) | x \in \mathbb{R}\} = Vect(1,-2)$ donc $\dim G = 1$.

Donc $\dim F + \dim G = 2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$ $(*)$.

De plus, en utilisant les expressions ci-dessus des vecteurs de F et G,

$$u \in F \cap G \Rightarrow \exists (x, x_1) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \overrightarrow{u} = (x,x) \\ \overrightarrow{u} = (x_1, -2x_1) \end{cases}$$

donc $x = x_1 = -2x_1$, donc $x_1 = 0$, donc $\overrightarrow{u} = (0,0)$.

D'où $F \cap G \subset \{(0,0)\}$.

L'inclusion inverse étant évidente, $F \cap G = \{(0,0)\}$ $(\bullet)$

On déduit de $(*)$ et $(\bullet)$ que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

2) Soit $\overrightarrow{v} = (a,b)$ dans $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v_F} = (y,y)$ dans F,

$\overrightarrow{v}_G = (x,-2x) \in G$,

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_F} + \overrightarrow{v_G} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ -2x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(a-b) \\ y = \dfrac{1}{3}(2a+b) \end{cases}$$

La décomposition de (a,b) sur F et G est donc :

$$(a,b) = \underbrace{\frac{1}{3}(2a+b)(1,1)}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{3}(a-b)(1,-2)}_{\in G}$$

3) La projection p sur F parallèlement à G est l'application : $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v_F}$. D'après 2, $\begin{cases} a' = \dfrac{1}{3}(2a+b) \\ b' = \dfrac{1}{3}(2a+b) \end{cases}$

Ce dernier système répond à la question.

8.13

1) Soit $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$

$\overrightarrow{u} \in F \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 3z$

$\overrightarrow{u} \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = (-2y - 3z, y, z)$

$\overrightarrow{u} \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = y(-2,1,0) + z(-3,0,1)$

Ceci montre que $F = Vect\left(\underbrace{(-2,1,0)}_{\overrightarrow{a}}, \underbrace{(-3,0,1)}_{\overrightarrow{b}}\right)$

$\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ étant non colinéaires, forment une famille libre. Par construction, ils engendrent F. Donc $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ est une base de F, donc $\dim F = 2$.

Par ailleurs, $(1,2,3)$, vecteur non nul, est une base de G donc $\dim G = 1$.

Ainsi, $(*)$ $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$

De plus si $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$,

$$\overrightarrow{u} \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{u} = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \\ \lambda + 2 \times 2\lambda + 3 \times 3\lambda = 0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{u} \in F \cap G \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = (0,0,0)$

donc $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ $(\bullet)$

On déduit de $(*)$ et $(\bullet)$ que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2) F et G étant supplémentaires,

$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3, \exists! \left(\overrightarrow{u_F}, \overrightarrow{u_G}\right) \in F \times G / \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_F} + \overrightarrow{u_G}$.

Alors $p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u_F}$.

Si $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$, calculons $\overrightarrow{u_F} = (x',y',z')$:

$$\text{On a : } \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} x' + 2y' + 3z' = 0 \\ x = x' + \lambda \\ y = y' + 2\lambda \\ z = z' + 3\lambda \end{cases}$$

D'où $(x - \lambda) + 2(y - 2\lambda) + 3(z - 3\lambda) = 0$

i.e. $\lambda = \frac{1}{14}(x + 2y + 3z)$.

En reportant dans le système, on obtient successivement :

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{1}{14}(x + 2y + 3z) \\ y' = y - \dfrac{1}{7}(x + 2y + 3z) \\ z' = z - \dfrac{3}{14}(x + 2y + 3z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{14}(13x - 2y - 3z) \\ y' = \dfrac{1}{7}(-x + 5y - 3z) \\ z' = \dfrac{1}{14}(-3x - 6y + 5z) \end{cases}$$

Ce dernier résultat répond à la question.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

8.14

Remarque : Dans cet exercice, nous nous permettrons d'enchaîner des $\Leftrightarrow$ entre des systèmes équivalents.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$f(e_1) = (a, c)$ et $f(e_2) = (b, d)$.

1) f , endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie, est injective si et seulement si elle est bijective, donc si et seulement si $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. D'après **8.3** ceci équivaut à $ad - bc \neq 0$.

On a montré que :

f injective$\Leftrightarrow$ f bijective $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.

2) La réponse est ci-dessus.

3) f étant linéaire, f est un projecteur si et seulement si $fof = f$, donc si et seulement si

$$\begin{cases} fof(e_1) = f(e_1) \\ fof(e_2) = f(e_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a,c) = (a,c) \\ f(b,d) = (b,d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a^2 + bc, ca + cd\right) = (a,c) \\ \left(ab + bd, bc + d^2\right) = (b,d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) \begin{cases} a^2 + bc = a \\ c(a+d) = c \\ b(a+d) = b \\ d^2 + bc = d \end{cases}$$

Premier cas : $a + d = 1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \\ d^2 + bc = d \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a^2 + bc = a \\ (d-a)(d+a) = d - a \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \\ (d-a)(d+a-1) = 0 \end{cases} \underset{a+d=1}{\Leftrightarrow} a^2 + bc = a$$

Deuxième cas : $a + d \neq 1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ d^2 = d \\ b = c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ d(d-1) = 0 \\ b = c = 0 \end{cases}$$

$$(S) \underset{a+d\neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (a,d) = (0,0) \text{ ou } (a,d) = (1,1) \\ b = c = 0 \end{cases}$$

En conclusion, f est un projecteur si et seulement si $\begin{cases} a + d = 1 \\ a^2 - a + bc = 0 \end{cases}$ ou $(a,b,c,d) = (0,0,0,0)$ ou

$(a,b,c,d) = (1,0,0,1)$.

4) f étant linéaire, f est une symétrie si et seulement si $fof = Id_E$, donc si et seulement si $\begin{cases} fof(e_1) = e_1 \\ fof(e_2) = e_2 \end{cases}$

En adaptant le calcul de la question 2, ceci équivaut à :

$$(S1) \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 1 \end{cases}$$

Premier cas : $a + d = 0$

$(S1) \Leftrightarrow a^2 + bc = 1$

Deuxième cas : $a + d \neq 0$

$$(S1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = d^2 = 1 \\ b = c = 0 \end{cases}$$

$$(S1) \underset{a+d\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (a,d) = (1,1) \text{ ou } (a,d) = (-1,-1) \\ b = c = 0 \end{cases}$$

En conclusion, f est une symétrie si et seulement si $\begin{cases} a + d = 0 \\ a^2 + bc = 1 \end{cases}$ ou $(a,b,c,d) = (1,0,0,1)$ ou

$(a,b,c,d) = (-1,0,0,-1)$.

5) Adaptons à nouveau le système (S) :

$$fof = 0 \Leftrightarrow (S2) \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 0 \end{cases}$$

Premier cas : $a + d = 0$

$(S2) \Leftrightarrow a^2 + bc = 0$

Deuxième cas : $a + d \neq 0$

$(S2) \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

C'est impossible lorsque $a + d \neq 0$.

En conclusion, $fof = 0$ si et seulement si $\begin{cases} a + d = 0 \\ a^2 + bc = 0 \end{cases}$

8.15

1) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ des réels ; supposons que

$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$ (fonction nulle).

Alors, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \alpha_0 e^{-x} + \alpha_1 x e^{-x} + \cdots + \alpha_n x^n e^{-x} = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{-x}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0$.

Posons $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n$. P est un polynôme ayant une infinité de racines, à savoir tous les réels positifs. Donc P est le polynôme nul, qui a tous ses coefficients nuls. Donc $\forall k \in [\![0, n]\!], \alpha_k = 0$. Ceci prouve que la famille est libre.

Comme par construction, elle engendre E_n, c'est une base de E_n.

En particulier, E_n possède une base formée de $n + 1$ vecteurs, donc est de dimension $n + 1$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, (d(f_0))(x) = -e^{-x} = -f_0(x)$.

Donc $d(f_0) = -f_0$.

Si $k \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$(d(f_k))(x) = kx^{k-1}e^{-x} - x^k e^{-x}$

$(d(f_k))(x) = kf_{k-1}(x) - f_k(x) = (kf_{k-1} - f_k)(x)$

Donc $d(f_k) = kf_{k-1} - f_k$.

3) Par linéarité de la dérivation,

$\forall (f,g) \in E_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (f+\lambda g)' = f' + \lambda g'$

ce qui se traduit par $d(f+\lambda g) = d(f) + \lambda d(g)$.

Donc d est linéaire.

D'après la question 2,

$\forall k \in [\![0,n]\!], d(f_k) \in Vect(f_0, f_1, \cdots, f_n) = E_n$.

Donc $d(E_n) \subset E_n$.

d est donc un endomorphisme de E_n.

4) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ des réels ; supposons que

$\alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_n g_n = 0$ (fonction nulle).

Alors, on a : $\dfrac{\alpha_0}{0!}f_0 + \dfrac{\alpha_1}{1!}f_1 + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{n!}f_n = 0$

La famille $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ étant libre, on en déduit que $\forall k \in [\![0,n]\!], \frac{\alpha_k}{k!} = 0$, d'où $\forall k \in [\![0,n]\!], \alpha_k = 0$.

La famille $(g_0, g_1, \cdots, g_n)$ est donc libre. Comme elle comporte $n+1$ vecteurs dans l'espace E_n de dimension $n+1$, c'est une base de E_n.

5) $\forall k \geq 1, d(g_k) = \dfrac{1}{k!}d(f_k) = \dfrac{1}{k!}(kf_{k-1} - f_k)$

$d(g_k) = \dfrac{1}{(k-1)!}f_{k-1} - \dfrac{1}{k!}f_k = g_{k-1} - g_k$.

De plus, $d(g_0) = d(f_0) = -f_0 = -g_0$.

On a donc :
$$\begin{cases} d(g_0) = -g_0 \\ d(g_1) = g_0 - g_1 \\ \vdots \\ d(g_k) = g_{k-1} - g_k \end{cases}$$

Par addition, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} d(g_i) = -g_k$

Par linéarité de d, $\forall k \in [\![1,n]\!], g_k = d\left(-\displaystyle\sum_{i=0}^{k} g_i\right)$

De plus , $g_0 = d(-g_0)$.

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!], g_k \in Imd$.

$(g_k)_{0\leq k\leq n}$ étant une base de E_n, $E_n \subset Imd$, donc $E_n = Imd$. Ainsi d, endomorphisme de E_n, espace de dimension finie, est surjectif, donc bijectif. Donc d est un automorphisme de E_n.

De plus, son automorphisme réciproque vérifie :

$d^{-1}(g_0) = -g_0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], d^{-1}(g_k) = -\displaystyle\sum_{i=0}^{k} g_i$.

En repassant aux f_k, $d^{-1}(f_0) = -f_0$

et $\forall k \in [\![1,n]\!], d^{-1}(f_k) = -k!\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{i!}$.

8.16

A.

1) Soient P, Q dans $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Delta(P+\lambda Q)(x) &= (P+\lambda Q)(x+1) - (P+\lambda Q)(x)\\ &= P(x+1) + \lambda Q(x+1) - [P(x) + \lambda Q(x)]\\ &= [P(x+1) - P(x)] + \lambda[Q(x+1) - Q(x)]\\ &= \Delta P(x) + \lambda \Delta Q(x)\end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire. De plus, comme $\mathbb{R}[X]$ étant stable par composition et soustraction, Δ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$. Donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) Calculons d'abord $\Delta\left(X^k\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^j\right) - X^k$$

$$\Delta\left(X^k\right) = X^k + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j - X^k = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j$$

De plus, le coefficient de X^{k-1} dans $\Delta\left(X^k\right)$ est $\binom{k}{k-1} = k \neq 0$, donc pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$d^\circ\left(\Delta\left(X^k\right)\right) = k-1.$$

De plus, $\Delta\left(X^0\right) = \Delta(1) = 0$.

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$, avec $d^\circ P = d > 0$, alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_0, \cdots, a_d$ réels, $a_d \neq 0$

Δ étant linéaire, $\Delta(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k \Delta\left(X^k\right) = \sum_{k=1}^{d} a_k \underbrace{\Delta\left(X^k\right)}_{d^\circ(k-1)}$; donc

$d^\circ(\Delta(P)) = d-1$

3) Raisonnons par disjonction des cas :

Premier cas : $d^\circ P = d > 0$

Alors $d^\circ(\Delta(P)) = d-1 \geq 0$ (en particulier, $\Delta(P)$ n'est pas de degré $-\infty$.) donc $\Delta(P)$ n'est pas le polynôme nul.

Deuxième cas : P est un polynôme constant.

$\exists \alpha \in \mathbb{R} / P(X) = \alpha$.

donc $\Delta(P) = \alpha\Delta(1) = 0$, donc $P \in \operatorname{Ker}\Delta$.

Conclusion : Tout polynôme non nul ayant un degré ≥ 0, les polynômes d'image nulle sont les polynômes constants , ce qui se traduit par $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$.

B.

1) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si $P \in \mathbb{R}_r[X]$, $d^\circ P \leq r$ donc $d^\circ\Delta(P) \leq r-1$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{r-1}[X] \subset \mathbb{R}_r[X]$. Ainsi, Δ_r est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_r[X]$, et la définition de Δ_r est cohérente.

De plus, Δ_r ayant même expression que Δ sur un espace plus petit, est linéaire comme Δ.

2) On a équivalence entre les énoncés suivants :

· $P \in \operatorname{Ker}\Delta_r$

· $(P \in \mathbb{R}_r[X]$ et $\Delta(P) = 0)$

· $P \in \mathbb{R}_r[X] \cap \mathbb{R}_0[X]$

· $P \in \mathbb{R}_0[X]$

Donc $\operatorname{Ker}\Delta_r = \mathbb{R}_0[X]$.

3) $\left(1, X, X^2, \cdots, X^r\right)$ étant une base de $\mathbb{R}_r[X]$,

$$Im\Delta_r = Vect\left(\underbrace{\Delta(1)}_{=0}, \Delta(X), \cdots, \Delta(X^r)\right)$$

$$Im\Delta_r = Vect\left(\Delta(X), \Delta\left(X^2\right), \cdots, \Delta(X^r)\right)$$

La famille $\left(\underbrace{\Delta(X)}_{d^\circ 0}, \underbrace{\Delta\left(X^2\right)}_{d^\circ 1} \cdots, \underbrace{\Delta(X^r)}_{d^\circ r-1}\right)$ étant échelonnée en degrés et constituée de polynômes non nuls, est libre ; par construction, elle engendre $Im\Delta_r$, qui est donc de dimension r.

De plus, $Im\Delta_r \subset \mathbb{R}_{r-1}[X]$.

Comme $\dim(Im\Delta_r) = r = \dim(\mathbb{R}_{r-1}[X])$, on en déduit que $Im\Delta_r = \mathbb{R}_{r-1}[X]$.

4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, si $P = 0$ alors $P = \Delta(0)$; sinon $d^\circ P = r - 1$ avec $r \in \mathbb{N}^*$. Donc $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X] = Im\Delta_r \subset Im\Delta$.

Ainsi tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$, nul ou pas, est élément de $Im\Delta$. Donc $Im\Delta = \mathbb{R}[X]$. Donc Δ est surjective.

C.

Δ est surjective donc

$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists P \in \mathbb{R}[X]/Q = \Delta(P)$.

Posons $P_1 = P - P(0)$.

Alors $P_1(0) = P(0) - P(0) = 0$ donc $P_1 \in E$.

Par ailleurs, $\Delta(P_1) = \Delta(P) - \underbrace{\Delta(P(0))}_{=0} = \Delta(P) = Q$

On a ainsi montré que

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists P_1 \in E/Q = \Delta(P_1),$$

donc $\Delta : E \to \mathbb{R}[X]$ est surjective.

De plus, $P \in \operatorname{Ker}\Delta_{|E} \Leftrightarrow (P \in E$ et $\Delta(P) = 0)$

Donc $\operatorname{Ker}\Delta_{|E} = E \cap \operatorname{Ker}\Delta = E \cap \mathbb{R}_0[X]$

Or un polynôme est dans $E \cap \mathbb{R}_0[X]$ si et seulement si il est constant et s'annule en zéro, s'est-à-dire s'il est nul. Donc $\operatorname{Ker}\Delta_{|E} = \{0\}$. Donc $\Delta_{|E}$ est injective.

Conclusion : $\Delta_{|E}$ est bijective ; étant linéaire comme Δ, c'est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

D.

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu' il existe un unique polynôme N_n tel que $N_0 = 1$ et si $n \geq 1$, $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.

$N_0 = 1$ donc N_0 est défini de façon unique par l'énoncé.

Si on suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$, N_n existe, alors, d'après **C**, puisque Δ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$,

$\exists! N_{n+1} \in E/\Delta(N_{n+1}) = N_n$

En tenant compte de la définition de E,

$\exists! N_{n+1} \in \mathbb{R}[X]/(N_{n+1}(0) = 0$ et $\Delta(N_{n+1}) = N_n)$

On a ainsi montré par récurrence que la suite (N_n) vérifiant les conditions de l'énoncé est définie de façon unique.

2) Posons pour $n \in \mathbb{N}*$

$$M_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

Montrons par récurrence sur n que $M_n = N_n$, c'est-à-dire que (M_n) vérifie les conditions de la question précédente.

Si $n = 1$, $\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k) = X$ et on vérifie que $:\Delta(X) = (X+1) - X = 1 = N_0(X)$; de plus, X s'annule en 0. N_1 étant défini de façon unique, $M_1 = N_1$.

Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on ait :

$N_{n-1}(X) = M_{n-1}(X) = \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-2}(X-k)$, alors

$$\Delta(M_n) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X+1-k) - \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$$

$$\Delta(M_n) = \frac{1}{n!}\left[\underbrace{\prod_{k'=-1}^{n-2}(X-k')}_{k'=k-1} - \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right]$$

$$\Delta(M_n) = \frac{1}{n!}\left[(X+1) - (X-(n-1))\right]\prod_{k=0}^{n-2}(X-k)$$

$$\Delta(M_n) = \frac{1}{n!}(n)\prod_{k=0}^{n-2}(X-k) = \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-2}(X-k)$$

$\Delta(M_n) = N_{n-1}$; de plus $M_n(0) = 0$ car $n \geq 1$.

N_n étant défini de façon unique, on en déduit que $M_n = N_n$, c'est-à-dire que $N_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.

On a bien prouvé par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, N_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n est de degré n. La famille $(N_n)_{n\in[\![0,r]\!]}$ est donc échelonnée en degrés et constituée de polynômes non nuls, donc libre. Comme elle comporte $r+1$ vecteurs de l'espace $\mathbb{R}_r[X]$ de dimension $r+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_r[X]$.

4) Remarquons d'abord que si $k \in [\![0, r]\!]$,

$\Delta(N_k) = N_{k-1}$; $\Delta^2(N_k) = N_{k-2}$;... ;

$\Delta^k(N_k) = N_0 = 1$; d'où pour $n > k$, $\Delta^n(N_k) = 0$.

Considérons à présent $Q \in \mathbb{R}_r[X]$; d'après la question précédente, $\exists!\,(\alpha_0, \cdots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1} / Q = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k N_k$.

Si $n \in [\![0, r]\!]$, $\Delta^n(Q) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k \Delta^n(N_k)$

Or si $k < n$, $\Delta^n(N_k) = 0$, donc

$$\Delta^n(Q) = \sum_{k=n}^{r} \alpha_k \Delta^n(N_k) = \sum_{k=n}^{r} \alpha_k N_{k-n}.$$

En substituant 0 à X, il vient : $(\Delta^n(Q))(0) = \alpha_n N_n(0) = \alpha_n$ car $N_{k-n}(0) = 0$ si $k > n$.

En replaçant ces valeurs deα_n dans l'expression de Q, on obtient : $Q = \sum_{n=0}^{r} (\Delta^n(Q))(0) N_n$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Matrices

CHAPITRE 9

Plan

9.1 Matrices et applications linéaires 218
9.2 Opérations sur les matrices 222
9.3 Rang d'une matrice 227
9.4 Matrices carrées 230
9.5 Changement de base 237
9.6 Retour sur les systèmes linéaires 241
Synthèse 243
Tests et exercices 244
Corrigés des exercices 248

Introduction

Nous allons dans ce chapitre introduire les matrices, définir les calculs sur ces matrices, et utiliser cet outil très commode pour les exercices en dimension finie.

Prérequis

- Systèmes linéaires, méthode du pivot de Gauss.
- Espaces vectoriels, applications linéaires en dimension finie.

Objectifs

- Maîtriser le calcul matriciel.
- Utiliser les matrices pour résoudre des problèmes d'algèbre linéaire en dimension finie.

9.1 Matrices et applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

9.1.1 Définitions

Définition – Matrice

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. *On appelle* **matrice à n lignes et p colonnes** *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *un tableau de la forme* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & & & \\ a_{31} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & \cdots & & a_{np} \end{pmatrix}$

où pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

- *Pour* $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, *les scalaires* a_{ij} *sont appelés* **coefficients** *de la matrice* A.

a_{ij} est situé à la i^{me} ligne et à la j^{me} colonne. En d'autres termes, dans l'écriture a_{ij}, le premier indice i désigne le numéro de la ligne alors que le deuxième indice j désigne le numéro de la colonne.

- *a_{ij} est le* **terme général** *de la matrice A.*

Notation – On note $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ ou $A = \left(a_{ij}\right)$ lorsqu'il n'y a pas d'équivoque sur la taille de la matrice A.

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition – Cas particuliers

- *Lorsque* $n = 1, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$ *est une* **matrice-ligne**.
 On note $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- *Lorsque* $p = 1, A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ *est une* **matrice-colonne**.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices-colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition – Matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque $n = p, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *est une* **matrice carrée** *d'ordre n.*

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La **matrice-unité d'ordre** *n, carrée d'ordre n est* $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.1.2 Matrice d'une application linéaire

Détermination d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

Rappel – Nous avons vu dans le chapitre **7** que si l'on fixe les images d'une base de l'espace de départ, ici $\mathbb{K}^p$, dans l'espace d'arrivée, ici $\mathbb{K}^n$, on définit ainsi une unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$:

Si $\mathcal{B} = \left(e_1, \cdots, e_p\right)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ (par exemple la base canonique), et si $x'_1, \cdots, x'_p$ sont p vecteurs fixés de $\mathbb{K}^n$, il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que $\forall j \in [\![1, p]\!], f\left(e_j\right) = x'_j$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Formules

Gardons les mêmes notations. Nous allons mettre en place les formules qui nous permettront de relier matrices et applications linéaires entre espaces de dimension finie.

Notons encore $\mathcal{B} = \left(e_1, \cdots, e_p\right)$ une base de $\mathbb{K}^p$, et introduisons $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \cdots, e'_n\right)$ une base de $\mathbb{K}^n$.

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \exists! \left(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}\right) \in \mathbb{K}^n / f\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i.$$

Soit $x \in \mathbb{K}^p$; $\exists! \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \in \mathbb{K}^n / x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$.

f étant linéaire, $f(x) = \sum_{i=1}^{p} x_j f\left(e_j\right)$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \left(x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j e'_i \right).$$

D'où $\quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right)}_{\text{scalaire} \in \mathbb{K}} e'_i \qquad (1).$

Comme $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \cdots, e'_n\right)$ est une base de $\mathbb{K}^n$,

$$\exists! \left(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n\right) \in \mathbb{K}^n / f(x) = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i \qquad (2)$$

En considérant les deux expressions (1) et (2) de $f(x)$, on en déduit que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \; x'_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ip} x_p$$

Cette dernière formule, constituée en réalité de n égalités, est appelée **expression analytique de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$'**. Elle donne l'expression des coordonnées de l'image d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$' de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}^n$en fonction des coordonnées du vecteur dans la base $\mathcal{B}$ de l'espace de départ $\mathbb{K}^p$.

Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = \left(e_1, \cdots, e_p\right)$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \cdots, e'_n\right)$, f une application linéaire de E dans F.*

On appelle **matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$'** *la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ égale à $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ où $\forall j \in [\![1, p]\!], f\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$.*

On note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$'.

En d'autres termes, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ contient les coordonnées dans la base de l'espace d'arrivée, de $f\left(e_j\right)$, image par f du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base de départ.

Exemple

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \left(e'_1, e'_2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On définit une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(e_1) = e'_1 - e'_2$; $f(e_2) = e'_1$; $f(e_3) = e'_1 + 2e'_2$.

La matrice de f dans les bases B et B' est

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \end{matrix}$$

L'expression analytique de f dans les bases B et B' est :

$$\begin{cases} x' = 1x + 1y + 1z \\ y' = -1x + 0y + 2z \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = -x + 2z \end{cases}$$

Les coordonnées des images des vecteurs de la base de départ donnent les colonnes de la matrice.

Les coefficients de l'expression analytique donnent les lignes de la matrice.

Cas particulier – Si l'espace d'arrivée F est de dimension 1, f est une forme linéaire sur E. La matrice de f dans une base $\mathcal{B} = \left(e_1, \cdots, e_p\right)$ de E s'écrit $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $a_i = f(e_i)$.

La matrice d'une forme linéaire est une matrice-ligne.

Définition – *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; l'***application linéaire canoniquement associée à** A *est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases* **canoniques** *de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A.*

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, l'application linéaire canoniquement associée à A est

$$f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + 3y, 5y, 2x + 4y) \end{cases}$$

Son expression analytique est $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 5y \\ z' = 2x + 4y \end{cases}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

9.1.3 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition – *Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, et $u_1, \cdots, u_p p$ vecteurs de F.*

La **matrice de la famille** $\left(u_1, \cdots, u_p\right)$ *dans la base $\mathcal{B}$ est* $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ *où*

$\forall j \in [\![1, p]\!]$, $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. *On la note* $Mat_{\mathcal{B}}\left(u_1, \cdots, u_p\right)$.

Autrement dit, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $Mat_{\mathcal{B}}\left(u_1, \cdots, u_p\right)$ *contient les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$, on pose $P(X) = 5+4X+2X^2$.

$Mat_{\mathcal{B}}(P, P', P'') = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{K}^3$, posons pour $i \in [\![1, 4]\!]$, $u_i = \left(1, i, i^2\right)$.

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$.

Cas particulier – Si $p = 1$, la famille comporte un seul vecteur $u = a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$.

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est la matrice-colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

9.2 Opérations sur les matrices

9.2.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition – *Soient* $(A, B) \in \left[\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right]^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *et* $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

On définit :

- *La* **somme des matrices** A **et** B : $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.
- *Le* **produit de la matrice** A **par** $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad 2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Théorème et définition – Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$.

1. $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np, isomorphe à $\left(\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n), +, \cdot\right)$. Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, dont tous les coefficients sont nuls.

2. Si on note $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \\ i^{\text{ième}}\text{ligne} \\ \\ \\ \end{matrix}$ $\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ j^{\text{ième}}\text{colonne} \end{matrix}$, où le coefficient 1 est situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, la famille $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Idée de la démonstration de 1

L'application $\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ associe sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, est une bijection grâce au théorème de détermination d'une application linéaire ; de plus, l'addition et le produit par un scalaire dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ont été définies pour qu'elles « correspondent » à l'addition et au produit par un scalaire des applications linéaires. C'est pour cette raison que φ est linéaire. Etant bijective et linéaire, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. ■

Démonstration de 2

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{ij}$; ceci prouve que toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des E_{ij}, c'est-à-dire que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est engendré par la famille $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

Une combinaison linéaire de la famille $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ s'écrit : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$

Par comparaison des coefficients, elle est égale à la matrice nulle si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{ij} = 0$.

Ceci montre que la famille $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est libre. C'est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. ■

Corollaire – Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$. $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)) = np$.
Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension p et F un $\mathbb{K}$-espace de dimension n, alors $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$

C'est une conséquence de l'isomorphisme entre $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ et $(\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n), +, \cdot)$; en effet, deux espaces isomorphes ont même dimension.

9.2.2 Produit matriciel

Définition du produit de deux matrices

Définition – *Soient n, p, q dans $\mathbb{N}^*$.*
Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \left(b_{jk}\right)_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On définit la **matrice-produit de** A **et de** B *par* $AB = (c_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq k\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

où $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}$.

Disposition pratique – Le coefficient du produit AB situé à la l'intersection de la ligne i et de la colonne k est obtenu en « multipliant » la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par la $j^{\text{ième}}$ colonne de B, c'est-à-dire $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk}$.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} * & b_{1k} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & b_{pk} & * \end{pmatrix}}^{B}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & c_{ik} & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}}_{AB}$$

Le produit AB de la matrice A par la matrice B, **dans cet ordre**, n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple

Ainsi, ci-dessous, le coefficient de AB situé à la première ligne et à la deuxième colonne est obtenu en multipliant la première ligne de A par la deuxième colonne de B.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}^{B}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & 22 \\ 8 & 9 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}}_{AB}$$

Propriété – Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $I_n M = M$ et $MI_p = M$.

Image d'un vecteur par une application linéaire

Proposition – *Soient* n, p *dans* $\mathbb{N}^*$. E, $\mathbb{K}$*-espace de dimension* p, *de base* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ *et* F, $\mathbb{K}$*-espace de dimension* n, *de base* $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $x \in E$, *alors* $\boxed{X' = AX}$, *en notant :*

- A *la matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$,
- X *la matrice colonne de* x *dans la base* $\mathcal{B}$,
- X' *la matrice colonne de* $f(x)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$.

Démonstration

x, vecteur de E, s'écrit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ où $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

En utilisant les formules trouvées en **9.1.2**, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$x'_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \quad (*)$

Or $(*)$ traduit le produit matriciel $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire $X' = AX$. ■

Exemple 1

Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $j \in [\![1, p]\!]$.

Notons $E_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ la matrice-colonne qui a tous ses coefficients nuls, sauf le $j^{\text{ème}}$ qui vaut 1. Alors $AE_j = C_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Ceci traduit que l'image par l'application linéaire canoniquement associée à A du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique a ses coordonnées dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Exemple 2

On donne l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. L'image du vecteur $(1, 1, 2)$ se calcule à l'aide du produit matriciel :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

On conclut que : $f(1, 1, 2) = (9, 3, 8)$.

Correspondance entre produit de matrices et composée d'application linéaires

Théorème – Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Soient f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G. On a alors :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(gof) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

9.2.3 Transposition

Définition – *Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$ et* $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La **transposée de la matrice** *A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ égale à* $\left(a_{ji}\right)_{\substack{1\leq j\leq p\\ 1\leq i\leq n}}$.

Elle est notée ${}^tA$.

On obtient ${}^tA$ à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes. Si A n'est pas carrée, A et sa transposée ${}^tA$ ne sont pas de même format.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition

L'application $\left|\begin{array}{c} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A \mapsto {}^tA \end{array}\right.$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

En particulier,

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\quad \forall (A,B) \in \left[\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right]^2, {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ *et* ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A$

Définition – *Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et* $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *La matrice A est* **symétrique** *si et seulement si ${}^tA = A$.*
- *La matrice A est* **antisymétrique** *si et seulement si ${}^tA = -A$*

Notation

- L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- A est symétrique si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ji} = a_{ij}$.

Une matrice symétrique a ses coefficients symétriques par rapport à la diagonale. Elle est de la forme : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

- A est antisymétrique si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ji} = -a_{ij}$.

En particulier, $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} = 0$

Une matrice symétrique a ses coefficients symétriques par rapport à la diagonale qui sont opposés. Elle est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

9.3 Rang d'une matrice

9.3.1 Définition

Définition – *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; on appelle* **rang de la matrice** *A le rang de l'application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A.*

$$rg(A) = rg(f)$$

9.3.2 Propriétés

Proposition – *Si deux matrices représentent la même application linéaire dans des bases éventuellement différentes, leur rang est le même.*
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), rg(A) = rg({}^tA)$.

Proposition – *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $C_1, \cdots, C_p$ les colonnes de A et $L_1, \cdots, L_n$ les lignes de A.*

1. *Le rang de la matrice A est aussi le rang de la famille des colonnes de A, considérées comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, et de la famille des lignes de A, considérées comme des vecteurs de $\mathbb{K}^p$.*
2. *$rg(A) = p \Leftrightarrow \left(C_1, \cdots, C_p\right)$ est une famille libre. Alors $p \leq n$.*
 $rg(A) = n \Leftrightarrow \left(C_1, \cdots, C_p\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. Alors $p \geq n$.
 $rg(A) = n = p \Leftrightarrow \left(C_1, \cdots, C_p\right)$ est une base de $\mathbb{K}^p = \mathbb{K}^n$.

Démonstration

En adoptant les mêmes notations, $C_1, \cdots, C_p$ étant les matrices-colonnes des images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$,

1. $rg(A) = rg(f) = \dim(Imf) = \dim\left(Vect\left(C_1, \cdots, C_p\right)\right) = rg\left(C_1, \cdots, C_p\right)$
 De plus, $rg(A) = rg({}^tA) = rg(L_1, \cdots, L_n)$ puisque $L_1, \cdots, L_n$ sont les colonnes de ${}^tA$.
2. $rg(A) = p$ si le sous-espace F engendré par $C_1, \cdots, C_p$ est de dimension p. Ceci revient à dire que $\left(C_1, \cdots, C_p\right)$ qui est génératrice de F est aussi une base de F, c'est-à-dire qu'elle est libre.
 $rg(A) = n \Leftrightarrow \dim\left(vect\left(C_1, \cdots, C_p\right)\right) = n \Leftrightarrow \left(C_1, \cdots, C_p\right)$ engendre $\mathbb{K}^n$.
 Le dernier énoncé résulte de ces deux résultats. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

9.3.3 Détermination pratique du rang

Remarque – Une matrice échelonnée est de rang r si et seulement si elle possède « r marches » dans sa diagonale.

Proposition et Définition – *Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$. Le rang des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui sont de l'une des deux formes suivantes est r.*

$$A_r = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ * & \ddots & \alpha_r & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & * & \vdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } B_r = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \ddots & \alpha_r & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

*$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ désignent des éléments **tous non nuls** de $\mathbb{K}$; les $*$ désignent des éléments quelconques de $\mathbb{K}$.*

*On dit que A_r et B_r sont des matrices **échelonnées de rang** r.*

Démonstration

Considérons les r premières colonnes de A_r : $C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ * \\ \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$ $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ * \\ \vdots \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\ldots C_r = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \alpha_r \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_k = 0$ s'écrit comme un système homogène dont les r premières lignes sont

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda_1 = 0 \\ \cdots \quad +\alpha_2\lambda_2 = 0 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \cdots \qquad\quad \cdots + \alpha_r\lambda_r = 0 \end{cases}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ étant tous non nuls, ce système a pour seule solution $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) = (0, \cdots, 0)$. Ceci prouve que la famille $(C_1, C_2, \cdots, C_r)$est libre donc de rang r.

B_r est la transposée d'une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ du type de A_r, donc a même rang r que A_r. ■

Définition et Proposition – Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ est **échelonnée** si et seulement si on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \alpha_r \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ **tous non nuls**.

Une famille échelonnée est libre.

La liberté d'une famille échelonnée est une conséquence directe de la preuve de la proposition ci-dessus.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,2,3),(0,2,5),(0,0,4))$ est échelonnée, donc libre. De plus, comme elle comporte trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, espace de dimension trois, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2

Soit $P_1 = 3 + X + 2X^2$, $P_2 = X + 2X^3$, $P_2 = 5X^2 - X^3$.

Dans la base $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3) a pour matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Elle est échelonnée, donc libre.

Méthode 1 Détermination pratique du rang

Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les colonnes.

Le rang d'une matrice étant égal à celui de sa transposée, le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes.

1. Pour trouver le **rang d'une matrice**, on effectue des opérations élémentaires sur **ses lignes et ses colonnes** afin de se ramener à une matrice échelonnée. Le rang est alors donné par le nombre de « marches », c'est-à-dire le rang de la matrice échelonnée obtenue.
2. On détermine le **rang d'une famille de vecteurs** d'un espace E de dimension finie en déterminant celui de sa matrice dans une base de E.
3. On détermine le **rang d'une application linéaire** entre deux espaces de dimensions finies en déterminant celui de sa matrice.

Remarque – De cette façon, on se ramène à déterminer le rang d'une matrice.

Exemple d'application

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution

$$\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$

T est une matrice échelonnée « à 3 marches », donc $rg(T) = 3$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

T est obtenue à partir de A par opérations élémentaires sur les colonnes, donc A et T ont même rang, donc $rg\,(A) = 3$.

9.4 Matrices carrées

9.4.1 Ensemble des matrices carrées d'ordre n

Proposition – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2. De plus, le produit matriciel est une opération interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Si $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$,

1. La multiplication des matrices n'est pas commutative dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il y a des « diviseurs de zéro », c'est-à-dire qu'on peut trouver A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toutes deux non nulles, telles que $AB = 0$.

L'exemple suivant montre ces deux énoncés :
$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$ est différent de $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et ce dernier produit est nul alors qu'aucune des deux matrices n'est nulle.

Définition – Puissances successives d'une matrice carrée

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; soit k un entier naturel.
On définit $A^0 = I_n$, où I_n désigne la matrice-unité d'ordre n.
Si $k \in \mathbb{N}^*$, si on suppose A^{k-1} définie, $A^k = A \times A^{k-1}$.

Exemple

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

$$J^2 = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = 3J.$$

Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 3^{n-1}J$.
Pour $n = 1$, $J^1 = 3^{1-1}J = J$.
Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}^*$, on ait : $J^n = 3^{n-1}J$.
Alors $J^{n+1} = 3^{n-1}J^2 = 3^{n-1} \times 3J = 3^nJ$.
On a donc montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = 3^{n-1}J$.

Théorème – Formule du binôme (de Newton).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\boldsymbol{AB = BA}$.

Alors pour tout $\boldsymbol{p \in \mathbb{N}}$, $\boldsymbol{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k}}$.

Exemple

On cherche à calculer les puissances successives de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solution

Écrivons $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = 3I_3 + N$

Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. D'où $\forall k \geq 3, N^k = 0$.

$NI_3 = N = I_3N$; on peut donc appliquer la formule du binôme :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p = (3I_3 + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k (3I_3)^{p-k}$$

$$A^p = (3I_3)^p + \binom{p}{1}(3I_3)^{p-1} \times N + \binom{p}{2}(3I_3)^{p-2} \times N^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{p} \binom{p}{k} \underbrace{N^k}_{=0} (3I_3)^{p-k}}_{=0}$$

Or I_3 est neutre pour le produit des matrices.

D'où $A^p = 3^p I_3 + p3^{p-1}N + \dfrac{p(p-1)}{2}3^{p-2}N^2$.

$$A^p = \begin{pmatrix} 3^p & 0 & 0 \\ 0 & 3^p & 0 \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p3^{p-1} & 2p3^{p-1} \\ 0 & 0 & p3^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{p(p-1)}{2}3^{p-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^p = \begin{pmatrix} 3^p & p3^{p-1} & \dfrac{(p+11)}{2}p3^{p-2} \\ 0 & 3^p & p3^{p-1} \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix}$$

9.4.2 Définition d'une matrice carrée inversible

Définition – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est* **inversible** *si et seulement si* $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AB = BA = I_n$.

Si une telle matrice B existe, elle est unique, on l'appelle **inverse** *de A. Elle est notée A^{-1}.*

Notation – Si $n \in \mathbb{N}^*$, $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Si une matrice carrée A vérifie $A^3 + 2A + I_n = 0$, on en déduit que :
$A\left(-A^2 - 2I_n\right) = I_n = \left(-A^2 - 2I_n\right)A$
Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = -A^2 - 2I_n$

Proposition – *Soient A, B dans $GL_n(\mathbb{K})$; alors*

1. *AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.*
3. *A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*

9.4.3 Correspondance entre matrices inversibles et isomorphismes

Théorème – Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et f une application linéaire de E dans F, de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a alors :
f est bijective $\Leftrightarrow$ A est inversible $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$.
Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = A^{-1} = \left[Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right]^{-1}$

9.4.4 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée.

Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Proposition – *Soient a, b, c, d dans $\mathbb{K}$.*
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\,I_n$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\,I_n$$

***Premier cas* :** $ad - bc \neq 0$
Posons $B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
On a alors : $AB = BA = I_n$ Donc A est inversible et $A^{-1} = B$.
***Deuxième cas* :** $ad - bc = 0$.
Si $a = b = c = d = 0$, alors A est la matrice nulle, qui n'est pas inversible.

Si l'un des coefficients de A est non nul, par exemple $a \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et si l'on considère l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ de matrice A dans la base canonique, il est non injectif, donc non bijectif ; on procède de façon analogue si c'est un autre coefficient que a qui est non nul. D'après **9.3.2**, A n'est donc pas inversible.

En procédant par disjonction des cas, on a montré que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ ■

Calcul de l'inverse d'une matrice carrée dans le cas général

Nous allons utiliser la correspondance entre matrices carrées d'ordre n et endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ pour en déduire une méthode de calcul de l'inverse.

Méthode 2 Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution d'un système

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

f est bijective si et seulement si A est inversible, c'est-à-dire de rang n

si et seulement si pour tout $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ possède une unique solution.

Les coefficients de A^{-1} sont donnés par $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Exemple d'application

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = a \\ -y + 2z = b \\ 2x + z = c \end{cases}$$

Utilisons la méthode du pivot :

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \quad \begin{cases} -x + 2y + z = a \\ -y + 2z = b \\ 4y + 3z = 2a + c \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \begin{cases} -x + 2y + z = a \\ -y + 2z = b \\ 11z = 2a + 4b + c \end{cases}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

La matrice du système obtenu est échelonnée de rang 3, donc A est inversible. En résolvant le système de proche en proche, on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{11}(-a - 2b + 5c) \\ y = \dfrac{1}{11}(4a - 3b + 2c) \\ z = \dfrac{1}{11}(2a + 4b + c) \end{cases}$$

Ceci s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On en déduit que $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode du pivot de Gauss

Méthode – On effectue, simultanément sur la matrice A et sur la matrice-unité, des opérations élémentaires du pivot de Gauss, soit sur les lignes, soit sur les colonnes, mais **on ne mélange pas** opérations sur les lignes et opérations sur les colonnes. De cette façon, on transforme A en I_n, et I_n en A.

Exemple 1

Reprenons la même matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A cette étape, on conclut que la matrice A est de rang 3, donc inversible, et on poursuit le calcul de A^{-1} en mettant d'abord des 1 sur sa diagonale :

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3/11 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{2}{11} & \dfrac{4}{11} & \dfrac{1}{11} \end{pmatrix}$$

A présent, « creusons la matrice par le haut » :

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-1}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

On conclut que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2

Calculons à présent l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{9}L_1$$

B est de rang 3, donc inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-10}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

On conclut que $B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Méthode 3 Méthode du pivot - Bilan

La méthode du pivot s'utilise pour :

1. Résoudre un système linéaire.
 On a le droit d'utiliser seulement des opérations sur les **lignes.**
2. Déterminer le rang d'une matrice.
 On a le droit d'utiliser à la fois des opérations sur **les lignes et les colonnes.**
3. Déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
 On a le droit d'utiliser à la fois des opérations sur **les lignes et les colonnes.**
4. Calculer l'inverse d'une matrice carrée.
 On a le droit d'utiliser des opérations **soit sur les lignes, soit sur les colonnes, mais pas les deux à la fois.**
5. Extraire une base d'une famille génératrice.
 Les opérations sur les colonnes respectent le sous-espace engendré par la famille de vecteurs.
 On a le droit d'utiliser seulement des opérations sur **les colonnes.**

9.4.5 Cas particulier des matrices diagonales et triangulaires

Définition – *Parmi les matrices carrées, on définit en particulier :*

- *Les matrices* ***triangulaires supérieures*** *: si $i > j$, alors $a_{ij} = 0$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.

- *Les matrices* ***triangulaires inférieures*** *: si $i < j$, alors $a_{ij} = 0$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{T}_n^i(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n.

- *Les matrices* ***diagonales*** : *si* $i \neq j$, *alors* $a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.*

- *Les matrices* ***scalaires***, *qui sont diagonales de la forme* λI_n, *où* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition – $\mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^i(\mathbb{K})$, *sont des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, stables par le produit matriciel.*
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

En effet, pour ce dernier point, elle est alors de rang n, c'est-à-dire inversible.

Proposition – *Le produit de deux matrices diagonales d'ordre n est encore une matrice diagonale.*
Plus précisément, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n$ *sont dans* $\mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 \ (0) & \\ & (0) \ \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 \ (0) & \\ & (0) \ \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \lambda_2\mu_2 \ (0) & \\ & (0) \ \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel stable par le produit matriciel.*

La matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 \ (0) & \\ & (0) \ \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *sont* ***tous non nuls***. *Dans ce cas,* $D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \lambda_2^{-1} \ (0) & \\ & (0) \ \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$

9.5 Changement de base

9.5.1 Matrice de passage

Définition – Matrice de passage

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *et* $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \cdots, e'_n\right)$ *deux bases de* E.

On appelle **matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **à** $\mathcal{B}'$ *la matrice de la famille* $\mathcal{B}'$ *dans la base* $\mathcal{B}$, *égale à* $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Si $\forall i \in [\![1,n]\!], e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & \cdots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$

En appelant $\mathcal{B}$ l'« ancienne » base et $\mathcal{B}'$ la « nouvelle » base, on place dans les colonnes de P les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base.

Proposition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.*
P, matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, est inversible.
De plus, son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Démonstration
P est la matrice de l'endomorphisme f de E qui transforme la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$, qui est par conséquent bijectif, et a une matrice inversible.

Son automorphisme réciproque f^{-1} transforme $\mathcal{B}'$ en $\mathcal{B}$, donc sa matrice P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. ■

9.5.2 Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E, x un vecteur de E.*
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *[resp.* $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ *] la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ [resp. $\mathcal{B}'$]. On a alors :*
$X = PX'$, où P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Démonstration
$\forall i \in [\![1,n]\!], e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \quad P = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x'_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x'_i \right) e_j.$$

Comme par ailleurs, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, on peut déduire des deux expressions de x que, par unicité des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$, $\forall j \in [\![1,n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x'_i$; ceci traduit le produit matriciel : $X = PX'$. ■

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la famille $\mathcal{B}' = \left(e'_1, e'_2, e'_3\right)$ définie par $\begin{cases} e'_1 = e_1 + 5e_3 \\ e'_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \\ e'_3 = 3e_2 - e_3 \end{cases}$

Montrons que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrivons x, y, z, coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées x', y', z' de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Solution

La matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Etudions le rang de P :

$$rg\,(P) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = 3$$

Donc la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (cf 9.3.2)

La formule de changement de base s'écrit : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

c'est-à-dire $\begin{cases} x = x' - y' \\ y = 2y' + 3z' \\ z = 5x' + y' - z' \end{cases}$

9.5.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Proposition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \cdots, e'_n\right)$ deux bases de E, f un endomorphisme de E.*
Si A et A' désignent les matrices de f dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a alors :
$A' = P^{-1}AP$, où P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Démonstration

Soit x un vecteur de E. Notons

- X la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$,
- X' la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$,
- Y la matrice-colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$,
- Y' la matrice-colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$'.

D'après le paragraphe « Image d'un vecteur par une application linéaire », on a :
$Y = AX$ et $Y' = A'X'$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

D'après la formule de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur ,
$X = PX'$ et $Y = PY'$.

$$Y = AX \Leftrightarrow PY' = APX' \Leftrightarrow P^{-1}PY' = P^{-1}APX'$$

Comme $P^{-1}P = I_n$, on obtient : $Y' = P^{-1}APX'$. On a vu que $Y' = A'X'$.
Donc $A'X' = P^{-1}APX'$ quel que soit X', on en déduit que $A' = P^{-1}AP$.
f a donc pour matrice $A' = P^{-1}AP$ dans la base $\mathcal{B}'$. ■

Exemple (suite)

Soit f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base $\mathcal{B}$ égale à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ecrivons la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Solution

Pour utiliser la formule de changement de base, on a besoin des coefficients de P^{-1}.
Calculons-les en résolvant un système : (cf méthode 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 3 & b \\ 5 & 1 & -1 & c \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 3 & b \\ 0 & 6 & -1 & c - 5a \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & -10 & -5a - 3b + c \end{array}\right)$$

Revenons au système :

$$\begin{cases} x = a + y \\ y = \dfrac{1}{2}(b - 3z) \\ z = \dfrac{1}{10}(5a + 3b - c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5a + b + 3c}{20} \\ y = \dfrac{-15a + b + 3c}{20} \\ z = \dfrac{1}{10}(5a + 3b - c) \end{cases}$$

On en déduit que $P^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -15 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

$$A' = P^{-1}AP = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -15 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & 9 & -6 \\ -15 & -11 & 14 \\ 10 & 14 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -25 & 7 & 33 \\ 55 & 7 & -47 \\ 30 & 22 & 38 \end{pmatrix}$$

9.5.4 Matrices semblables

Définition – *Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
On dit que A et B sont **semblables** *si et seulement si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / B = P^{-1}AP$*

Proposition – *Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
Deux matrices semblables ont même rang.

Démonstration
A et B sont semblables si et seulement si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / B = P^{-1}AP$.
A est la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$. P, matrice inversible, est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ formée par les colonnes de P. D'après la formule de changement de base, B est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Donc A et B représentent le même endomorphisme f. Elles ont donc même rang, celui de f. ■

9.6 Retour sur les systèmes linéaires

Nous avons déjà introduit la notion de système linéaire dans le chapitre **5** et décrit sa résolution par la méthode du pivot de Gauss.

9.6.1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Rappel – Soient n et p dans $\mathbb{N}*$; un système linéaire de n équations à p inconnues est un système (S) de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$ où pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $b_j \in \mathbb{K}$.

Interprétation matricielle – Avec ces notations,

Si on pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors : $(S) \Leftrightarrow AX = B$

A est appelée **matrice du système** (S).
Le système homogène associé à (S) s'écrit sous forme matricielle : $AX = 0$.

9.6.2 Système de Cramer

Définition – *On dit qu'un système linéaire est de* **Cramer** *si et seulement si sa matrice est carrée et inversible.*

Proposition – *Un système de Cramer possède une solution unique.*

Démonstration
Un système (S) de Cramer s'écrit sous forme matricielle : $AX = B$ avec A matrice inversible.

$$(S) \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

(S) admet donc une unique solution. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

9.6.3 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème – Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; on note f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A.

- L'ensemble des solutions du système homogène (H) qui s'écrit $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, égal à $\text{Ker}\, f$.
 De plus, si $p > n$, il est de dimension ≥ 1.
- L'ensemble des solutions du système (S) qui s'écrit $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = B$ est $\left\{X_{(H)} + X_0 \,\middle|\, X_{(H)} \in \text{Ker}\, f\right\}$, où X_0 est une solution particulière de (S).

Démonstration

- $(H) \Leftrightarrow f\left(x_1, \cdots, x_p\right) = \underbrace{(0, \cdots, 0)}_{n\ fois\ ''0''} \Leftrightarrow \left(x_1, \cdots, x_p\right) \in \text{Ker}\, f$
 L'ensemble des solutions de (H) est donc $\text{Ker}\, f$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
 De plus, si $p > n$, alors d'après la formule du rang,
 $\dim(\text{Ker}\, f) = \dim(\mathbb{K}^p) - \dim(Imf)$.
 Or $Imf \subset \mathbb{K}^n$, donc $\dim(Imf) \leq n$, donc $\dim(\text{Ker}\, f) \geq p - n \geq 1$.
- Soit X_0 une solution particulière de (S), elle vérifie $AX_0 = B$.
 $(S) \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0$ est solution de (H).
 Ainsi, X solution de $(S) \Leftrightarrow X - X_0 \in \text{Ker}\, f \Leftrightarrow \exists X_{(H)} \in \text{Ker}\, f / X = X_{(H)} + X_0$.
 L'ensemble des solutions de (S) est donc $\left\{X_{(H)} + X_0 \,\middle|\, X_{(H)} \in \text{Ker}\, f\right\}$. ■

Remarque – Lorsque $p > n$, $\dim(\text{Ker}\, f) = p - rg(A) > 0$. La solution générale du système (S) s'exprime à l'aide d'un vecteur de $\text{Ker}\, f$, qui est combinaison linéaire de $p - rg(A)$ vecteurs. La solution dépend donc de $p - rg(A)$ inconnues secondaires. Le système a une infinité de solutions.

Synthèse

Savoirs

- Matrice d'une application linéaire dans des bases de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée : savoir l'écrire, l'interpréter (lignes, colonnes), l'utiliser pour calculer l'image d'un vecteur.
- Formules théoriques pour le produit matriciel.
- Formules de changement de bases pour les coordonnées d'un vecteur, pour la matrice d'une application linéaire.

Savoir-faire

- Savoir calculer un produit de matrices.
- Détermination du rang d'une matrice.
- Calcul de l'inverse d'une matrice carrée.
- Résolution d'un système linéaire.

Mots-clés

- Inverse.
- Rang.
- Matrices semblables.
- Matrice de passage entre deux bases.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

9.1 Est-il exact que : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$?

9.2 On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer ${}^tP$, P^2, P^{-1}, ${}^tP\,P$, $rg\,(P)$.

9.3 On donne un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ par l'image des vecteurs d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$:

$\begin{cases} f(e_1) = 6e_1 + 7e_2 \\ f(e_2) = e_2 - 2e_1 \end{cases}$

Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

9.4 Donner une application linéaire f de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.5 Vrai ou faux ?

Soit f, endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Les énoncés suivants sont-ils vrais ?

1) $e_1 \in \text{Ker}\, f$.

2) $f(e_2) = e_2$.

3) $rg\,(f) = 2$.

4) f est bijectif.

5) L'expression analytique de f dans la base (e_1, e_2) est $\begin{cases} x' = y \\ y' = y \end{cases}$.

6) f est un projecteur.

9.6 Vrai ou faux ?

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) A est la matrice d'un projecteur ?

2) A est la matrice d'une symétrie ?

3) $rg\,(A) = 1$

4) A est inversible.

5) A est symétrique.

6) A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.7 Vrai ou faux ?

On considère le système suivant d'inconnues x, y où λ est un paramètre réel. $\begin{cases} \lambda x \quad\quad + y = 2 \\ x \;\; + (\lambda + 1)\, y = 0 \end{cases}$

On se propose de lui appliquer la méthode du pivot.

1) $L_2 \leftarrow \lambda L_2 - L_1$ transforme le système en un système équivalent.

2) $L_2 \leftarrow L_2 - (\lambda + 1)\, L_1$ transforme le système en un système équivalent.

3) On a le droit d'utiliser des opérations sur les colonnes pour résoudre le système.

4) Le système est de Cramer si et seulement si $\lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0$.

5) Lorsque $\lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0$, le système a une unique solution égale à $\dfrac{2}{\lambda^2 + \lambda - 1}\,(\lambda + 1, -1)$.

9.8 **1)** La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Si c'est le cas, calculer son inverse.

2) Quel est son rang ?

3) Que peut-on dire de la famille $((1, 3), (2, 1))$ de $\mathbb{R}^2$?

9.9 Quel est la caractéristique commune des deux familles suivantes dans chacun des espaces vectoriels indiqués ? Dans chaque cas, que peut-on en déduire ?

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $((1, 3), (0, \pi))$?

2) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, $\left(X^3, X^2 + 5X + 6, 3X\right)$?

9.10 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1) A est-elle de rang 3 ? d'ordre 3 ? inversible ?

2) Calculer AX dans les cas suivants :

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9.11 Ecrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}' = ((1, -2)\,(2, 1))$ et la relation entre (x, y), coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}$ et (x', y'), coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}'$.

Exercices d'application

■ Calculs matriciels

9.12

1) On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice J telle que $A = I + J$, puis calculer J^2, J^3 et J^n pour tout entier $n \geq 3$.

2) Pour $n \geq 2$, calculer A^n à l'aide de I, J, J^2 ; en déduire l'expression sous forme de tableau de la matrice A^n.

3) Développer le produit $(I + J)\left(I - J + J^2\right)$.

En déduire que A est inversible et préciser A^{-1} en fonction de I et J.

Vérifier que l'égalité de la question 2 reste valable pour $n = -1$.

9.13

On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$

Montrer que Eest un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

2) Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Puis en utilisant la formule du binôme, calculer $(M_{a,b})^n$pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$; A_n, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est définie par son terme général $a_{kh} = \omega_n^{kh}$. On désigne par $\overline{A_n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $\overline{a_{kh}}$.

1) Déterminer $A_1, A_2, A_1\overline{A_1}, A_2\overline{A_2}, A_3\overline{A_3},$.

2) Pour tout $n \geq 2$, calculer $A_n\overline{A_n}, (A_n)^2$.

9.15

Indiquer si les matrices suivantes sont inversibles, et lorsque c'est le cas, calculer leurs inverses.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

■ Lien entre matrices et applications linéaires

9.16

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(X) = AX + XA$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Quelle est sa matrice M dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à savoir $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$?

3) Déterminer Ker f et Imf.

4) Déterminer les antécédents par f de la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9.17 D'après Edhec 99

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On note θ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les quatre assertions suivantes :

(A) $u^2 = -Id$

(B) $v \neq Id$

(C) $(v - Id)^2 = \theta$

(D) Ker $(u + v - Id) \neq \{(0, 0)\}$

1) Vérifier que les endomorphismes u et v dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement

$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont solutions du problème posé.

On revient au cas général et on considère une solution (u, v) *du problème.*

2) Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et Id.

3) Pour tout entier naturel n, exprimer v^n comme combinaison linéaire de v et de Id.

4) Établir que : $Im(v - Id) \subset$ Ker $(v - Id)$ En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que $Im(v - Id) =$ Ker $(v - Id)$

5) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que :
dim (Ker $(u + v - Id)) = 1$.

6) Soit (e_2) une base de Ker $(u + v - Id)$; on pose :
$e_1 = -u(e_2)$.
Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$; donner les matrices de u et v dans cette base.

7) Donner la conclusion de cet exercice.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

9.18 D'après Edhec 2003

P désignant un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on rappelle que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots a_n A^n$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On admet que si P et Q sont 2 polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $(PQ)(A) = P(A)\,Q(A)$.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et par la relation , valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$Y_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

1) a) Ecrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = AY_n$.

b) Vérifier que $(A - I)^2 (A - 2I) = 0$.

2) On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = (X-1)^2 (X-2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, tel que : $X^n = PQ_n + R_n$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n, c_n tels que : $R_n(X) = a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2$.

c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1,\ \ b_n = n,\ c_n = 2^n - n - 1$

3) a) Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de $I, A - I, (A - I)^2$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n.

4) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) En déduire, pour tout tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

9.19 Adapté d'Ecricome 2008

Dans $\mathbb{R}^3$, on se place dans la base canonique B ; on considère le vecteur $\vec{u} = (a, b, c)$ où $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, Δ la droite vectorielle de base $\vec{u}$ et $\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| ax + by + cz = 0\right\}$.

1) Vérifier que $\mathcal{P}$ et Δ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) On note p la projection sur Δ de direction $\mathcal{P}$ et q la projection sur $\mathcal{P}$ de direction Δ.

Que vaut $p + q$?

3) Déterminer les matrices P et Q de p et q dans la base B.

4) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base B.

a) Montrer que $M^2 = -Q$.

b) Calculer $f\left(\vec{u}\right)$. En déduire que $rg(f) \leq 2$.

c) Montrer que $\text{Ker}(f) = \mathcal{D}$ et que $Im(f) = \mathcal{P}$.

d) Déduire de la question précédente la valeur de fof.

5) Montrer que $f^3 + f = 0$.

9.20

1) E désigne l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{2x}.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ où pour $i \in [\![0, 2]\!], f_i : x \mapsto x^i e^{2x}$.

Quelle est la dimension de E ?

2) Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E. Ecrire sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto \left(a + bx + cx^2\right) e^{2x}$ un élément de E. Montrer qu'on peut trouver trois réels a_n, b_n, c_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \left(a_n + b_n x + c_n x^2\right) e^{2x}.$$

4) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ en fonction de A et de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n en fonction de a, b, c.

■ Espaces de matrices

9.21

1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, ensemble des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Quelle est leur dimension ?

3) Déterminer l'expression de la projection p sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Exercice d'approfondissement

▬▬▬
9.22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *trace* d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le réel $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1) Montrer que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la dimension de son noyau.

On considère dans la suite de l'exercice φ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(X) = X - tr(X) \cdot A$, où A désigne une matrice fixée non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que φ n'est pas injectif si et seulement si $tr(A) = 1$.

3) Lorsque $tr(A) = 1$, calculer $tr(\varphi(X))$.

4) Lorsque $tr(A) = 1$, montrer que φ est un projecteur. On déterminera par rapport à quels espaces.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

9.1 Ce n'est pas si simple ! Les coefficients du produit de deux matrices ne sont pas les produits des coefficients ! Voyez en **9.2.2** comment on effectue le produit de deux matrices.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$$

9.2

$${}^tP=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\quad P^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

On remarque que $P^2 = P\cdot P = I_2$, donc P est inversible et $P^{-1} = P = \begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$.

$$P\,{}^tP=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}.$$

P étant inversible, le rang de P est égal à 2.

9.3 On obtient la matrice de f en plaçant dans les colonnes de la matrice les coordonnées des images des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$Mat_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}6&-2\\7&1\end{pmatrix}.$$

9.4 Considérons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant.

$$\begin{cases}f(e_1)=2e'_1-e'_2\\f(e_2)=3e'_1+e'_2\\f(e_3)=2e'_2\end{cases}$$

Nous avons vu que cela définit une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, puisqu'on fixe les images des vecteurs de la base de départ.

9.5

1) VRAI : On trouve dans la première colonne de C l'image de e_1, soit $f(e_1) = 0e_1 + 0e_2 = (0,0)$, donc $e_1 \in \text{Ker}\, f$.

2) FAUX : On trouve dans la deuxième colonne de C l'image de e_2, soit $f(e_2) = e_1 + e_2 \neq e_2$.

3) FAUX : $rg(f) = \dim\left[Vect\left(\underbrace{f(e_1)}_{=\vec{0}}, f(e_2)\right)\right]$

$rg(f) = \dim Vect(e_1 + e_2) = 1 \neq 2$.

4) FAUX : $rg(f) = \dim(Imf) = 1 < 2$. Donc $Imf \neq \mathbb{R}^2$, donc f n'est pas surjective, donc pas non plus bijective.

5) VRAI : L'expression analytique de f dans la base (e_1, e_2) est donnée par les lignes de la matrice ; c'est bien : $\begin{cases}x'=y\\y'=y\end{cases}$.

6) VRAI : On calcule : $C^2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$; donc $C^2 = C$, donc $fof = f$. f est donc un projecteur.

9.6 Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

1) VRAI : On calcule sans difficulté : $A^2 = A$, donc $fof = f$; A est donc bien la matrice d'un projecteur .

2) FAUX : En revanche, $A^2 = A \neq I_2$, donc $fof \neq Id_{\mathbb{R}^2}$; donc A n'est pas la matrice d'une symétrie.

3) VRAI : Le rang de A est la dimension du sous-espace engendré par ses colonnes. $rg(A) = \dim Vect((1,0),(0,0))$ $rgA = \dim Vect(1,0) = 1$

4) FAUX : $rg(A) = 1 < 2$ alors que A est une matrice carrée d'ordre 2, donc A n'est pas inversible.

5) VRAI : ${}^tA = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = A$, donc A est symétrique.

6) VRAI : Considérons $\mathcal{B}' = (e_2, e_1)$. f vérifie $\begin{cases}f(e_1)=e_1\\f(e_2)=\vec{0}\end{cases}$

donc $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

Donc A et B représentent le même endomorphisme f dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Donc A est semblable à B.

9.7

1) FAUX : si $\lambda = 0$, le coefficient de la ligne qu'on remplace est nul, donc $L_2 \leftarrow \lambda L_2 - L_1$, qui devient alors $L_2 \leftarrow -L_1$, ne transforme pas le système en un système équivalent.

VRAI : si $\lambda \neq 0$, cette opération donne un système équivalent.

2) VRAI : Dans l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - (\lambda + 1)L_1$, le coefficient de la ligne qu'on remplace, L_2, est 1, donc non nul, cette opération donne un système équivalent.

3) FAUX : Dans la résolution d'un système par la méthode du pivot, on n'a droit qu'aux opérations sur les lignes.

4) VRAI : La matrice du système est $A = \begin{pmatrix}\lambda&1\\1&\lambda+1\end{pmatrix}$

Le système est Cramer si et seulement si A est inversible, c'est-à-dire $\lambda(\lambda+1) - 1 = \lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0$

5) VRAI : Lorsque $\lambda^2 + \lambda \neq 1$, le système se traduit matriciellement par $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ avec A inversible.

Son unique solution est $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

En utilisant la formule de l'inverse d'une matrice 2×2,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda^2+\lambda-1}\begin{pmatrix}\lambda+1&-1\\-1&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2+\lambda-1}\begin{pmatrix} 2(\lambda+1) \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(x,y) = \frac{2}{\lambda^2+\lambda-1}(\lambda+1,-1)$$

9.8

1) M est inversible car $ad - bc = 1 - 2 \times 3 = -5 \neq 0$.

$$M^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2) M, matrice 2×2 inversible, est de rang 2.

3) On en déduit que la famille des vecteurs colonnes de M est aussi de rang 2, c'est-à-dire que la famille $((1,3),(2,1))$ est aussi de rang 2.

9.9

Ces deux familles sont échelonnées, donc libres.

1) La première comporte 2 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, espace de dimension 2, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

2) La deuxième, n'ayant que 3 vecteurs dans $\mathbb{R}_3[X]$, espace de dimension 4, n'est pas une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

9.10

1) A est non nulle et ses colonnes sont toutes proportionnelles, donc A est de rang 1. A comporte 3 lignes et 3 colonnes, donc A est une matrice carrée d'ordre 3. Etant de rang$1 < 3$, A n'est pas inversible.

2) $AX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $AX_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6X_2$ $AX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.11

La matrice de passage de $\mathcal{B}$, base canonique, à $\mathcal{B}' = ((1,-2),(2,1))$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

La formule de changement de base est : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

c'est-à-dire $\begin{cases} x = x' + 2y' \\ y = -2x' + y' \end{cases}$

9.12

1) $A = I + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

On calcule facilement : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. D'où $\forall n \geq 3, J^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2) Soit $n \geq 2$. I et J commutent, on applique la formule du binôme, $A^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k$

$$A^n = I + nJ + \binom{n}{2}J^2 + \sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{J^k}_{=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$$

$$A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

En tenant compte des coefficients de I, J, J^2, cette formule permet de calculer ceux de A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n - \frac{n(n-1)}{2} & 1-2n & -n \\ -n + n(n-1) & 4n & 1+2n \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 2$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n \\ n(n-2) & 4n & 1+2n \end{pmatrix}$

3) $(I+J)\left(I - J + J^2\right) = I - J + J^2 + J - J^2 + \underbrace{J^3}_{=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$

$(I+J)\left(I - J + J^2\right) = I$.

I et J commutent, donc on a aussi : $\left(I - J + J^2\right)(I+J) = I$ donc A est inversible et $A^{-1} = I - J + J^2$.

Pour $n = -1$, $\frac{n(n-1)}{2} = 1$, donc la formule

$A^{-1} = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$ reste valable.

9.13

1) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, M_{a,b} = (a-b)I + bJ$.

Donc $E = \left\{(a-b)I + bJ \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$E = \left\{cI + bJ \,\middle|\, (c,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = Vect(I,J)$

Cette écriture prouve que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de famille génératrice (I,J).

De plus, I et J n'étant pas colinéaires, (I,J) est libre. Donc (I,J) est une base de E.

2) On calcule sans difficulté : $J^2 = 3J$.

Par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$J^n = 3^{n-1}J$.

$J^1 = 3^0 J$ car $3^0 = 1$.

Si on suppose que pour un $n \in \mathbb{N}^*$ on a $J^n = 3^{n-1}J$, alors $J^{n+1} = J^n \cdot J = 3^{n-1}J \cdot J = 3^{n-1}J^2 = 3^{n-1} \cdot 3J = 3^n J$. On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 3^{n-1}J$.

Calculons $(M_{a,b})^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$:

I et J commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme :

$(M_{a,b})^n = [(a-b)I + bJ]^n$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$$(M_{a,b})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((a-b)\,I)^{n-k}\,(bJ)^k$$

L'expression de $J^0 = I$ étant différente de celle de $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \geq 1$, il vient :

$$(M_{a,b})^n = (a-b)^n\,I + \frac{J}{3}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k}\,3^k b^k$$

Or d'après la formule du binôme pour les réels,

$$\underbrace{(a-b)^n}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k}\,(3b)^k = (a-b+3b)^n = (a+2b)^n$$

D'où pour $n \geq 1$,

$$(M_{a,b})^n = (a-b)^n\,I + \frac{1}{3}\left[(a+2b)^n - (a-b)^n\right] J$$

9.14

1) $A_1 = (1)$; $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$A_1\overline{A_1} = (1)$; $A_2\overline{A_2} = (A_2)^2 = 2I_2$

Notons $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, rappelons que j vérifie $j^3 = 1$, $j^2 + j + 1 = 0$ et $j^2 = \overline{j}$.

$$A_3\overline{A_3} = \begin{pmatrix} j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j^2 & j & 1 \\ j & j^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 3 & j^2+j+1 & j^2+j+1 \\ j^2+j+1 & 3 & j^2+j+1 \\ j^2+j+1 & j^2+j+1 & j^2+j+1 \end{pmatrix} = 3I_3$$

2) Notons $A_n\overline{A_n} = \left(c_{kj}\right)_{\substack{k\in[\![1,n]\!] \\ j\in[\![1,n]\!]}}$. D'après la définition du produit matriciel, $c_{kj} = \sum_{h=1}^{n} a_{kh}\overline{a_{hj}} = \sum_{h=1}^{n} \omega_n^{kh}\overline{\omega_n}^{hj}$

Or $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, donc $\omega_n^n = 1$, $\omega_n\overline{\omega_n} = 1$, et $\overline{\omega_n} = \omega_n^{-1}$.

Donc $c_{kj} = \sum_{h=1}^{n} \omega_n^{h(k-j)} = \sum_{h=1}^{n} \left(\omega_n^{k-j}\right)^h$

Comme $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $-(n-1) \leq k-j \leq n-1$

donc n divise $k-j$ si et seulement si $k = j$

Dans ce cas, $(\omega_n)^{k-j} = 1$

Premier cas : $k = j$.

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ c_{kk} = \sum_{h=1}^{n} 1 = n$$

Deuxième cas : $k \neq j$, donc $(\omega_n)^{k-j} \neq 1$.

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\neq 1$.

$$c_{kj} = \sum_{h=1}^{n} \left(\omega_n^{k-j}\right)^h = \omega_n \frac{1 - \left(\omega_n^{k-j}\right)^n}{1 - \omega_n^{k-j}}$$

$$c_{kj} = \frac{1 - \overbrace{(\omega_n^n)}^{1^{k-j}}}{1 - \omega_n^{k-j}} = 0$$

Ainsi $A_n\overline{A_n}$ est la matrice qui a des n sur la diagonale et des zéros ailleurs. Donc $A_n\overline{A_n} = nI_n$.

Calculons de façon analogue les coefficients d_{kj} de $(A_n)^2$ pour $n \geq 2$:

$$d_{kj} = \sum_{h=1}^{n} a_{kh}a_{hj} = \sum_{h=1}^{n} \omega_n^{h(k+j)} = \sum_{h=1}^{n} \left(\omega_n^{k+j}\right)^h$$

Or $2 \leq k+j \leq 2n$, donc n divise $k-j$ si et seulement si $k+j \in \{n, 2n\}$. Dans ce cas, $d_{kj} = n$, sinon $d_{kj} = 0$. On obtient :

$$(A_n)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & n & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & \ddots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n & \end{pmatrix}$$

9.15

∗ **Calcul de l'inverse de** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Voyons si A est inversible à l'aide du système d'inconnues x, y, z représenté par le tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & a-2c \\ 3 & -1 & 0 & b+c \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 0 & a+3b+c \\ 3 & -1 & 0 & b+c \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

A cette étape, le système est échelonné à trois marches, donc de rang 3, donc A est inversible. Avant de revenir au système, améliorons encore les coefficients :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 0 & a+3b+c \\ 3 & -1 & 0 & b+c \\ -2 & 0 & 1 & -b \end{array}\right)$$

Revenons au système :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{10}(a+3b+c) \\ 3x - y = b + c \\ -2x + z = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{10}(a+3b+c) \\ y = \dfrac{1}{10}(3a-b-7c) \\ z = \dfrac{1}{10}(2a-4b+2c) \end{cases}$$

On conclut que $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -7 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

∗ **Calcul de l'inverse de** $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{array}$$

A cette étape, on constate que la matrice B est de rang 3, donc inversible. On continue avec les opérations indiquées.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2/2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2/2$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

On conclut que $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

∗ **Calcul de l'inverse de** $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & -1 & a \\ 0 & 2 & 2 & 1 & b \\ 1 & -2 & -3 & -2 & c \\ 0 & 1 & 2 & 1 & d \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-d \\ 3 & -2 & 0 & -1 & a \\ 0 & 2 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-d \\ 0 & 4 & 9 & 5 & a-3c \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -b+2d \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-d \\ 0 & 0 & 9 & 5 & a-4b-3c+4d \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -b+2d \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 5L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-d \\ 0 & 0 & -1 & 0 & a+b-3c-6d \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -b+2d \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 - 3L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3a-b+10c+16d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-d \\ 0 & 0 & -1 & 0 & a+b-3c-6d \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -b+2d \end{array}\right)$$

Revenons au système :

$$\begin{cases} x - 2t = -3a - b + 10c + 16d \\ y = b - d \\ z = -a - b + 3c + 6d \\ 2z + t = -b + 2d \end{cases}$$

Qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x = a + b - 2c - 4d \\ y = b - d \\ z = -a - b + 3c + 6d \\ t = 2a + b - 6c - 10d \end{cases}$$

On conclut que $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$

9.16

1) ∗ Soient X, Y dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$\lambda \in \mathbb{R}$, $f(X + \lambda Y) = A(X + \lambda Y) + (X + \lambda Y)A$

$f(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY + XA + \lambda YA$

$f(X + \lambda Y) = (AX + XA) + \lambda(AY + YA)$

$f(X + \lambda Y) = f(X) + \lambda f(Y)$

Donc f est linéaire.

∗ De plus, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ étant stable par le produit et l'addition, si $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $f(X) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Donc f est à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

∗ On a montré que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ -x + z & -y + t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - y & -x + y \\ z - t & -z + t \end{pmatrix}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$$f(X) = \begin{pmatrix} 2x - y - z & -x + 2y - t \\ -x + 2z - t & -y - z + 2t \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $* X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Imf$ si et seulement si le système de tableau suivant est compatible

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 2 & 0 & -1 & b \\ -1 & 0 & 2 & -1 & c \\ 0 & -1 & -1 & 2 & d \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{4} L_i \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 2 & -2 & 0 & b-c \\ -1 & 0 & 2 & -1 & c \\ 0 & -1 & -1 & 2 & d \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 0 & -4 & 4 & b-c+2d \\ -1 & 0 & 2 & -1 & c \\ 0 & -1 & -1 & 2 & d \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 & c \\ 0 & -1 & -1 & 2 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 0 & -4 & 4 & b-c+2d \end{array}\right) L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 & c \\ 0 & -1 & -1 & 2 & d \\ 0 & 0 & -4 & 4 & b-c+2d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \end{array}\right)$$

Le système est compatible si et seulement si $a + b + c + d = 0$

Donc $Imf = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a + b + c + d = 0 \right\}$

$* X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \text{Ker } f$ si et seulement si (x, y, z, t) est solution du système de tableau obtenu en remplaçant le second membre par $(0, 0, 0, 0)$. La méthode du pivot reste valable et on obtient le système :

$$\begin{cases} -x + 2z - t = 0 \\ -y - z + 2t = 0 \\ -4z + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} z & z \\ z & z \end{pmatrix} | z \in \mathbb{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie l'équation de Imf, donc C possède des antécédents par f, solutions de l'équation $f(X) = C$. On reprend la dernière étape de la méthode du pivot pour Imf avec $(a, b, c, d) = (2, -2, 0, 0)$

$$\begin{cases} -x + 2z - t = 0 \\ -y - z + 2t = 0 \\ -4z + 4t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z - t \\ y = -z + 2t \\ t = z - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + \frac{1}{2} \\ y = z - 1 \\ t = z - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les antécédents de C par f sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} z + \frac{1}{2} & z - 1 \\ z & z - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ lorsque $z \in \mathbb{R}$.

9.17

1) $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

D'après la correspondance entre matrices et endomorphismes, on en déduit que $u^2 = -Id$.

$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ donc $v \neq Id$.

$$(V - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $(v - Id)^2 = \theta$.

$$U + V - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$U + V - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(u + v - Id)(j) = (0, 0)$ et $j \neq (0, 0)$, donc Ker $(u + v - Id) \neq \{(0, 0)\}$

On a montré que u et v vérifient (A),(B),(C) et (D) donc sont solutions du problème.

2) $u^2 = -Id$, donc $uo(-u) = (-u)ou = Id$. Donc u est bijectif et $u^{-1} = -u$. u est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$, donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

D'après (C), $(v - Id)^2 = \theta$, donc $v^2 - 2v + Id = \theta$.

donc $vo(-v + 2Id) = Id$ et $(-v + 2Id)ov = Id$.

Donc v est bijective et $v^{-1} = 2Id - v$.

v est un endomorphisme bijectif, donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3) Nous avons :

$v^0 = Id = 0 \times v - (-1)Id$

$v^1 = v = 1 \times v - 0 \times Id$

$v^2 = 2v - Id$

$v^3 = 2v^2 - v = 2(2v - Id) - v = 3v - 2Id$

Nous conjecturons que $v^n = nv - (n - 1)Id \quad (H_n)$.

Montrons (H_n) pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

(H_0) a été prouvé.

Supposons (H_n) vraie ; alors

$v^{n+1} = v^n ov \underset{(H_n)}{=} (nv - (n-1)\,Id)\,ov$

$v^{n+1} = nv^2 - (n-1)\,v = n(2v - Id) - (n-1)\,v$

$v^{n+1} = (n+1)\,v - nId$ donc (H_{n+1}) est vraie.

On a prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v^n = nv - (n-1)\,Id$.

Remarque – Id et $v - Id$ commutent : on aurait aussi pu appliquer la formule du binôme à $v = (v - Id) + Id$ pour calculer v^n.

4) $*$ v vérifie (C) $(v - Id)^2 = \theta$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $(v - Id)\,((v - Id)\,(x)) = (0,0)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $(v - Id)\,(x) \in \text{Ker}\ (v - Id)$

Donc $Im\ (v - Id) \subset \text{Ker}\ (v - Id)$.

$*$ Mais d'après (B), $v - Id \neq \theta$, donc $Im\ (v - Id) \neq \{(0,0)\}$, $\dim(Im\ (v - Id)) \geq 1$.

$\dim(\text{Ker}\ (v - Id)) \geq 1$

Or la formule du rang donne que

$$\underbrace{\dim(\text{Ker}\ (v - Id))}_{\geq 1} + \underbrace{\dim(Im\ (v - Id))}_{\geq 1} = 2$$

On a donc nécessairement

$\dim(Im\ (v - Id)) = 1 = \dim(\text{Ker}\ (v - Id))$

Comme de plus, $Im\ (v - Id) \subset \text{Ker}\ (v - Id)$, on en déduit que $Im\ (v - Id) = \text{Ker}\ (v - Id)$.

5) D'après (D), $\text{Ker}\ (u + v - Id)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ non réduit au vecteur nul, donc $\dim(\text{Ker}\ (u + v - Id)) \in \{1, 2\}$.

Par l'absurde, supposons que $\text{Ker}\ (u + v - Id)$ soit de dimension deux, c'est-à-dire égal à $\mathbb{R}^2$. Alors $u + v - Id = \theta$.

Donc $u = Id - v$, donc $\underbrace{u^2}_{-Id} = \underbrace{(v - Id)^2}_{\theta}$; On obtient alors que $-Id = \theta$ qui est manifestement faux. L'hypothèse est donc fausse, donc $\text{Ker}\ (u + v - Id)$ est de dimension 1.

6) $e_2 \in \text{Ker}\ (u + v - Id)$, donc $u(e_2) + v(e_2) - e_2 = (0,0)$

Donc $e_1 = -u(e_2) = (v - Id)\,(e_2)$.

Soient α, β dans $\mathbb{R}$ tels que $(\bullet)$ $\alpha e_1 + \beta e_2 = (0,0)$

d'où $\alpha\,(v - Id)\,(e_2) + \beta e_2 = (0,0)$

Appliquons $v - Id$ à cette égalité :

$$\underbrace{\alpha \underbrace{(v - Id)^2}_{\theta}(e_2)}_{(0,0)} + \beta \underbrace{(v - Id)\,(e_2)}_{e_1} = (0,0)$$

D'où $\beta e_1 = (0,0)$.

Si on avait $e_1 = (0,0)$, alors on aurait aussi $u(e_2) = (0,0)$, et u étant bijectif, $e_2 = (0,0)$, ce qui est contraire à l'hypothèse « e_2 base de $\text{Ker}\ (u + v - Id)$ »

Donc $e_1 \neq (0,0)$, on en déduit que $\beta = 0$. En reportant dans $(\bullet)$, $\alpha e_1 = 0$, d'où $\alpha = 0$.

On a montré que $(\bullet) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. La famille (e_1, e_2) est donc libre. De plus, elle comporte deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, espace de dimension deux. Donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Nous avons vu que $e_1 = -u(e_2) = (v - Id)\,(e_2)$, donc

$u(e_2) = -e_1$ et $v(e_2) = e_1 + e_2$.

$u(e_1) = -u^2(e_2) = Id(e_2) = e_2$.

$\underbrace{(v - Id)^2}_{\theta}(e_2) = (v - Id)\,(e_1)$ d'où $v(e_1) = e_1$.

On en déduit les matrices de u et v dans la base (e_1, e_2) : $Mat_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U$ et $Mat_{(e_1,e_2)}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V$.

7) On conclut que u et v vérifient les propriétés (A), (B), (C) et (D) si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle u et v ont pour matrices respectives U et V.

9.18

1) a. On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = u_{n+3} \\ u_{n+2} = u_{n+2} \\ u_{n+1} = u_{n+1} \end{cases}$$

Ce système correspond au produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ soit } AY_n = Y_{n+1} \text{ en posant}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. $A - I = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A - I)^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$(A - I)^2(A - 2I) = 0$

2) a. D'après la définition de la division euclidienne du polynôme X^n par $P(X) = (X-1)^2(X-2)$, il existe un unique couple (Q_n, R_n)de polynômes tel que

$$\begin{cases} X^n = (X-1)^2(X-2)\,Q_n(X) + R_n(X) \\ \deg(R_n) < \deg(P) \end{cases}$$

Comme P est de degré trois,

$\deg(R_n) < \deg(P) \Leftrightarrow R_n \in \mathbb{R}_2[X]$; on peut donc affirmer que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists!\,(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X] / X^n = PQ_n + R_n$

b. La famille $\left(1, X-1, (X-1)^2\right)$ est échelonnée en degrés et constituée de polynômes non nuls, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$, espace de dimension trois, donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$R_n \in \mathbb{R}_2[X]$ donc $\exists!\,(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3/$

$R_n = a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2$

c. D'après 2a et 2b, on peut écrire :

$(*) \quad X^n = (X-1)^2(X-2)Q_n + a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2$

En dérivant cette égalité, il vient :

$(\bullet)\ nX^{n-1} = (X-1)^2(X-2)Q_n' + \left[2(X-1)(X-2) + (X-1)^2\right]Q_n + b_n + 2c_n(X-1)$

En substituant 1 et 2 à X dans $(*)$ et 1 à X dans $(\bullet)$, on obtient le système suivant : $\begin{cases} 1 = a_n \\ 2^n = a_n + b_n + c_n \\ n = b_n \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = n \\ c_n = 2^n - n - 1 \end{cases}$

3) a. Substituons A à X dans l'égalité du 2a ; il vient : $A^n = P(A)Q_n(A) + R_n(A)$.

Mais d'après 1b, $P(A) = 0$, donc $A^n = R_n(A)$

D'après 2b et 2c, $A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2$

b. La troisième ligne L_3 de A^n s'obtient grâce à la même opération sur les troisièmes lignes des matrices qui interviennent dans l'égalité ci-dessus :

$L_3 = (0\ 0\ 1) + n(0\ 1\ -1) + (2^n - n - 1)(1\ -2\ \ 1)$

$L_3 = \left(2^n - n - 1 \quad -2^{n+1} + 3n + 2 \quad 2^n - 2n\right)$

4) a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

-Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $Y_0 = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

-Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors $Y_{n+1} = AY_n = AA^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. Notons L_1, L_2, L_3 les lignes de A^n. D'après 4a,

$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On en déduit que : $u_n = L_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_n = \left(2^n - n - 1 \quad -2^{n+1} + 3n + 2 \quad 2^n - 2n\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_n = 2^n - n - 1 - 2^{n+1} + 3n + 2$

$u_n = 2^n(1-2) + 2n + 1 = -2^n + 2n + 1$

9.19

1) $*$ Soit $\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}/$, alors :

$\overrightarrow{v} \in \mathcal{D}$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}/\overrightarrow{v} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$\overrightarrow{v} \in \mathcal{P}$, donc $ax + by + cz = 0$, donc

$\lambda \underbrace{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}_{=1} = 0$, donc $\lambda = 0$, donc $\overrightarrow{v} = (0, 0, 0)/$.

Ceci montre que $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} \subset \{(0, 0, 0)\}$.

L'inclusion inverse est évidente, donc (1) $\quad \mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{(0, 0, 0)\}$.

$*$ De plus, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, donc l'un des réels a, b, c n'est pas nul, donc $\overrightarrow{u} \neq (0, 0, 0)$, donc $\dim \mathcal{D} = 1$.

Puisque l'un des réels a, b, c n'est pas nul, $\mathcal{P}$ qui a pour équation : $ax + by + cz = 0$, est le noyau d'une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$, donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc $\dim(\mathcal{P}) = 2$.

Ainsi, on obtient (2) $\dim(\mathcal{D}) + \dim(\mathcal{P}) = 1 + 2 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.

De (1) et (2), on déduit que $\mathcal{P}$ et Δ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3, \exists!\left(\overrightarrow{v}_{\mathcal{P}}, \overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}\right) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{\mathcal{P}} + \overrightarrow{v_{\mathcal{D}}}$.

Par définition de p et q, $p\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v_D}$ et $q\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v}_{\mathcal{P}}$

$(p+q)\left(\overrightarrow{v}\right) = p\left(\overrightarrow{v}\right) + q\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v_{\mathcal{P}}} + \overrightarrow{v}_{\mathcal{P}} = \overrightarrow{v} = Id\left(\overrightarrow{v}\right)$

Donc $p + q = Id$.

3) Notons $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour obtenir les colonnes de P, nous allons calculer $p\left(\overrightarrow{e_i}\right)$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$:

En conservant les notations de 2, $\overrightarrow{e_1} = \underbrace{\overrightarrow{(e_1)_{\mathcal{P}}}}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\overrightarrow{(e_1)_{\mathcal{D}}}}_{\in \mathcal{D}}$

avec $\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{(e_1)_{\mathcal{D}}} = \lambda(a, b, c) \\ \overrightarrow{(e_1)_{\mathcal{P}}} = (1 - \lambda a, -\lambda b, -\lambda c) \end{cases}$

comme $\overrightarrow{(e_1)_{\mathcal{P}}} \in \mathcal{P}$, $a(1 - \lambda a) + b(-\lambda b) + c(-\lambda c) = 0$

donc $\lambda \underbrace{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}_{=1} = a$

donc $\lambda = a$. Donc $p(e_1) = \overrightarrow{(e_1)_{\mathcal{D}}} = \left(a^2, ab, ac\right)$

Vu la symétrie des rôles de a, b, c, de façon analogue,

$p\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \left(ba, b^2, bc\right)$, $p\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \left(ca, cb, c^2\right)$.

On obtient $P = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

et en utilisant 2, $Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$

4) a. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}$

En utilisant $a^2+b^2+c^2 = 1$, il vient :

$M^2 = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix} = -Q$

b. $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $f\left(\overrightarrow{u}\right) = (0,0,0)$.

Ker f contient donc le vecteur $\overrightarrow{u} \neq (0,0,0)$, donc $\dim(\text{Ker } f) \geq 1$.

Alors d'après la formule du rang,

$\dim(Imf) = 3 - \dim(\text{Ker } f) \leq 3 - 1 = 2$.

Donc $rg(f) \leq 2$.

c. Soit $\overrightarrow{w} \in \mathcal{P} = Imq$, alors $\exists \overrightarrow{t} \in \mathbb{R}^3 / \overrightarrow{w} = q\left(\overrightarrow{t}\right)$.

En utilisant 4a, $\overrightarrow{w} = -fof\left(\overrightarrow{t}\right) = f\left(-f\left(\overrightarrow{t}\right)\right)$

Donc $\overrightarrow{w} \in Imf$.

On a montré que $\forall \overrightarrow{w} \in \mathcal{P}, \overrightarrow{w} \in Im$, c'est-à-dire que $\mathcal{P} \subset Imf$. De plus, ces deux espaces ont même dimension, donc $\mathcal{P} = Imf$ et $rg(f) = 2$.

D'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker } f) = 1$.

Comme Ker f contient $Vect\left(\overrightarrow{u}\right) = \mathcal{D}$, et que ces deux espaces sont de dimension un, Ker $(f) = \mathcal{D}$.

d. p est la projection sur Δ de direction $\mathcal{P}$, donc

$\forall \overrightarrow{v} \in \mathcal{D}, fop\left(\overrightarrow{v}\right) \underset{p\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{v}}{=} f\left(\overrightarrow{v}\right) \underset{\text{Ker } f=\mathcal{D}}{=} (0,0,0)$.

$\forall \overrightarrow{v} \in \mathcal{P}, p\left(\overrightarrow{v}\right) = (0,0,0)$ donc $fop\left(\overrightarrow{v}\right) = (0,0,0)$

$\mathbb{R}^3 == \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$, donc $fop = \widetilde{0}$ (endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$).

5) En passant aux matrices dans la base $\mathcal{B}$, $MP = 0$.

Comme $P = I_3 - Q$, $M(I_3 - Q) = 0$.

Or $M^2 = -Q$, donc $M\left(I_3 + M^2\right) = 0$.

Donc $M + M^3 = 0$.

En traduisant avec les endomorphismes correspondants,

$f^3 + f = 0$.

9.20

1 $*$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a équivalence entre les énoncés suivants :

$\cdot\ f \in E$

$\cdot\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$

$\cdot\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2e^{2x} + bxe^{2x} + ce^{2x}$

$\cdot\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = af_2(x) + bf_1(x) + cf_0(x)$

$\cdot\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / f = af_2 + bf_1 + cf_0$

$\cdot\ f \in Vect(f_0, f_1, f_2)$

On en déduit que $E = Vect(f_0, f_1, f_2)$, ce qui prouve d'une part que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, d'autre part que (f_0, f_1, f_2) engendre E.

$*$ Montrons que (f_0, f_1, f_2) est libre :

Soient α, β, γ réels tels que $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha f_0(x) + \beta f_1(x) + \gamma f_2(x) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right)e^{2x} = 0$

Mais $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} \neq 0$,

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$.

La famille de polynômes $\left(1, X, X^2\right)$ étant libre (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$), on en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$*$ On conclut que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de E. La dimension de E , nombre de vecteurs d'une de ses bases est égale à 3.

2) $*$ Obtenue par opérations sur des polynômes et sur la fonction exp, toute application de E est dérivable sur $\mathbb{R}$, en d'autres termes, $E \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$*$ Notons $D_1 \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto f' \end{cases}$

$\forall (f,g) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$, donc $D_1(f + \lambda g) = D_1(f) + \lambda D_1(g)$.

Donc D_1 est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc sa restriction à E, qui est égale à D, est aussi linéaire.

$*$ Calculons à présent les images de f_0, f_1, f_2 par D :

Soit x réel,

$f_0'(x) = 2e^{2x} = 2f_0(x)$

$f_1'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = f_0(x) + 2f_1(x)$

$f_1'(x) = (f_0 + 2f_1)(x)$

$f_2'(x) = 2xe^{2x} + 2x^2xe^{2x} = 2f_1(x) + 2f_2(x)$

$f_2'(x) = (2f_1 + 2f_2)(x)$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On déduit de ces calculs que $D(f_0) = 2f_0$,

$D(f_1) = f_0 + 2f_1$ et que $D(f_2) = 2f_1 + 2f_2$.

D_1 étant linéaire et coïncidant avec D sur E,

$D_1(E) = Vect(D(f_0), D(f_1), D(f_2))$

$D_1(E) = Vect(2f_0, f_0 + 2f_1, 2f_1 + 2f_2)$

$D_1(E) \subset Vect(f_0, f_1, f_2) = E$ donc $D(E) \subset E$, donc D est à valeurs dans E.

$*$ On conclut que D, linéaire et à valeurs dans E est un endomorphisme de E.

De plus, $Mat_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \underbrace{Do \cdots oD}_{n \text{ fois}}$ est un endomorphisme de E ; pour tout $f \in E$, $D^n(f) = f^{(n)}$, donc $f^{(n)} \in E$.

Or $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de E, donc

$\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \left(a_n x^2 + b_n x + c_n\right) e^{2x}$

4) De plus, $f^{(n)} = D^n(f)$ donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$*$ Calculons A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$A = 2I_3 + N$ en notant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

De plus, I_3 et N commutent, ; appliquons la formule du binôme pour n entier ≥ 2 : $A^n = (2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_3^{n-k} N^k$

Or pour $k \geq 3$, $N^k = 0$.

Donc $A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k$

$A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2$

En passant aux coefficients,

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$*$Pour n entier≥ 2, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{cases} a_n = 2^n a + n2^{n-1} b + n(n-1)2^{n-2} c \\ b_n = 2^n b + n2^n c \\ c_n = 2^n c \end{cases}$$

9.21

1) $*$ Considérons l'application φ définie par

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = {}^tM$.

Soient M, N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$\varphi(M + \lambda N) = {}^t(M + \lambda N) = {}^tM + \lambda {}^tN$

donc $\varphi(M + \lambda N) = \varphi(M) + \lambda\varphi(N)$

donc φ est linéaire.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons Id l'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \varphi(M) = M \Leftrightarrow (\varphi - Id)(M) = 0$ Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\varphi - Id)$; en particulier, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De façon analogue, $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \varphi(M) = -M \Leftrightarrow (\varphi + Id)(M) = 0$

Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\varphi + Id)$, donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$*$ Procédons par analyse-synthèse pour montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists!\, (A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) / M = A + S$

Fixons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Unicité. Supposons qu'il existe $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = A + S \quad (L_1)$

Alors ${}^tM = {}^tA + {}^tS$, donc ${}^tM = -A + S \quad (L_2)$

$\left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)$ donne $S = \frac{M + {}^tM}{2}$

$\left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right)$ donne $A = \frac{M - {}^tM}{2}$

D'où l'unicité de (A, S).

Existence Posons $S = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \frac{M - {}^tM}{2}$,

${}^tS = {}^t\left(\frac{M + {}^tM}{2}\right) = \frac{{}^tM + {}^t({}^tM)}{2}$

${}^tS = \frac{{}^tM + M}{2} = S$, donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

${}^tA = {}^t\left(\frac{M - {}^tM}{2}\right) = \frac{{}^tM - {}^t({}^tM)}{2}$

${}^tA = \frac{{}^tM - M}{2} = -A$, donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Enfin, $A + S = \frac{M - {}^tM}{2} + \frac{M + {}^tM}{2} = M$.

Donc (A, S) convient, d'où l'existence de (A, S).

$*$ On conclut que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque – En fait, $\varphi o \varphi = Id$, donc φ est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On obtient directement que

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\varphi + Id) \oplus \text{Ker}(\varphi - Id)$, et que

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Mais les calculs de A et S servent pour la question 3.

2) $*$ Une matrice S est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle s'écrit

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En notant E_{ij} la matrice qui a tous ses coefficients nuls sauf celui placé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne,

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} a_{ij}\left(E_{ij} + E_{ji}\right)$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} a_{ij}\left(E_{ij} + E_{ji}\right)$$

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = Vect\left[(E_{ii})_{1\leq i\leq n}, \left(E_{ij} + E_{ji}\right)_{1\leq i<j\leq n}\right]$.

La famille $\left[(E_{ii})_{1\leq i\leq n}, \left(E_{ij} + E_{ji}\right)_{1\leq i<j\leq n}\right]$ est clairement libre ; elle comporte $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ matrices.

Donc c'est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3) D'après la question 1, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose suivant $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ en $M = A + S$ avec $A = \dfrac{M - {}^tM}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $S = \dfrac{M + {}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Donc $p(M) = \dfrac{M - {}^tM}{2}$.

La projection p sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $p : M \mapsto \dfrac{M - {}^tM}{2}$.

9.22

1) Soient $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $A + \lambda B = \left(a_{ij} + \lambda b_{ij}\right)$.

Donc $tr(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

Donc $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$.

Donc $A \mapsto tr(A)$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(A) \in \mathbb{R}$, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, $tr(I_n) = n \neq 0$, donc tr n'est pas la forme linéaire nulle, donc $\dim(Imtr) = 1$. D'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker}\, tr) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(Imtr)$

$\dim(\text{Ker}\, tr) = n^2 - 1$.

2) $*$ Si φ n'est pas injectif, $\text{Ker}\,\varphi \neq \{0\}$, donc$(*)$ $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\} / X - tr(X) \cdot A = 0$

Alors $tr(X - tr(X) \cdot A) = 0$

Donc $tr(X) - tr(X)\, tr(A) = 0$

Donc $tr(X)[1 - tr(A)] = 0$

Donc $tr(X) = 0$ ou $1 - tr(A) = 0$

Mais si on avait $tr(X) = 0$, comme $X = tr(X) \cdot A$, X serait nul, ce qui est contraire à $(*)$. C'est donc $tr(A) = 1$ qui est vrai.

On a montré que φ n'est pas injectif$\Rightarrow tr(A) = 1$

$*$ Réciproquement, si $tr(A) = 1$, alors $\varphi(A) = A - \underbrace{tr(A)}_{=1} \cdot A = 0$

avec A matrice non nulle. Donc $A \in \text{Ker}\,\varphi$, donc $\text{Ker}\,\varphi \neq \{0\}$ et φ n'est pas injectif.

$*$ On a montré que φ n'est pas injectif si et seulement si $tr(A) = 1$.

3) Si $tr(A) = 1$, alors $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$tr(\varphi(X)) = tr(X - tr(X) \cdot A)$

par linéarité de la trace, $tr(\varphi(X)) = tr(X) - tr(X) \underbrace{tr(A)}_{=1}$

donc $tr(\varphi(X)) = 0$.

4) $*$ Si $tr(A) = 1$, alors $\varphi(A) = A - \underbrace{tr(A)}_{=1} \cdot A = 0$

$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi o \varphi(X) = \varphi(X - tr(X) \cdot A)$

φ étant linéaire, $\varphi o \varphi(X) = \varphi(X) - tr(X) \underbrace{\varphi(A)}_{0}$

$\varphi o \varphi(X) = \varphi(X)$

Donc $\varphi o \varphi = \varphi$; φ, étant linéaire, est un projecteur.

$*$ φ est donc la projection sur $Im\varphi$ parallèlement à $\text{Ker}\,\varphi$.De plus, $X \in \text{Ker}\,\varphi \Rightarrow X = tr(X)A \Rightarrow X \in Vect(A)$

Donc $\text{Ker}\,\varphi \subset Vect(A)$.

D'après 2, $\varphi(A) = 0$, donc $Vect(A) \subset \text{Ker}\,\varphi$.

Donc $\text{Ker}\,\varphi = Vect(A)$.

Par ailleurs, d'après la formule du rang, $\dim(Im\varphi) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}\,\varphi)$

$\dim(Im\varphi) = n^2 - 1$

D'après 3, $Im\varphi \subset \text{Ker}\, tr$.

En utilisant 1, $\dim(\text{Ker}\, tr) = n^2 - 1 = \dim(Im\varphi)$, on en déduit que $Im\varphi = \text{Ker}\, tr$, c'est-à-dire que $Im\varphi$ est l'espace des matrices de trace nulle.

Ainsi φ est donc la projection sur l'espace des matrices de trace nulle parallèlement à $Vect(A)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

CHAPITRE 10

Plan

10.1 Eléments propres d'un endomorphisme 258
10.2 Endomorphismes diagonalisables 261
10.3 Réduction des matrices carrées 263
10.4 Applications de la diagonalisation 269
Synthèse 271
Tests et exercices 272
Corrigés des exercices 275

Introduction

A présent, nous avons mis en place les outils de l'algèbre linéaire et nous allons aborder le dernier chapitre, qui les utilise.

Lors de la recherche des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace de dimension finie, l'on est amené à considérer les sous-espaces stables non triviaux les plus petits, à savoir les droites vectorielles.

Prérequis

- Méthode du pivot de Gauss.
- Espaces vectoriels de dimension finie.
- Applications linéaires.
- Matrices.

Objectifs

- Définir les notions de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice.
- Apprendre à les déterminer par le calcul dans des cas simples.
- Définir les endomorphismes ou matrices diagonalisables et en voir les applications.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

10.1 Eléments propres d'un endomorphisme

10.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.*

- *Une* **valeur propre de l'endomorphisme** f est tout scalaire λ tel que $\exists x \in E / (x \neq 0_E \text{ et } f(x) = \lambda x)$.
- *Si λ est valeur propre de f, on appelle* **vecteur propre de** *f associé à la valeur propre λ tout vecteur $x \neq 0_E$ vérifiant $f(x) = \lambda x$.*
- *L'ensemble des valeurs propres de f est appelé* **spectre de** *f, noté $Sp(f)$.*

Théorème et définition – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** et f un endomorphisme de E.

On a équivalence entre les énoncés suivants :

1. λ est valeur propre de f.
2. $\text{Ker}\,(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$.
3. $(f - \lambda Id_E)$ non injective.
4. $(f - \lambda Id_E)$ non bijective.
5. $rg\,(f - \lambda Id_E) < \dim E$

Lorsque ces propriétés sont réalisées, $\text{Ker}\,(f - \lambda Id_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul, il est constitué, d'une part du vecteur nul, d'autre part des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ. C'est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace propre associé à la valeur propre** λ, noté $E_\lambda(f)$ dans ce cours.

Démonstration

(1) $\Leftrightarrow$ (2) On a équivalence entre les énoncés suivants :

λ valeur propre de f

$\exists x \in E / (x \neq 0_E \text{ et } f(x) = \lambda x)$

$\exists x \in E / (x \neq 0_E \text{ et } f(x) - \lambda Id_E(x) = 0_E)$

$\exists x \in E / (x \neq 0_E \text{ et } (f - \lambda Id_E)(x) = 0_E)$

$\exists x \in E / (x \neq 0_E \text{ et } x \in \ker(f - \lambda Id_E))$

$\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$

(2) $\Leftrightarrow$ (3) En effet, une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

Donc $\text{Ker}\,(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow (f - \lambda Id_E)$ non injective.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) Lorsque l'espace est de dimension finie, il revient au même pour un endomorphisme d'être injectif, surjectif ou bijectif. ■

Cas particulier – Si f est un endomorphisme de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on a équivalence entre les propriétés suivantes :

- 0 est valeur propre de l'endomorphisme f
- f n'est pas bijectif.
- $\text{Ker}\,(f) \neq \{0_E\}$.
- $rg\,(f) < \dim E$.

En effet, il suffit de remplacer λ par 0 dans le théorème ci-dessus.

10.1.2 Exemples

Homothéties

Dans E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel, considérons $h_\alpha = \alpha Id_E$, homothétie de rapport α.

h_α est définie par : $\forall x \in E, h_\alpha(x) = \alpha x$.

$\lambda \in Sp(h_\alpha) \Leftrightarrow \exists x \in E - \{0_E\} / h_\alpha(x) = \lambda x \Leftrightarrow \exists x \in E - \{0_E\} / \alpha x = \lambda x$

$\lambda \in Sp(h_\alpha) \Leftrightarrow \exists x \in E - \{0_E\} / (\alpha - \lambda) x = 0_E \underset{x \neq 0_E}{\Leftrightarrow} \alpha - \lambda = 0$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Ceci montre que α est la seule valeur propre de h_α ; de plus, tout vecteur non nul de E est vecteur propre de h_α pour la valeur propre α.

Le sous-espace propre de h_α associé à la valeur propre α est E.

Projecteurs

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et p la projection de E sur F de direction G. Supposons de plus que F et G ne soient *pas réduits au vecteur nul*.

Nous avons vu que :

- $F = \text{Ker}\,(p - Id_E)$ donc $\text{Ker}\,(p - 1 \times Id_E) \neq \{0_E\}$, ce qui prouve que 1 est valeur propre de p, de sous-espace propre associé F.
- $G = \text{Ker}\,(p)$ donc $\text{Ker}\,(p - 0 \times Id_E) \neq \{0_E\}$, ce qui prouve que 0 est valeur propre de p, de sous-espace propre associé G.

Symétries

Considérons les mêmes sous-espaces supplémentaires F et G de E, tous deux *non réduits au vecteur nul*, et s la symétrie de E par rapport à F de direction G. Nous avons vu que :

- $F = \text{Ker}\,(s - Id_E)$ donc $\text{Ker}\,(s - 1 \times Id_E) \neq \{0_E\}$, ce qui prouve que 1 est valeur propre de s, de sous-espace propre associé F.
- $G = \text{Ker}\,(s + Id_E)$ donc $\text{Ker}\,(p - (-1) \times Id_E) \neq \{0_E\}$, ce qui prouve que (-1) est valeur propre de s, de sous-espace propre associéG.

10.1.3 Propriétés des éléments propres

Proposition – *Soit E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.*
Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, alors $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f) = \{0_E\}$.

Démonstration

Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, soient $x \in E_\lambda(f) \cap E_\mu(f)$:

en utilisant la définition des sous-espaces propres, $f(x) = \lambda x$ et $f(x) = \mu x$, donc $\lambda x = \mu x$, donc $(\lambda - \mu)\, x = 0_E$.

Par hypothèse, $\lambda - \mu \neq 0$, donc $x = 0_E$.

On en déduit que $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f) = \{0_E\}$. ■

Remarque – Ceci signifie que deux sous-espaces propres d'un même endomorphisme associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe.

Théorème – Soit E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
Des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres toutes distinctes forment une famille libre.

Démonstration

Par récurrence sur le nombre p de valeurs propres distinctes de f.

- Si $p = 1$, soit λ valeur propre de f, et x, vecteur propre de f associé à λ.
 x étant un vecteur propre, est non nul, donc la famille (x) est libre.
- Supposons que pour un $p \in \mathbb{N}^*$, toute famille de p vecteurs propres de f associés à des valeurs propres différentes soit libre.

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p+1}$ $p+1$ valeurs propres de f deux à deux distinctes, de vecteurs propres associés respectifs $x_1, \cdots, x_{p+1}$.

Montrons que la famille $\left(x_1, \cdots, x_{p+1}\right)$ est libre :

Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1} x_{p+1} = 0_E \quad (L_1)$.

Appliquons f, linéaire, à cette égalité ; il vient :

$$\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_p f\left(x_p\right) + \alpha_{p+1} f\left(x_{p+1}\right) = 0_E.$$

Mais, pour tout $i \in [\![1, p+1]\!]$, x_i est un vecteur propre de f associé à λ_i, on a : $f(x_i) = \lambda_i x_i$, d'où : $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_p \lambda_p x_p + \alpha_{p+1} \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0_E \quad (L_2)$

Effectuons la combinaison linéaire $L_2 - \lambda_{p+1} L_1$:

$$\underbrace{\alpha_1\left(\lambda_1 - \lambda_{p+1}\right)}_{\in \mathbb{K}} x_1 + \cdots + \underbrace{\alpha_p\left(\lambda_p - \lambda_{p+1}\right)}_{\in \mathbb{K}} x_p = 0_E \quad (L_3)$$

On se ramène ainsi à une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \cdots, x_p$, qui d'après l'hypothèse de récurrence, forment une famille libre. (L_3) implique donc que $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \alpha_i\left(\lambda_i - \lambda_{p+1}\right) = 0$.

Comme $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i \neq \lambda_{p+1}$, on en déduit que $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \alpha_i = 0$.

En reportant ceci dans (L_1), il reste : $\alpha_{p+1} x_{p+1} = 0_E$.

x_{p+1} étant un vecteur propre, n'est pas nul, donc $\alpha_{p+1} = 0$.

On a donc bien montré que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1} x_{p+1} = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, p+1]\!],\ \alpha_i = 0$.

La famille $\left(x_1, \cdots, x_{p+1}\right)$ est donc libre, ce qui achève la récurrence. ■

Corollaire – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un endomorphisme d'un espace de dimension n possède au plus n valeurs propres.

Démonstration

En effet, s'il possède p valeurs propres distinctes, p vecteurs propres associés à ces valeurs propres forment une famille libre, donc $p \leq n$. ■

10.2 Endomorphismes diagonalisables

10.2.1 Définition et caractérisation

Définition – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; un endomorphisme f de E est* ***diagonalisable*** *si et seulement si il existe une base de E dans laquelle f a une matrice diagonale.*

10.2.2 Exemples

Homothéties

L'homothétie de rapport α d'un espace E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ a dans toute base de E la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \cdots & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & \cdots & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_n$ qui est diagonale.

Une homothétie est donc un endomorphisme diagonalisable.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Projecteurs

Reprenons les notations du paragraphe **10.1.2 :** p est la projection de E sur F de direction G, avec F et G *non réduits au vecteur nul.*

$E = F \oplus G$. Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases respectives de F et G, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 _ \mathcal{B}_2$ est une base de E. (cf. chapitre 8, caractérisation du **8.2.2**.)

Dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 _ \mathcal{B}_2$, p a pour matrice : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$

C'est une matrice diagonale, donc p est diagonalisable.

Symétries

Avec les mêmes notations, dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 _ \mathcal{B}_2$, la symétrie s de E par rapport à F de direction G a pour matrice : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{array}\right)$

Elle est donc diagonalisable.

10.2.3 Conditions de diagonalisabilité

Théorème – Soit E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Démonstration

f est diagonalisable si et seulement si

$\exists \mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E, $\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

si et seulement si $\exists \mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E, $\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\begin{cases} f(e_1) = \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ f(e_n) = \lambda_n e_n \end{cases}$

si et seulement si

$\exists \mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E telle que $e_1, \cdots, e_n$ soient vecteurs propres de f. ■

Attention, la réciproque est fausse !
Ainsi, une homothétie d'un espace de dimension $n \geq 2$ est diagonalisable comme on l'a vu au paragraphe **10.2.2**. Cependant, elle ne possède qu'une valeur propre égale à son rapport.

Théorème – Condition suffisante de diagonalisabilité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.
Si f possède n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Démonstration

En effet, les vecteurs propres associés à ces valeurs propres forment alors, d'après **1.3**, une famille libre qui a le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace, donc une base de cet espace. ■

10.3 Réduction des matrices carrées

10.3.1 Eléments propres d'une matrice carrée

Définition – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

1. *Une* **valeur propre de** *A est une valeur propre de f.*
2. *Un* **vecteur propre de** *A* **associé à une valeur propre** λ **de** *A (et de f) est la matrice-colonne d'un vecteur propre de f associé à λ.*
 En d'autres termes, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ si et seulement si $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $AX = \lambda X$.
3. *Le* **sous-espace propre de** *A* **associé à une valeur propre** λ **de** *A est $\left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \text{ et } AX = \lambda X\right\}$, noté $E_\lambda(A)$ dans ce cours ou E_λ s'il n'y a pas de confusion possible. C'est l'ensemble formé des vecteurs propres de A et de la matrice-colonne nulle.*
4. *Le* **spectre de** *A est le spectre de f.*

Une méthode de détermination pratique des éléments propres d'une matrice d'ordre 2, 3, 4,... dont les coefficients sont fixés, est détaillée au paragraphe **10.4.3**.

Remarque – Soit $\lambda \in \mathbb{K}$; λ valeur propre de la matrice carrée $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ non inversible.

Cas particulier – 0 valeur propre de la matrice carrée $A \Leftrightarrow A$ non inversible.
En effet, avec les notations de la définition, λ valeur propre de A (et de f) $\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E)$ non bijectif$\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I_n)$ non inversible.

Proposition – Correspondance des éléments propres d'un endomorphisme et de sa matrice
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base quelconque de E, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, $x \in E$, de matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. *λ est valeur propre de A si et seulement si λ est valeur propre de f.*
2. *X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ si et seulement si x est vecteur propre de f pour la valeur propre.*
3. *$E_\lambda(A)$, sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ, est l'ensemble des matrices-colonnes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de $E_\lambda(f)$, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.*
4. *Le spectre de A est le spectre de f.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Proposition – Cas particulier des matrices triangulaires
Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux

Démonstration

A triangulaire inférieure, s'écrit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & a_n \end{pmatrix}$ avec $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dans $\mathbb{K}$.

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & a_n - \lambda \end{pmatrix}$$

λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ non inversible $\Leftrightarrow$l'un des coefficients diagonaux de $(A - \lambda I_n)$ est nul $\Leftrightarrow \lambda \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Les valeurs propres de A sont donc ses coefficients diagonaux $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Si A est triangulaire supérieure, la preuve est analogue. ■

10.3.2 Matrice diagonalisable

Définition – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est **diagonalisable** si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.

Théorème – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre les énoncés suivants :

1. A est diagonalisable.
2. A est semblable à une matrice diagonale.
3. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / P^{-1}AP = D$ matrice diagonale.

P est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à une base de vecteurs propres de A.

Ce théorème résulte de la correspondance entre endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ et matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et de la formule de changement de base pour un endomorphisme.

Proposition – *Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.*

Démonstration

A et B semblables $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / B = P^{-1}AP$.

λ valeur propre de $A \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / (X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X)$

Posons $Y = P^{-1}X$. P étant inversible, X et Y sont nuls en même temps.

λ valeur propre de $A \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / (Y \neq 0 \text{ et } APY = \lambda PY)$

$\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / (Y \neq 0 \text{ et } BY = \lambda Y) \Leftrightarrow \lambda$ valeur propre de B. ■

10.3.3 Calculs pratiques de diagonalisation

Utilisation de la méthode du pivot lors de la diagonalisation

Nous allons détailler la diagonalisation d'une matrice carrée. La diagonalisation d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie se ramène en effet à celle de sa matrice dans une base de l'espace.

Un exercice de concours peut ne demander que certaines étapes de cette démarche.

Méthode 1 Diagonalisation et utilisation de la méthode du pivot de Gauss

On part d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. **Recherche des valeurs propres.**
 On part dès le début de la matrice $A - \lambda I_n$. On cherche son rang. par **opérations sur les lignes et sur les colonnes** de $A - \lambda I_n$.
 On vérifie si $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour savoir si on doit conserver les éventuelles valeurs propres complexes non réelles.
 On obtient ainsi des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ avec $k \leq n$.
2. **Recherche des vecteurs propres.**
 Pour chaque valeur propre λ obtenue, on résout le système $(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
 Comme il s'agit de la résolution d'un système linéaire, on ne peut utiliser que des **opérations sur les lignes**.
 L'ensemble des solutions obtenu est le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de A associé à la valeur propre λ.
 On détermine une base de $E_\lambda(A)$.
3. ***A* est-elle diagonalisable ?**
 Premier cas : $k = n$. A l'étape **1**, on a trouvé n valeurs propres distinctes, i.e. autant de valeurs propres que l'ordre de la matrice.
 D'après la condition suffisante de diagonalisation, A est diagonalisable.
 Deuxième cas : $k < n$. On a obtenu strictement moins de valeurs propres que l'ordre n de la matrice. On reprend les bases des sous-espaces propres que l'on a déterminées à l'étape précédente.
 Si elles comprennent en tout strictement moins de n vecteurs, la famille ainsi obtenue ne constitue pas une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et la matrice A n'est pas diagonalisable.
 S'il y a exactement n vecteurs, on vérifie que le rang de la famille obtenue est n, par exemple en déterminant grâce à la méthode du pivot le rang de la matrice de la famille. Pour ce faire, on a droit aux opérations sur les lignes et sur les colonnes.
4. Obtenir la **matrice de passage P et la matrice diagonale semblable à** A.
 Cette question se pose seulement lorsque A est diagonalisable.
 D est alors la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, chaque valeur propre λ_i figurant un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.
 Soit P, matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base de vecteurs propres. Les colonnes de P sont les vecteurs propres obtenus, placés **dans le même ordre** que les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ dans la matrice diagonale D.
 On a alors, d'après la formule de changement de base, $D = P^{-1}AP$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple d'application 1

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ égale à $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Montrer qu'on peut trouver P, matrice inversible et D, matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Solution

1. Déterminons les valeurs propres de A par la méthode du pivot de Gauss :

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$rg(A - \lambda I_3) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5-\lambda \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 2-\lambda & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$rg(A - \lambda I_3) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-2)L_1}}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -3+3\lambda \\ 0 & 2(2-\lambda) & -\lambda^2+7\lambda-6 \end{pmatrix}$$

$$rg(A - \lambda I_3) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} rg \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -3+3\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda \end{pmatrix}}_{T(\lambda)}$$

λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si et seulement si $rg(A - \lambda I_3) < 3$, ce qui est le cas si et seulement si l'un des coefficients diagonaux de $T(\lambda)$ s'annule.

λ valeur propre de A si et seulement si

$\left(2 - \lambda = 0 \text{ ou } -\lambda^2 + \lambda = 0\right)$ si et seulement si $(\lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1)$.

Les valeurs propres de A sont donc 0, 1, 2.

2. A, matrice carrée d'ordre 3, possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on peut donc trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux les valeurs propres de A.

Remarque – Dans cet exemple, il y a autant de valeurs propres distinctes que l'ordre de la matrice. D'après la condition suffisante de diagonalisation, on n'a pas besoin de calculer les vecteurs propres pour affirmer que la matrice est diagonalisable.

Exemple d'application 2

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ égale à $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.

3. A est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Solution

1. Déterminons les valeurs propres de A par la méthode du pivot de Gauss ;
Nous allons constater combien l'utilisation conjointe des lignes et des colonnes pour la recherche du rang simplifie les calculs.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

A cette étape, nous constatons que la somme des lignes est constante. D'où la méthode suivante :

$$rg\,(A - \lambda I_3) \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} rg \begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 & 1 \\ -3-\lambda & 1-\lambda & -2 \\ -3-\lambda & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$rg\,(A - \lambda I_3) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} rg \underbrace{\begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}}_{T(\lambda)}$$

λ est valeur propre de A si et seulement si $rg\,(A - \lambda I_3) < 3$, c'est-à-dire si et seulement si l'un des coefficients diagonaux de $T(\lambda)$ est nul, ce qui est le cas si et seulement si $(-3 - \lambda = 0$ ou $3 - \lambda = 0)$.

Les valeurs propres de A sont donc 3 et -3.

2. **Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre** 3.

On résout : $(A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (S_3)$

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ecrivons ce système à l'aide d'un tableau de nombres, on n'indique pas le second membre qui reste nul.

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/3 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $E_3(A) = Vect \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{U_1}$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -3.

On résout $(A+3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad(S_{-3})$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On constate que les lignes de ce système sont toutes proportionnelles, ce qui traduit que $rg\,(A+3I_3)=1$

$(S_{-3})\Leftrightarrow x-2y+z=0\Leftrightarrow(x,y,z)=(2y-z,y,z)$

$(S_{-3})\Leftrightarrow(x,y,z)=y\,(2,1,0)+z\,(-1,0,1)$

On en déduit que $E_{-3}(A)=Vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{U_2},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{U_3}\right)$

U_2 et U_3 n'étant pas colinéaires, constituent une famille libre, et une base de $E_{-3}(A)$.

3. Voyons si A est diagonalisable :

$$rg\,(U_1,U_2,U_3)=rg\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1+L_3}{=}rg\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$rg\,(U_1,U_2,U_3)\underset{L_1\leftarrow L_1-2L_2}{=}rg\begin{pmatrix}6&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=3$$

(U_1,U_2,U_3) est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi il existe une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A, ceci prouve que A est diagonalisable.

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'=(U_1,U_2,U_3)$ est $P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

Pour $i\in[\![1,3]\!]$, notons u_i le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de matrice-colonne U_i dans la base canonique, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Alors u_1,u_2,u_3 sont des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres respectives $3,-3,-3$, on a par conséquent $\begin{cases}f(u_1)=3u_1\\f(u_2)=-3u_2\\f(u_3)=-3u_3\end{cases}$.

Donc f a pour matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres $D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

D'après la formule de changement de base, $D=P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A=PDP^{-1}$.

10.4 Applications de la diagonalisation

10.4.1 Puissances de matrices

Proposition – Calcul de la puissance d'une matrice diagonalisable.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable.
On peut alors trouver P, matrice inversible, et D matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration

Remarque – Les énoncés de concours demandent souvent de reproduire cette preuve.

L'existence de P, matrice inversible, et D matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ est un résultat du théorème du **10.3.2**. La dernière égalité se prouve par récurrence :
Pour $n = 0$, on vérifie que : $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n = A^0$.
Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait : $A^n = PD^nP^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = A^nA = PD^n \underbrace{P^{-1}P}_{I_n} DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
On a donc bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$. ■

Exemple

Reprenons la matrice de 10.3.3 : $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

Nous avons vu que $A = PDP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculons d'abord P^{-1} en résolvant un système de tableau associé :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ -2 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & a+c \\ -2 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & a+b+c \\ 3 & 0 & 0 & a-2b+c \\ 1 & 0 & 1 & 2c \end{array}\right)$$

Le système équivaut à : $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(\frac{a-2b+c}{2}\right) \\ y = \frac{1}{3}(a+b+c) \\ z = c - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-2b+c}{6} \\ y = \frac{1}{3}(a+b+c) \\ z = \frac{-a+2b+5c}{6} \end{cases}$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

D'où $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

D'après la méthode ci-dessus, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3^n & 2(-3)^n & -(-3)^n \\ -2.3^n & (-3)^n & 0 \\ 3^n & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3^n + 5(-3)^n & -2.3^n + 2(-3)^n & 3^n - (-3)^n \\ -2.3^n + 2(-3)^n & 4.3^n + 2(-3)^n & -2.3^n + 2(-3)^n \\ 3^n - (-3)^n & -2.3^n + 2(-3)^n & 3^n + 5(-3)^n \end{pmatrix}$$

10.4.2 Suites linéaires simultanément récurrentes à coefficients constants

Exemple

On définit les suites (u_n), (v_n), (w_n) par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0, réels fixés, et par : pour tout n, entier naturel, $(*)$ $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n - 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n - 2w_n \end{cases}$

Déterminer l'expression de u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0.

Solution

Notons pour n, entier naturel, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

$(*) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice ci-dessus.

Montrons par récurrence que pour tout n, entier naturel, $X_n = A^nX_0$:

Si $n = 0$, $X_0 = A^0X_0$ car $A^0 = I_n$.

Si on suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$, alors : $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$.

Passons aux coordonnées, cette égalité s'écrit pour tout n, entier naturel :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3^n + 5(-3)^n & -2.3^n + 2(-3)^n & 3^n - (-3)^n \\ -2.3^n + 2(-3)^n & 4.3^n + 2(-3)^n & -2.3^n + 2(-3)^n \\ 3^n - (-3)^n & -2.3^n + 2(-3)^n & 3^n + 5(-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{cases} u_n = \frac{1}{6}\left[(3^n + 5(-3)^n)u_0 + (-2.3^n + 2(-3)^n)v_0 + (3^n - (-3)^n)w_0\right] \\ v_n = \frac{1}{6}\left[(-2.3^n + 2(-3)^n)u_0 + (4.3^n + 2(-3)^n)v_0 + (-2.3^n + 2(-3)^n)w_0\right] \\ w_n = \frac{1}{6}\left[(3^n - (-3)^n)u_0 + (-2.3^n + 2(-3)^n)v_0 + (3^n + 5(-3)^n)w_0\right] \end{cases}$

Remarque – Nous verrons l'application de ce type de calcul dans l'exercice 23.20 du chapitre 23 qui étudie une chaîne de Markov.

Synthèse

Savoirs

- Définition des valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice.
- Définition d'un endomorphisme diagonalisable.
- Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice dans une base quelconque.

Savoir-faire

- Recherche des valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme.
- Recherche des sous-espaces propres d'une matrice ou d'un endomorphisme.
- Calcul de la puissance d'une matrice diagonalisable.

Mots-clés

- Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre.
- Endomorphisme diagonalisable.
- Matrice diagonalisable.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

10.1 Pour chacune des matrices suivantes, déterminer ses valeurs propres et indiquer par un argument simple si elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.2 Pour chacune des matrices de l'exercice **1**, indiquer par un argument simple si elle est inversible.

10.3 **Vrai ou faux ?**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) 2 est valeur propre de A

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

3) A est diagonalisable.

4) A est inversible.

10.4 **Vrai ou faux ?**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) 0 est valeur propre de A

2) -1 est valeur propre de A.

3) 1 est valeur propre de A

4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

5) A est diagonalisable.

6) A est inversible.

10.5 **Vrai ou faux ?**

1) Si $A^2 = A$, alors A est diagonalisable.

2) Si $A^2 = I_n$, alors A est diagonalisable.

3) Toute matrice diagonalisable est inversible.

4) Si une matrice d'ordre n est diagonalisable alors elle possède n valeurs propres distinctes.

5) Si une matrice d'ordre n est diagonalisable alors elle possède n vecteurs propres indépendants.

10.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base quelconque de E, f un endomorphisme de E.
On donne une propriété de A, matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Indiquer la propriété correspondante de f.

1) λ est valeur propre de A.

2) $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

3) A est diagonalisable.

4) A est inversible.

10.7 **1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A a exactement une valeur propre. A quelle condition A est-elle diagonalisable ?
2) Enoncer un résultat analogue pour un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

10.8 Citer trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme d'un espace de dimension finie soit diagonalisable.

Exercices d'application

10.9 **D'après oral HEC, BL**

On donne la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de J.
La matrice J est-elle diagonalisable ?

2) Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a^3 & 2 & 1 \\ 0 & a^3 - 1 & 2 \\ 0 & 1 & a^3 \end{pmatrix}$ est inversible.

10.10

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer les valeurs propres de f.

2) Déterminer les sous-espaces propres de f.

3) Montrer que f est diagonalisable.
M est-elle diagonalisable ? inversible ?

4) a) Déterminer une base $\mathcal{B}$' de P^3 dans laquelle f a une matrice diagonale ; on note D cette matrice diagonale.
b) Calculer l'inverse de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$'.

5) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.
b) Calculer les coefficients de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10.11

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$canoniquement associé à M.

1) Déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est diagonalisable.

2) Déterminer les sous-espaces propres de f

3) Déterminer une base $\mathcal{B}$' de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a une matrice diagonale, qu'on note D.

4) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$, base canonique, à $\mathcal{B}$', ainsi que son inverse.

5) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.
b) Calculer les coefficients de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10.12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que -1 est valeur propre de A et trouver un vecteur propre, noté V, associé à cette valeur propre.

2) Montrer que (V, e_2, e_3)est une base de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B}'$. Donner la matrice T de f dans cette base.

3) Quelles sont les valeurs propres de f ?
f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

4) En utilisant T, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

10.13 D'après Edhec 99

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On considère la matrice à coefficients réels $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres.

2) Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans toute la suite, on suppose $a > 0$.

3) Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels solutions de l'une des équations :$\lambda^2 = (a-1)^2$ et $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$.

4) Déduire de la question précédente la valeur de a pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible. Pour cette valeur, dire si $A(a)$ est diagonalisable.

5) On suppose dans cette question que $a > 2$. Montrer que $A(a)$ possède quatre valeurs propres réelles distinctes deux à deux. En déduire que $A(a)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

10.14

On considère le $\mathbb{C}$-espace $\mathbb{C}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour $X = (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, on note :

$M_X = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ et f_X l' endomorphisme de $\mathbb{C}^4$de matrice M_X relativement à $\mathcal{B}$

1) Déterminer les valeurs propres de g et, pour chaque valeur propre de g, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que g est diagonalisable ?

2) Soit $X \in \mathbb{C}^4$; montrer que f_X est combinaison linéaire de Id, g, gog, $gogog$. En déduire les valeurs propres de f_X. Que peut-on en déduire pour f_X ?

3) Application : Pour $X = (1, 2, 3, -2)$, déterminer les valeurs propres de f_X et la dimension de chaque sous-espace propre.

10.15

Soit E un K-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E qui commutent. On pose $f = p + q$.

1) Montrer que les valeurs propres de f sont dans $\{0, 1, 2\}$.

2) Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q \neq \{0_E\}$.

3) Montrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $Imp \cap Imq \neq \{0_E\}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exercices d'approfondissement

10.16 Racines carrées d'un endomorphisme

E désigne l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

On considère l'endomorphisme u de E défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$: $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

■ A. Diagonalisation de u

1) Déterminer les valeurs propres de u. Ce résultat suffit-il à assurer la diagonalisabilité de u ? (justifier)

2) Pour chaque valeur propre de u, déterminer une base du sous-espace propre associé.

3) En déduire que u est diagonalisable.

4) Déterminer une base $\mathcal{B}' = \left(e'_1, e'_2, e'_3\right)$ de E telle que la matrice de u dans cette nouvelle base soit : $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ B. Recherche des « racines carrées » de u

On suppose qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $vov = u$.

1) Montrer que : $uov = vou$.

2) Montrer que : $u\left(v\left(e'_1\right)\right) = -2v\left(e'_1\right)$. En déduire que $v\left(e'_1\right)$ et e'_1 sont colinéaires, puis que e'_1 est un vecteur propre de v.

3) x désigne un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.

Montrer que : $u(v(x)) = v(x)$, puis en déduire que :

$v(x)$ appartient à $Vect\left(e'_2, e'_3\right)$.

4) En déduire qu'il existe des réels a, b, c, d, k tels que v ait pour matrice dans la base B' $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & c & k \end{pmatrix}$.

5) Montrer que $C^2 = D$ et en déduire la valeur de a^2.

6) Existe-t-il des endomorphismes v de E tels que $vov = u$?

10.17 Adapté d'Ecricome 95

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère l'application f qui, à tout $P \in E$, associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(X) = (2X + 1)P(X) - \left(X^2 - 1\right)P'(X).$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) Soit B un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

Montrer que B est nécessairement de degré deux.

3) On suppose que B est un vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda = 3$.

Montrer que -1 est racine de B.

Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 ; il existe donc un polynôme A tel que :

$B(X) = (X + 1)^k A(X)$ avec $A(-1) \neq 0$.

Montrer que $k = 2$ et que A est constant. En déduire que 3 est valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre associé.

4) En supposant que B est un vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1. En déduire que -1 est valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre associé.

5) On suppose maintenant que $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 3$. Soit B vecteur propre de f pour la valeur propre λ. Montrer que -1 et 1 sont des racines de B. En déduire une factorisation des polynômes B obtenus, ainsi que la valeur propre associée à B.

6) Etude d'un cas particulier.

Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et g la restriction de f à F. On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de F.

a) Montrer que g est un endomorphisme de F.

b) Ecrire la matrice M de g relativement à la base $\mathcal{B}$.

c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice P inversible telles que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.

d) Expliciter M^n en fonction de n.

10.1

∗ A est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $0, 1, 2$. Elle est diagonale à coefficients réels, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$!

∗ B est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $1, 2, 3$. C'est une matrice carrée d'ordre 3 qui a 3 valeurs propres réelles distinctes, elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

∗ C est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : C a pour seule valeur propre 1.

Par l'absurde, si C était diagonalisable, l'endomorphisme canoniquement associé à C serait $Id_{\mathbb{R}^3}$, donc on aurait : $C = I_3$, ce qui est faux vu les coefficients de C. Donc C n'est pas diagonalisable.

∗ Pour D, on raisonne comme pour C : D a pour seule valeur propre 0 et n'est pas diagonalisable, car elle n'est pas égale à la matrice nulle.

10.2

∗ A et D ne sont pas inversibles car elles ont 0 pour valeur propre.

∗ B et C sont inversibles car elles n'ont pas 0 pour valeur propre.

10.3

1) $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$ad - bc = 0$ donc $A - 2I_2$ n'est pas inversible, donc 2 est valeur propre de A. C'est VRAI.

2) $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 0. C'est VRAI.

3) D'après les questions précédentes, A, matrice carrée d'ordre deux, a deux valeurs propres, à savoir 2 et 0. Donc A est diagonalisable. C'est VRAI.

4) FAUX, car 0 est valeur propre de A.

10.4

1) FAUX : $ad - bc = -1 \neq 0$ donc A est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de A.

2) VRAI : $A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$ad - bc = 0$ donc $A + I_2$ n'est pas inversible, donc -1 est valeur propre de A.

3) VRAI : $A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$ad - bc = 0$, donc $A - I_2$ n'est pas inversible, donc 1 est valeur propre de A.

4) VRAI : $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre -1.

5) VRAI : D'après 2 et 3, A, matrice carrée d'ordre 2, possède 2 valeurs propres distinctes, à savoir -1 et 1. Donc A est diagonalisable.

6) VRAI : Déjà vu à la question 1.

10.5

1) VRAI : Si $A^2 = A$, alors, alors A est la matrice d'un projecteur, qui est diagonalisable, donc A est diagonalisable.

2) VRAI : Si $A^2 = I_n$, alors A est la matrice d'une symétrie, qui est diagonalisable, donc A est diagonalisable.

3) FAUX : Par exemple, la matrice nulle est diagonalisable, puisqu'elle est diagonale, mais n'est pas inversible.

4) FAUX : I_2 est diagonalisable car elle est diagonale, mais n'a qu'une valeur propre, 1 (et pas deux valeurs propres). C'est la réciproque qui est vraie : si une matrice d'ordre n possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

5) VRAI : Si une matrice A d'ordre n est diagonalisable alors il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A, qui constituent n vecteurs propres indépendants de A.

10.6

1) λ est valeur propre de f.

2) Le vecteur x de E, de matrice-colonne X dans la base $\mathcal{B}$, est vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

3) f est diagonalisable.

4) f est bijectif, c'est-à-dire que f est un automorphisme de E.

10.7

1) Si A n'a qu'une valeur propre, et si A est diagonalisable, alors l'endomorphisme f canoniquement associé à A a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$ dans une base de vecteurs propres de f. Donc $f = \lambda Id_{\mathbb{K}^n}$. Ainsi f est l'homothétie de rapport λ qui a même matrice dans toute base, donc $A = \lambda I_n$.

Réciproquement, si $A = \lambda I_n$, alors A est diagonale, donc diagonalisable.

On conclut qu'une matrice qui a exactement une valeur propre est diagonalisable si et seulement si elle s'écrit λI_n, c'est-à-dire si c'est la matrice d'une homothétie.

2) Un endomorphisme d'un espace de dimension finie qui a une valeur propre exactement est diagonalisable si et seulement si c'est une homothétie.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

10.8

Soit f endomorphisme d'un espace E de dimension finie. f est diagonalisable si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

1) Il existe une base de E dans laquelle f a une matrice diagonale.

2) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

3) La matrice de f dans toute base de E est diagonalisable.

10.9

1) $J-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 2\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}$

$$rg(J-\lambda I_3)\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{=}rg\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & -1-\lambda & 2\end{pmatrix}$$

$$rg(J-\lambda I_3)\underset{L_3\leftarrow L_3+(1+\lambda)L_2}{=}rg\underbrace{\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}}_{T(\lambda)}$$

λ est valeur propre de J si et seulement si

$rg(J-\lambda I_3)<3$ si et seulement si

λ annule l'un des coefficients diagonaux de $T(\lambda)$

si et seulement si

$$\left[\lambda=0 \text{ ou } \underbrace{-(\lambda+2)(\lambda-1)}_{2-\lambda-\lambda^2}=0\right]$$

si et seulement si

$[\lambda=0 \text{ ou } \lambda=-2 \text{ ou } \lambda=1]$.

Les valeurs propres de J sont donc 0, 1 et -2.

J, matrice carrée d'ordre trois, possède trois valeurs propres réelles, donc J est diagonalisable.

2) On remarque que $M_a=a^3I_3+J$.

On a équivalence entre :

- M_a n'est pas inversible
- $rg\left(a^3I_3+J\right)<3$
- $rg\left(J-\left(-a^3\right)I_3\right)<3$
- $\left(-a^3\right)$ valeur propre de J
- $\left(-a^3\right)\in\{0,1,-2\}$
- $a^3\in\{0,-1,2\}$
- $a\in\left\{0,-1,\sqrt[3]{2}\right\}$

En effet, l'équivalence entre les deux dernières propriétés vient du fait que $x\mapsto x^3$ est strictement croissante continue sur $\mathbb{R}$, donc décrit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$.

On conclut que les valeurs de a pour lesquelles M_a est inversible sont les $a\in\mathbb{R}-\left\{0,-1,\sqrt[3]{2}\right\}$.

10.10

1) Déterminons les valeurs propres de f, qui sont les mêmes que celles de M, en calculant le rang de

$$M-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}.$$

$$rg(M-\lambda I_3)\underset{L_3\leftarrow L_3+(\lambda-3)L_1}{=}rg\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -(\lambda-1)(\lambda-2) & \lambda-2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{=}rg\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 & 0\end{pmatrix}(\odot)$$

$$\underset{C_3\leftrightarrow C_1}{=}rg\begin{pmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

On déduit de ce calcul que :

$rg(M-\lambda I_3)<3$ si et seulement si

$[2-\lambda=0 \text{ ou } -(\lambda-2)(\lambda-1)=0]$

si et seulement si $[\lambda=2 \text{ ou } \lambda=1]$.

Les valeurs propres de f sont donc 1 et 2.

2) $*$ **Recherche de** E_1, sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1 :

$$(x,y,z)\in E_1\Leftrightarrow(M-I_3)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Il s'agit de résoudre le système linéaire homogène de matrice $M-I_3$. On peut le faire par la méthode du pivot, en n'utilisant que des opérations sur les lignes, (puisqu'il s'agit d'un système). Le calcul est le même que pour le calcul du rang de $M-\lambda I_3$, dans lequel on a remplacé λ par 1. On se place par conséquent à l'étape $(\odot)$; en effet, jusqu'à cette étape, on n'a utilisé que des opérations sur les lignes.

$$\text{Ainsi } (x,y,z)\in E_1\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y+z=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\ y=0\end{cases}$$

$$E_1=\{x(1,0,1)\,|\,x\in\mathbb{R}\}=Vect(1,0,1)$$

$*$ **Recherche de** E_2, sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2 :

En raisonnant de même,

$$(x,y,z)\in E_2\Leftrightarrow(M-2I_3)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$(x,y,z)\in E_2\Leftrightarrow -2x+y+z=0$$

Ainsi E_2 est le noyau d'une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$, donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, de dimension deux. Une base de E_2 est par conséquent formée de deux vecteurs non colinéaires de

E_2. Par exemple, $((0,1,-1),(1,1,1))$ est une base de E_2 (en effet, les coordonnées de ces deux vecteurs vérifient l'équation de E_2, et ne sont pas proportionnelles).

On conclut que E_2 est le plan de $\mathbb{R}^3$, d'équation $-2x+y+z=0$, de base $((0,1,-1),(1,1,1))$.

3) $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et notons

$\mathcal{B}' = ((1,0,1),(0,1,-1),(1,1,1))$ la famille des vecteurs propres obtenus. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg(P) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(P) \underset{C_3 \leftrightarrow C_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. Donc f est diagonalisable.

M est comme f, diagonalisable.

Par ailleurs, 0 n'étant pas valeur propre de f, f est bijectif, et M est inversible.

4) a) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, constituée de vecteurs propres de f pour les valeurs propres respectives $1, 2, 2$, est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui est diagonale. Donc $\mathcal{B}'$ convient.

b) **Calcul de l'inverse** de $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Utilisons un système, dont on écrit le tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 & c-a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2a-b-c \\ 0 & 0 & 1 & -a+b+c \\ 0 & -1 & 0 & c-a \end{array}\right)$$

Revenons au système :

$$\begin{cases} x = 2a-b-c \\ z = -a+b+c \\ -y = c-a \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x = 2a-b-c \\ y = a-c \\ z = -a+b+c \end{cases}$$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) a) f a pour matrice M dans la base $\mathcal{B}$ et D dans la base $\mathcal{B}'$, P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. D'après la formule de changement de base, $D = P^{-1}MP$ donc $M = PDP^{-1}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n,

$M^n = PD^nP^{-1}$.

∗ Si $n = 0$, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = M^0$, donc l'égalité est vérifiée.

∗ Supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour un entier naturel n. Alors

$$M^{n+1} = M^nM = PD^n \underbrace{P^{-1}P}_{I_3} DP^{-1} = PD^nDP^{-1}$$

Donc $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

∗ On a bien prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

b) Calculons les coefficients de M^n à l'aide de cette formule :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$M^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 2^n \\ 1 & -2^n & 2^n \end{pmatrix}}_{PD^n} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n & -1+2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2-2^{n+1} & 2^n-1 & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}$$

10.11

1) Déterminons les valeurs propres de f, qui sont les mêmes que celles de M, en calculant le rang de

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$rg(M-\lambda I_3) \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$rg(M-\lambda I_3) \underset{C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$rg(M-\lambda I_3) \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 1-\lambda^2 \\ 1 & 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 - (1-\lambda^2)C_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & \lambda\left(-\lambda^2+\lambda+2\right) \end{pmatrix}$$

On a équivalence entre :

- $rg(M-\lambda I_3) < 3$
- $\lambda\left(-\lambda^2+\lambda+2\right) = 0$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

• $\lambda = 0$ ou $\underbrace{-\lambda^2 + \lambda + 2}_{\Delta=9} = 0$

• $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$

Les valeurs propres de f sont donc 0, -1 et 2.

f a trois valeurs propres distinctes, donc f est diagonalisable.

2) ∗ **Recherche de** E_0, sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0 :

Comme dans le calcul des valeurs propres on a utilisé les colonnes, on ne peut pas le réutiliser pour chercher les sous-espaces propres.

On a équivalence entre les énoncés suivants :

• $(x, y, z) \in E_0$

• $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$

• $\begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$

Donc $E_0 = \{(x, 0, -x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{x\,(1, 0, -1) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$E_0 = Vect\,(1, 0, -1)$

∗ **Recherche de** E_{-1}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1 :

$(x, y, z) \in E_{-1}$ si et seulement si il est solution du système

$$(M + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

représenté par les tableaux successifs (on n'indique pas le second membre nul) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_{-1} = \{(x, -x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{x\,(1, -1, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$E_{-1} = Vect\,(1, -1, 0)$

∗ **Recherche de** E_2, sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2 :

$(x, y, z) \in E_2$ si et seulement si il est solution du système

$$(M - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Passons aux tableaux comme pour E_{-1} :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(x, y, z) \in E_2$ si et seulement si $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

qui équivaut à $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$

$E_2 = \{(x, 2x, 3x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{x\,(1, 2, 3) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

$E_2 = Vect\,(1, 2, 3)$

3) Prenons pour $\mathcal{B}' = ((1, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 2, 3))$ la famille des vecteurs propres obtenus. Comme ces vecteurs propres sont associés à des valeurs propres différentes de f, ils forment une famille libre. $\mathcal{B}'$ famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, espace de dimension 3, est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculons son inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ -1 & 0 & 3 & c \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 4 & a + c \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 6 & a + b + c \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a + b \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 6 & a + b + c \end{array}\right)$$

Revenons au système équivalent :

$$\begin{cases} x + 3z = a + b \\ -y + 2z = b \\ z = \dfrac{1}{6}(a + b + c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b - 3z \\ y = 2z - b \\ z = \dfrac{1}{6}(a + b + c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a+b-c) \\ y = \frac{1}{3}(a-2b+c) \\ z = \frac{1}{6}(a+b+c) \end{cases}$$

On conclut que $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) a) On montre que pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$ comme dans la question **5 .a** de l'exercice **10.10**.

b) Pour tout entier naturel n,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$M^n = \frac{1}{6}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & 2^n \\ 0 & -(-1)^n & 2\times 2^n \\ 0 & 0 & 3\times 2^n \end{pmatrix}}_{PD^n}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 4(-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 4(-1)^n + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ 3\times 2^n & 3\times 2^n & 3\times 2^n \end{pmatrix}$$

10.12

1) Pour montrer que -1 est valeur propre de A, résolvons $(A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Ceci est équivalent au système :

$$\begin{cases} 5x - 5y + 5z = 0 \\ 3x - 3y + 5z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_{-1}(A) = \{(x, x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = Vect(1, 1, 0)$

D'où $\dim E_{-1}(A) = 1$ et en particulier,

$E_{-1}(A) \neq \{(0, 0, 0)\}$, donc -1 est valeur propre de A, de vecteur propre associé $(1, 1, 0)$.

2) $*$ La matrice de la famille $\mathcal{B}' = (V, e_2, e_3)$ dans la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$rg(P) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$*$ Pour obtenir la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, on peut utiliser la formule de changement de base, car P^{-1} est facile à calculer. Mais nous allons procéder autrement :

Notons $i \in [\![1, 3]\!]$, E_i la matrice-colonne de e_i.

$$AE_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5V + E_2$$

$$AE_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5V + E_3$$

De plus, $AV = -V$.

Ces égalités se traduisent avec l'endomorphisme f par :

$$\begin{cases} f(v) = -v \\ f(e_2) = -5v + e_2 \\ f(e_3) = 5v + e_3 \end{cases}$$

en désignant par v le vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice-colonne V dans la base canonique.

La matrice de fdans la base $\mathcal{B}'$ est donc $T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) T est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, à savoir -1 et 1.

f ayant pour matrice T a donc pour valeurs propres -1 et 1.

f, n'ayant pas 0 comme valeur propre, est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

4) Calculons $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

D'après la formule de changement de base, $T = P^{-1}AP$ d'où $A = PTP^{-1}$.

En procédant par récurrence comme à la question **5a** de l'exercice **10.10**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

$*$ **Si *n* est pair,** $\exists k \in \mathbb{N} / n = 2k$

Comme $T^{2k} = \left(T^2\right)^k = (I_3)^k = I_3$, on a

$A^n = PT^{2k}P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$

$*$ **Si *n* est impair,** $\exists k \in \mathbb{N} / n = 2k + 1$

Comme $T^{2k+1} = \left(T^2\right)^k T = I_3T = T$, on a

$A^n = PT^{2k+1}P^{-1} = PTP^{-1} = A$

$*$ **Conclusion** : Pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{cases} I_3 \text{ si } n \text{ pair} \\ A \text{ si } n \text{ impair.} \end{cases}$

Remarque – $T^2 = I_3$ traduit que $fof = Id_{\mathbb{R}^3}$, donc f est une symétrie, on peut en déduire que f est diagonalisable.

10.13

1) $A(0) - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Cherchons $r = rg(A(0) - \lambda I_4)$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$L_3 \leftrightarrow L_4$

$$r = rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - \lambda L_3$

$$r = rg\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}}_{T(\lambda)}$$

λ est valeur propre de $A(0)$ si et seulement si $r < 4$ c'est-à-dire si et seulement si λ annule l'un des coefficients diagonaux de $T(\lambda)$. C'est le cas lorsque :

$1-\lambda = 0$ ou $-1-\lambda = 0$ ou $1+\lambda^2 = 0$

Mais l'énoncé précise que l'on considère des matrices à coefficients réels. On cherche donc des valeurs propres réelles. Or $\forall \lambda \in \mathbb{R}, 1+\lambda^2 \geq 1 > 0$, donc $1+\lambda^2 \neq 0$

Les valeurs propres de $A(0)$ sont donc 1 et -1.

2) Pour déterminer les sous-espaces propres de $A(0)$, on peut reprendre la dernière étape de la méthode du pivot, (puisque l'on n'a utilisé que les lignes) en remplaçant λ par 1 ou -1

∗ **Recherche du sous-espace propre associé à** 1

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. $X \in E_1(A(0))$ si et seulement

si $\begin{cases} -2y+t=0 \\ -2y+z=0 \\ -z-t=0 \\ 2t=0 \end{cases}$ si et seulement si $y=z=t=0$

$E_1(A(0)) = \{(x,0,0,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = Vect(1,0,0,0)$

∗ **Recherche du sous-espace propre associé à** -1

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.$X \in E_{-1}(A(0))$ si et seulement

si $\begin{cases} 2x-2y+t=0 \\ z=0 \\ -z+t=0 \\ 2t=0 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} y=x \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$

$E_{-1}(A(0)) = \{(x,x,0,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = Vect(1,1,0,0)$

3) Si $a > 0$, on peut multiplier la ligne que l'on remplace par a dans la méthode du pivot.

$$A(a) - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a-2 & a & 1 \\ a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & 0 & -a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Cherchons $r(a) = rg(A(a) - \lambda I_4)$:

$L_1 \leftrightarrow L_2$; $L_3 \leftrightarrow L_4$

$$r(a) = rg\begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a \\ 1-\lambda & a-2 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -a-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \underbrace{a}_{\neq 0} L_2 + (\lambda-1)L_1 ; L_4 \leftarrow L_4 - (a+\lambda)L_3$

$$r(a) = rg\begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & (a-1)^2-\lambda^2 & a^2+\lambda-1 & a\lambda \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+a\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

λ est valeur propre de $A(a)$ si et seulement si λ annule l'un des coefficients diagonaux c'est-à-dire, a étant non nul, si et seulement si. $\left(\lambda^2 = (a-1)^2 \text{ ou } \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0\right)$.

4) ∗ En utilisant le résultat de 3, on a équivalence entre :

- $A(a)$ n'est pas inversible
- 0 est valeur propre de $A(a)$.
- $0 = (a-1)^2$ ou $1 = 0$
- $a = 1$.

On conclut que $A(a)$ n'est pas inversible si et seulement si $a = 1$.

∗ Pour $a = 1$, la condition obtenue en 3 s'écrit

$\lambda^2 = 0$ ou $\underbrace{\lambda^2+\lambda+1}_{\Delta=-3<0} = 0$

Comme la deuxième équation est de degré deux à discriminant < 0, elle n'a pas de solution réelle.

La seule valeur propre réelle de $A(1)$ est donc 0.

∗ Par l'absurde, si $A(1)$ était diagonalisable, il existerait une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle l'endomorphisme f canoniquement associé a pour matrice I_4. Donc f serait $Id_{\mathbb{R}^4}$, donc $A(1)$ serait égale à I_4. Ceci est faux vu les coefficients de $A(1)$. Donc $A(1)$ n'est pas diagonalisable.

5) Soit $a > 2$.

∗ Résolvons $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$

$\Delta = a^2 - 4 > 0$; il y a donc deux solutions distinctes ; $\lambda_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

∗ $\lambda^2 = (a-1)^2$ équivaut à

$\lambda = a-1$ ou $\lambda = -a+1$

∗ On obtient ainsi 4 valeurs propres λ_1, λ_2, $\lambda_3 = -a+1$ et $\lambda_4 = a-1$. Il s'agit de montrer qu'elles sont toutes distinctes. On a déjà $\lambda_1 < \lambda_2$.

De plus, $a > 2$, donc $a-1 > 1 > -1 > 1-a$, donc $a-1 \neq 1-a$, donc $\lambda_4 > 0 > \lambda_3$.

$a^2 - 4 < a^2$, donc $\sqrt{a^2-4} < a$, donc $\lambda_2 < 0 < \lambda_4$

D'où $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_4$

- Voyons que $\lambda_3 \neq \lambda_2$

On a équivalence entre :

- $\lambda_2 = \lambda_3$
- $\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2} = 1-a$
- $-a+\sqrt{a^2-4} = 2-2a$
- $\sqrt{a^2-4} = 2-a$

Or $2-a < 0 \leq \sqrt{a^2-4}$ donc le dernier énoncé est faux et $\lambda_3 \neq \lambda_2$.

- Voyons que $\lambda_3 \neq \lambda_1$

On a équivalence entre :

- $\lambda_1 = \lambda_3$
- $\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2} = 1-a$
- $-a-\sqrt{a^2-4} = 2-2a$
- $\sqrt{a^2-4} = a-2$
- $\sqrt{(a-2)(a+2)} = \sqrt{(a-2)(a-2)}$
- $\sqrt{a+2} = \sqrt{a-2}$
- $a+2 = a-2$
- $4 = 0$

Ce dernier énoncé étant faux, on en déduit que $\lambda_3 \neq \lambda_1$.

On a montré que les quatre valeurs propres de $A(a)$, matrice carrée d'ordre 4, sont 2 à 2 distinctes, donc $A(a)$ est diagonalisable.

10.14

1) $J-\lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

Cherchons le rang de $r = rg(J-\lambda I_4)$ en remarquant que la somme des lignes est constante :

$$r \underset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{4} C_i}{=} rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 1 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$r \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1}}{=} rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$r \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+(-\lambda-1)L_2}}{=} rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$r \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{=} rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$r \underset{L_4 \leftarrow L_4+\lambda L_3}{=} rg\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3 \end{pmatrix}}_{T(\lambda)}$$

On a équivalence entre :

- λ est valeur propre de J
- λ annule l'un des coefficients diagonaux de $T(\lambda)$
- $1-\lambda = 0$ ou $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$
- $(\lambda-1)\left(\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1\right) = 0$
- $\lambda^4-1 = 0$
- $\lambda \in \{1,-1,i,-i\}$

Les valeurs propres de J et de g sont donc les racines quatrièmes de l'unité $1,-1,i,-i$

∗ **Recherche du sous-espace propre associé à** 1

Comme on a utilisé les colonnes dans le calcul du rang, on ne peut pas réutiliser ce calcul pour la recherche des sous-espaces propres.

$X \in E_1(J) \Leftrightarrow (J-I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})}$

$$X \in E_1(J) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=0 \\ -z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t$$

$E_1(g) = \{(x,x,x,x)\,|\,x \in \mathbb{C}\} = Vect(1,1,1,1)$

∗ **Recherche du sous-espace propre associé à** -1

$X \in E_{-1}(J) \Leftrightarrow (J+I_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})}$

$$X \in E_{-1}(J) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \\ x+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=x \\ t=-x \end{cases}$$

$E_{-1}(g) = \{(x,-x,x,-x)\,|\,x \in \mathbb{C}\} = Vect(1,-1,1,-1)$

∗ **Recherche du sous-espace propre associé à** i

$X \in E_i(J) \Leftrightarrow (J-iI_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})}$

$$X \in E_i(J) \Leftrightarrow \begin{cases} -ix+y=0 \\ -iy+z=0 \\ -iz+t=0 \\ x-it=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=ix \\ z=-x \\ t=-ix \end{cases}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$E_i(g) = \{(x, ix, -x, -ix) | x \in \mathbb{C}\} = Vect(1, i, -1, -i)$

∗ **Recherche du sous-espace propre associé à $-i$**

Notons $\overline{J}, \overline{X}, \ldots$ les matrices dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de $J, X, \ldots$.

J étant à coefficients réels, $\overline{J} = J$

On a équivalence entre :

- $X \in E_{-i}(J)$
- $(J + iI_4)X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})}$
- $\left(\overline{J + iI_4}\right)\overline{X} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})}$
- $\left(\overline{J} + \overline{i}\,\overline{I_4}\right)\overline{X} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})}$
- $(J - iI_4)\overline{X} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})}$
- $\overline{X} \in E_i(J)$

On en déduit que $E_{-i}(J) = \left\{\overline{X} | X \in E_i(J)\right\}$

et que $E_{-i}(g) = \left\{\overline{(x, ix, -x, -ix)} | x \in \mathbb{C}\right\}$

$E_{-i}(g) = \{(x, -ix, -x, ix) | x \in \mathbb{C}\}$

$E_{-i}(g) = Vect(1, -i, -1, i)$

g est un endomorphisme de $\mathbb{C}^4$, espace de dimension 4, possédant 4 valeurs propres distinctes. Donc g est diagonalisable. De plus, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

2) ∗ On calcule sans peine :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \quad J^4 = I_4$$

D'où $M_X = aI_4 + bJ + cJ^2 + dJ^3$

En passant aux endomorphismes,

$f_X = aId_{\mathbb{C}^4} + bg + cgog + dgogog$

∗ Soit λ une valeur propre de g et U un vecteur propre de g associé à λ ; alors

$g(U) = \lambda U$, donc $gog(U) = g(\lambda U) = \lambda g(U) = \lambda^2 U$

$gogog(U) = g\left(\lambda^2 U\right) = \lambda^2 g(U) = \lambda^3 U$

Reportons ces expressions dans $f_X(U)$:

$f_X(U) = aU + bg(U) + cgog(U) + dgogog(U)$

$f_X(U) = aU + b\lambda U + c\lambda^2 U + d\lambda^3 U$

o $f_X(U) = \left(a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3\right)U$

U étant vecteur propre de g, n'est pas nul, donc U est vecteur propre de f_X pour la valeur propre $a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3$; en particulier, $a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3$ est valeur propre de f_X. Ceci est valable pour chacune des 4 valeurs propres de g. On en déduit que $a + b + c + d$, $a - b + c - d$

$a + ib - c - id$, $a - ib - c + id$ sont valeurs propres de f_X (mais ne sont pas forcément distinctes comme le montre l'application de la question 3.

De plus, g étant diagonalisable, les vecteurs propres associés à ces valeurs propres (pas nécessairement distinctes, comme le montre la question 3) forment une base de $\mathbb{C}^4$. Cette base est aussi constituée de vecteurs propres de f_X. Donc f_X est diagonalisable, puisqu'il existe une base de $\mathbb{C}^4$formée de vecteurs propres de f_X

3) Si $X = (1, 2, 3, -2)$, on obtient pour valeurs propres de f_X :

$a + b + c + d = 4$ avec pour vecteur propre associé $(1, 1, 1, 1)$

$a - b + c - d = 4$ avec pour vecteur propre associé $(1, -1, 1, -1)$

$a + ib - c - id = -2 + 4i$ avec pour vecteur propre associé $(1, i, -1, -i)$

$a - ib - c + id = -2 - 4i$ avec pour vecteur propre associé $(1, -i, -1, i)$

Le sous-espace propre associé à 4 est

$Vect((1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1))$, de dimension deux.

Les sous-espaces propres associés à $-2 + 4i$ et à $-2 - 4i$ sont de dimension un.

10.15

Rappelons que les seules valeurs propres possibles d'un projecteur sont 0 et 1.

1) Soit λ valeur propre de f ; il existe un vecteur $x \in E - \{0_E\}$ tel que $f(x) = \lambda x$, c'est-à-dire $p(x) + q(x) = \lambda x$.

Composons par p : $pop(x) + poq(x) = \lambda p(x)$

Or p est un projecteur, donc $pop = p$ et par hypothèse, $poq = qop$.

Donc $p(x) + q(p(x)) = \lambda p(x)$

Donc $q(p(x)) = (\lambda - 1)p(x)$

A cette étape,

∗ soit $p(x) \neq 0_E$ et $\lambda - 1$ est valeur propre de q, projecteur, donc $\lambda - 1 \in \{0, 1\}$, donc $\lambda \in \{1, 2\}$.

∗ soit $p(x) = 0_E$, l'égalité de départ devient : $q(x) = \lambda x$, donc λ est valeur propre de q, projecteur, donc $\lambda \in \{0, 1\}$.

Finalement, en réunissant les deux cas, $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

On conclut que les valeurs propres de f sont dans $\{0, 1, 2\}$.

2) ∗ Si $\text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$,

$\exists x \in E - \{0_E\} / (p(x) = 0_E \text{ et } q(x) = 0_E)$

Alors $f(x) = p(x) + q(x) = 0_E$. De plus, $x \neq 0_E$ donc x est vecteur propre de f pour la valeur propre 0 ; en particulier, 0 est valeur propre de f.

∗ Supposons que 0 est valeur propre de f, alors

$\exists x \in E - \{0_E\} / f(x) = 0_E$

Donc $\exists x \in E - \{0_E\} / p(x) + q(x) = 0_E$

Appliquons p à cette égalité : $\underbrace{pop}_{p}(x) + \underbrace{poq}_{qop}(x) = 0_E$ donc $q(p(x)) = -p(x)$

Par l'absurde, si $p(x) \neq 0_E$, $p(x)$ est vecteur propre de q pour la valeur propre -1, or q est un projecteur donc -1 n'est pas valeur propre de q.

Donc $p(x) = 0_E$, donc $x \in \text{Ker}\, p$.

Par symétrie des rôles de p et q, $x \in \text{Ker}\, q$.

On a montré que $x \in \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$ et $x \neq 0_E$.

Donc $\text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q \neq \{0_E\}$.

∗ On conclut que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q \neq \{0_E\}$.

3) Rappelons que l'image d'un projecteur est égale à l'espace des vecteurs invariants, c'est-à-dire au sous-espace propre pour la valeur propre 1.

∗ Si $Imp \cap Imq \neq \{0_E\}$, on peut trouver un vecteur $x \neq 0_E$ invariant à la fois par p et q. Alors $p(x) = x$ et $q(x) = x$, donc $f(x) = 2x$. Donc 2 est valeur propre de f.

∗ Si 2 est valeur propre de f,

alors $\exists x \in E / (x \neq 0_E \text{ et } f(x) = 2x)$

Donc $p(x) + q(x) = 2x$

Appliquons p à cette égalité : $p(x) + \underbrace{poq}_{qop}(x) = 2p(x)$

Donc $q(p(x)) = p(x)$. Ainsi $p(x)$ est invariant par q, donc $p(x) \in Imq$; mais on a aussi grâce à son expression, $p(x) \in Imp$, donc $p(x) \in Imp \cap Imq$.

Par l'absurde, si on avait $p(x) = 0_E$, on aurait $q(x) = 2x$; comme $x \neq 0_E$, 2 serait valeur propre de q, ce qui est exclu pour un projecteur.

Donc $p(x) \neq 0_E$, donc $Imp \cap Imq \neq \{0_E\}$

∗ On conclut que 2 est valeur propre de f si et seulement si $Imp \cap Imq \neq \{0_E\}$.

10.16

A.

1) $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$

Déterminons le rang de $A - \lambda I_3$:

$$rg(A - \lambda I_3) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2(-1-\lambda)L_2}}{=} rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-2\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 \end{pmatrix} (\odot)$$

$$\underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 2\lambda^2+2\lambda-4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \underbrace{rg\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 2\left(\lambda^2+\lambda-2\right) & 0 \\ 1 & -2\lambda & -1 \end{pmatrix}}_{T(\lambda)}$$

λ est valeur propre de A si et seulement si $rg(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si λ annule l'un des coefficients diagonaux de $T(\lambda)$ si et seulement si $\left(1 - \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0\right)$

si et seulement si $[1 - \lambda = 0 \text{ ou } (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0]$

si et seulement si $[\lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 1]$.

Les valeurs propres de f sont donc 1 et -2.

A est une matrice carrée d'ordre trois. Si elle possédait trois valeurs propres distinctes, on pourrait en conclure que A et u sont diagonalisables. Mais ici, A et u n'ont que deux valeurs propres distinctes. On ne peut donc pas conclure à cette étape, il faut déterminer les sous-espaces propres.

2) ∗ **Recherche de** $E_1(u)$, sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1 :

On peut se placer directement à l'étape ($\odot$) de la méthode du pivot, car on n'a utilisé que les lignes jusqu'à cette étape.

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y - z = 0$$

$E_1(u)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle, c'est donc un hyperplan de E, il a donc pour base deux de ses vecteurs non colinéaires, par exemple $((1,0,1),(1,1,0))$.

$E_1(u) = Vect((1,0,1),(1,1,0))$

∗ **Recherche de** $E_{-2}(u)$, sous-espace propre de u associé à la valeur propre -2 :

$$(x,y,z) \in E_{-2}(u) \Leftrightarrow (A + 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -4x \end{cases}$$

$E_{-2}(u) = \{(x, -x, -4x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = Vect(1, -1, -4)$

3) Notons $\mathcal{B}' = \left(e'_1, e'_2, e'_3\right)$ où $\begin{cases} e'_1 = (1,-1,-4) \\ e'_2 = (1,0,1) \\ e'_3 = (1,1,0) \end{cases}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$rg(P) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$$rg(P) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{=} rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg(P) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} rg\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Donc P est inversible et $\mathcal{B}$' est une base de E.

De plus, $\mathcal{B}$' est formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable

e'_1, e'_2, e'_3 sont des vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres $-2, 1, 1$. La matrice de u dans la base B' est donc $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B.

1) S'il existe un endomorphisme v de E tel que $vov = u$, alors $uov = \underbrace{vov}_{u} ov = vo \underbrace{vov}_{u} = vou$.

2) $u\left(v\left(e'_1\right)\right) = v\left(u\left(e'_1\right)\right) = v\left(-2e'_1\right) = -2v\left(e'_1\right)$

On en déduit que $v\left(e'_1\right) \in E_{-2}(u)$.

Or $E_{-2}(u) = Vect\left(e'_1\right)$, donc $\exists a \in \mathbb{R} / v\left(e'_1\right) = ae'_1$.

Ceci prouve que $v\left(e'_1\right)$ et e'_1 sont colinéaires et que e'_1, non nul, est un vecteur propre de v.

3) Si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1, alors $u(x) = x$, donc $v(u(x)) = v(x)$.

$v \circ u = u \circ v$ donc $u(v(x)) = v\underbrace{(u(x))}_{x} = v(x)$,

donc $v(x) \in E_1(u) = Vect\left(e'_2, e'_3\right)$.

4) Ceci est valable en remplaçant x par e'_2 et e'_3 ; donc

$\exists (b, c) \in \mathbb{R}^2 / v\left(e'_2\right) = be'_2 + ce'_3$. Et, de même,

$\exists (d, k) \in \mathbb{R}^2 / v\left(e'_3\right) = de'_2 + ke'_3$.

La matrice de v dans la base $\mathcal{B}$' est $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & c & k \end{pmatrix}$

5) $vov = u$ donc en passant aux matrices dans la base $\mathcal{B}$', on obtient : $C^2 = D$.

Or $C^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $a^2 = -2$.

6) On a montré dans les questions **B.** 1 à **B.** 5 que s'il existait v endomorphisme de E tel que $vov = u$, on aurait $a^2 = -2$. Or a est réel, donc $a^2 = -2$ est impossible. Donc il n'existe pas d'endomorphisme v de E tel que $vov = u$.

On dit que u n'a pas de racine carrée dans $\mathcal{L}(E)$.

10.17

1) $*$ Soit P dans E ; E, espace des polynômes à coefficients réels, est stable par addition, produit par un réel, produit et dérivation, donc $Q = f(P)$ est encore un polynôme à coefficients réels, donc un élément de E. f est donc à valeurs dans E.

$*$ Soient P_1, P_2 dans E, $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + P_2) &= (2X+1)(\lambda P_1 + P_2) - \left(X^2 - 1\right)(\lambda P_1 + P_2)' \\ &= \lambda(2X+1)P_1 + (2X+1)P_2 \\ &\quad -\lambda\left(X^2-1\right)P'_1 - \left(X^2-1\right)P'_2 \\ &= \lambda\left[(2X+1)P_1(X) - \left(X^2-1\right)P'_1(X)\right] \\ &\quad + \left[(2X+1)P_2(X) - \left(X^2-1\right)P'_2(X)\right] \end{aligned}$$

$$f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

Donc f est linéaire.

$*$ On a prouvé que f est un endomorphisme de E.

2) Considérons un vecteur propre de f de degré n, qu'on écrit : $B = a_n X^n + R$ avec $a_n \neq 0$ et $\deg R < n$; soit λ la valeur propre associée à B. Alors $f(B) = \lambda B$, donc $\deg(f(B)) \leq n$. Or

$$f(B) = (2X+1)(a_n X^n + R) - \left(X^2-1\right)\left(na_n X^{n-1} + R'\right)$$

$f(B) = (2-n)a_n X^{n+1} + S$ avec $\deg S \leq n$

La condition $\deg(f(B)) \leq n$ entraîne $(2-n)\underbrace{a_n}_{\neq 0} = 0$, donc $2 - n = 0$, donc $n = 2$.

On a prouvé qu'un vecteur propre de f est nécessairement un polynôme de degré 2.

3) $*$ Soit B un vecteur propre de f pour la valeur propre 3, alors $f(B) = 3B$. Ceci s'écrit successivement : :

$(2X+1)B - \left(X^2-1\right)B' = 3B$

$(2X-2)B - (X-1)(X+1)B' = 0$

$(X-1)[2B - (X+1)B'] = 0$

$X - 1$ n'étant pas le polynôme nul, on en déduit que

$2B - (X+1)B' = 0$, soit que $B = \frac{1}{2}(X+1)B'$.

Donc $X + 1$ divise B. Donc -1 est racine de B.

Ainsi, comme l'énoncé l'indique, $B = (X+1)^k A$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $A(-1) \neq 0$.

Mais B est de degré deux d'après 2a, donc $k \in \{1, 2\}$

Réécrivons que $2B - (X+1)B' = 0$ avec cette nouvelle expression de B.

$2(X+1)^k A - (X+1)\left[k(X+1)^{k-1}A + (X+1)^k A'\right] = 0$

D'où $(X+1)^k[(2-k)A - (X+1)A'] = 0$

$(X+1)^k$ n'étant pas le polynôme nul, on en déduit :

$(2-k)A = (X+1)A'$.

Si on avait $k = 1$, on obtiendrait $A = (X+1)A'$, d'où

$A(-1) = 0$. Ceci est contraire à l'hypothèse, donc la seule possibilité est que $k = 2$.

Comme B est de degré deux, A est un polynôme constant.

On a montré que si B est vecteur propre de f pour la valeur propre 3, alors $\exists a \in \mathbb{R} / B = a(X+1)^2$.

∗ Réciproquement,

$$\begin{aligned} f\left((X+1)^2\right) &= (2X+1)(X+1)^2 - \left(X^2-1\right)\cdot 2(X+1) \\ &= (2X+1)(X+1)^2 - 2(X+1)^2(X-1) \\ &= (X+1)^2[(2X+1) - 2(X-1)] = 3(X+1)^2 \end{aligned}$$

Donc 3 est valeur propre de f et $Vect\left((X+1)^2\right) \subset E_3(f)$ où $E_3(f)$ est le sous-espace propre de f associé à 3.

∗ Comme on a vu avant que tout vecteur propre de f associé à la valeur propre 3 est un multiple de $(X+1)^2$,

$E_3(f) \subset Vect\left((X+1)^2\right)$.

D'où $E_3(f) = Vect\left((X+1)^2\right)$

4) ∗Soit B un vecteur propre de f pour la valeur propre -1, alors $f(B) = -B$. Ceci s'écrit successivement :

$(2X+1)B - \left(X^2-1\right)B' = -B$

$(2X+2)B - (X-1)(X+1)B' = 0$

$(X+1)[2B - (X-1)B'] = 0$

$X+1$ n'étant pas le polynôme nul, on en déduit que

$2B - (X-1)B' = 0$, soit $B = \frac{1}{2}(X-1)B'$.

Donc $X-1$ divise B. Donc 1 est racine de B.

On peut donc écrire $B = (X-1)^k A$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $A(1) \neq 0$.

Alors $2B - (X-1)B' = 0$ s'écrit :

$2(X-1)^k A - (X-1)\left[k(X-1)^{k-1}A + (X-1)^k A'\right] = 0$

$(X-1)^k[(2-k)A - (X-1)A'] = 0$

$(X-1)^k$ n'étant pas le polynôme nul, on en déduit :

$(2-k)A = (X-1)A'$

Si on avait $k = 1$, on obtiendrait $A = (X-1)A'$, d'où $A(1) = 0$, ce qui est exclu. Donc $k = 2$.

On a montré que si B est vecteur propre de f pour la valeur propre-1, alors $\exists a \in \mathbb{R} / B = a(X-1)^2$.

∗ Réciproquement,

$$\begin{aligned} f\left((X-1)^2\right) &= (2X+1)(X-1)^2 - \left(X^2-1\right)\cdot 2(X-1) \\ &= (X-1)^2[(2X+1) - 2(X+1)] = -(X-1)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que -1 est valeur propre de f, de vecteur propre associé $(X-1)^2$.

∗ Comme tout vecteur propre de f pour -1 s'écrit $a(X-1)^2$ où $a \in \mathbb{R}$, on en déduit comme à la question précédente que $E_{-1}(f) = Vect\left((X-1)^2\right)$

5) ∗ Soit B un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, alors $f(B) = \lambda B$. Ceci s'écrit successivement : :

$(2X+1)B - \left(X^2-1\right)B' = \lambda B$

$(2X+1-\lambda)B = (X-1)(X+1)B'$

Substituons 1 à X dans cette égalité : $(3-\lambda)B(1) = 0$, comme $\lambda \neq 3$, il vient : $B(1) = 0$.

Substituons -1 à X dans cette égalité : $(-1-\lambda)B(-1) = 0$, comme $\lambda \neq -1$, il vient : $B(-1) = 0$.

On a montré que -1 et 1 sont racines de B ; de plus, B est de degré deux, donc $B = a(X-1)(X+1) = a\left(X^2-1\right)$ où $a \in \mathbb{R}$.

∗ Montrons que X^2-1 est vecteur propre de f :

$f\left(X^2-1\right) = (2X+1)\left(X^2-1\right) - 2X\left(X^2-1\right)$

$f\left(X^2-1\right) = \left(X^2-1\right)[(2X+1) - 2X]$

$f\left(X^2-1\right) = \left(X^2-1\right)$

On en déduit que 1 est valeur propre de f, de vecteur propre associé X^2-1.

∗ On a montré avant que tout vecteur propre associé à une valeur propre différente de -1 et 3, par exemple à 1 s'écrit $a\left(X^2-1\right)$.Comme dans les questions précédentes, on montre que $E_1(f) = Vect\left(X^2-1\right)$.

6) a) ∗ g a la même expression que f sur $F = \mathbb{R}_2[X]$ qui est inclus dans E, donc g est linéaire comme f.

∗ F a pour base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. De plus,

$g(1) = 2X+1 \in F$

$g(X) = X(2X+1) - \left(X^2-1\right) = X^2+X+1 \in F$

$g\left(X^2\right) = X^2(2X+1) - 2X\left(X^2-1\right)$

$g\left(X^2\right) = X^2+2X \in F$

Donc $g(F) = Vect\left(g(1), g(X), g\left(X^2\right)\right) \subset F$.

Donc g est à valeurs dans F.

∗ On conclut que g est un endomorphisme de F.

b) On utilise les valeurs de $g(1), g(X), g\left(X^2\right)$ calculées ci-dessous pour écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) D'après les questions 3,4 et 5, f possède trois valeurs propres qui sont $3, -1, 1$. Les vecteurs propres trouvés pour ces valeurs propres sont des polynômes de degré ≤ 2, donc sont éléments de F. g, qui est la restriction de f à F, a donc $3, -1, 1$ pour valeurs propres. F étant de dimension trois, on conclut que g, qui a autant de valeurs propres que $\dim F$, est diagonalisable, donc que ses vecteurs propres forment une base de F, à savoir $\mathcal{B}' = \left((X+1)^2, (X-1)^2, X^2-1\right)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

g a pour matrice dans la base $\mathcal{B}'$: $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'après la formule de changement de base, $D = P^{-1}MP$, d'où $M = PDP^{-1}$.

d) $*$ On montre par récurrence comme dans l'exercice **10.10** que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.

Calculons P^{-1} , par résolution du système de tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & -2 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -4 & 2 & b-2a \\ 0 & 0 & 2 & c-a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_3/2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a/2+c/2 \\ 0 & -4 & 0 & -a+b-c \\ 0 & 0 & 2 & c-a \end{array}\right)$$

Le système est de rang 3 et possède une unique solution, il s'écrit :

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{2}(a+c) \\ -4y = -a+b-c \\ 2z = -a+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}(a+b+c) \\ y = \dfrac{1}{4}(a-b+c) \\ z = \dfrac{1}{2}(-a+c) \end{cases}$$

On déduit de ce calcul que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$*$ Calculons M^n pour $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n & -1 \\ 2\cdot 3^n & -2\cdot(-1)^n & 0 \\ 3^n & (-1)^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{4}$$

$M^n = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$ avec

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n + 2 \\ 2\cdot 3^n - 2(-1)^n \\ 3^n + (-1)^n - 2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 3^n - (-1)^n \\ 2(3^n + (-1)^n) \\ 3^n - (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n - 2 \\ 2(3^n - (-1)^n) \\ 3^n + (-1)^n + 2 \end{pmatrix}$$

Généralités sur les suites réelles

CHAPITRE 11

Plan

11.1 Définitions 287
11.2 Suites convergentes 291
11.3 Limites infinies 298
11.4 Quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels 302
Synthèse 306
Tests et exercices 307
Corrigés des exercices 312

Introduction

Ce premier chapitre sur les suites réelles constitue un approfondissement du programme du lycée. La plus grande partie du cours est consacrée à la notion de limite (finie ou infinie) et aux théorèmes permettant de déterminer la nature et la limite éventuelle d'une suite réelle. Le dernier paragraphe du cours étudie quelques propriétés de la droite réelle et illustre l'intérêt des suites adjacentes et de la dichotomie.

Les suites sont un outil de modélisation de phénomènes discrets ; elles sont notamment d'un usage constant en probabilités, où elles permettent à la fois l'étude des lois discrètes et celle de l'évolution d'un système aléatoire au cours du temps.

Prérequis

- Inégalités.
- Fonctions usuelles.

Objectifs

- Définir les propriétés globales des suites réelles (suite croissante, bornée, ...).
- Maîtriser la notion de limite d'une suite réelle.
- Introduire la notion de borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

11.1 Définitions

11.1.1 Définition d'une suite réelle



On prendra soin de ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n. Ainsi, on n'écrira jamais « la suite u_n », mais bien « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ».

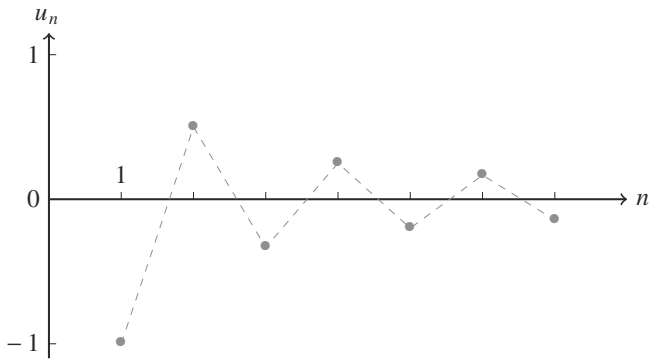
Définition – Suite réelle

On appelle **suite réelle** toute fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout entier naturel n, l'image de n par u sera notée u_n (plutôt que $u(n)$) et appelée **terme d'indice** n de la suite u.
La suite u sera également notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque – On définit également les suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$: ce sont les fonctions u de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$. Une telle suite u est également notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
Plus généralement, on peut définir une suite à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$: il s'agit d'une fonction de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple

$u = \left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle indexée par $\mathbb{N}^*$.



Représentation des premiers termes de la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

11.1.2 Modes de définition d'une suite

On peut définir une suite de différentes manières :

suites définies explicitement

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explicitement lorsqu'on donne, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

Exemple

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explicitement en posant pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}, \quad v_n = \begin{cases} \ln(2n+1) & \text{si } n \geqslant 10 \\ \exp(n) & \text{si } n \leqslant 9 \end{cases}, \quad w_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

suites définies par une relation de récurrence

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une relation de récurrence lorsqu'on donne la valeur du premier terme ou des premiers termes de la suite, et l'expression de u_n en fonction du terme précédent ou des termes précédents.

Exemples

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \cos(n)$.
 Il revient au même de poser : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{n-1}\cos(n-1)$.
 On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 1 (chaque terme est défini en fonction du précédent).
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_0 = 2$, $v_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $$v_{n+2} = n^2 v_n + \sin(v_{n+1}).$$
 Il revient au même de poser : $v_0 = 2$, $v_1 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 2$:
 $$v_n = (n-2)^2 v_{n-2} + \sin(v_{n-1}).$$
 On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 2 (chaque terme est défini en fonction des deux précédents).

Le prochain chapitre donnera quelques outils pour l'étude des suites définies par une relation de récurrence. Le plus souvent, on ne parviendra pas à expliciter de telles suites (c'est-à-dire exprimer u_n en fonction de n), mais il existe des exceptions, notamment les suites arithmétiques et géométriques :

Théorème – Suites arithmétiques et géométriques
Soit a un réel et $u = (u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle.

1. Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n + a$, alors on dit que u est une suite arithmétique de raison a, et on a : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0} + a(n - n_0)$.
2. Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = au_n$, alors on dit que u est une suite géométrique de raison a, et on a : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0}.a^{n-n_0}$.

La raison d'une suite arithmétique ou géométrique est une constante et ne doit donc pas dépendre de l'indice de la suite. Par exemple une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = nu_n$ n'est pas une suite géométrique.

suites définies implicitement

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implicitement lorsqu'on introduit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation.

Exemple

La fonction cosinus définit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Or pour tout entier naturel n, le réel $(-1)^n \exp(-n)$ appartient à l'intervalle $[-1, 1]$. Donc il existe un unique réel u_n dans $[0, \pi]$ vérifiant $\cos(u_n) = (-1)^n \exp(-n)$.
On définit ainsi de façon implicite une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les exercices portant sur les suites définies implicitement font souvent appel au théorème de la bijection, étudié dans le chapitre 15. Le lecteur trouvera dans ce chapitre les exercices portant sur les suites définies implicitement.

11.1.3 Propriétés générales des suites réelles

Définition – Sens de variation d'une suite

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

- **constante** lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$,
- **croissante** lorsque : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$,
- **strictement croissante** lorsque : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} > u_n$,
- **décroissante** lorsque : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$,
- **strictement décroissante** lorsque : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$,
- **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante,
- **strictement monotone** lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

1. Une suite peut être ni croissante ni décroissante, c'est le cas de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Une suite peut être à la fois croissante et décroissante : c'est alors une suite constante.

Méthode 1 Déterminer le sens de variation d'une suite

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut :
- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$,
- lorsque la suite ne s'annule pas, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 en faisant attention au signe de u_n,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

• lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée explicitement sous la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$, étudier le sens de variation de la fonction f.

Exemples d'application

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{n^2(n+1) - n^2 + (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^3 + (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n > 0$ et on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n.\exp(n^2 + 1)$.
On montre facilement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n < 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \exp(n^2 + 1)$. Or $n^2 + 1 > 0$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} < v_n$ (car $v_n < 0$) et donc que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = ne^{-n}$.
On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) > f(n+1)$, c'est-à-dire $w_n > w_{n+1}$. Par conséquent, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

On prendra garde au fait que, dans la définition ci-contre, les réels M et m sont des constantes et ne dépendent pas de l'indice de la suite. Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n$ mais n'est pas majorée.

Définition – Suite majorée, minorée, bornée

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

- **majorée** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$,
- **minorée** lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$,
- **bornée** lorsqu'elle est simultanément majorée et minorée.

Proposition – *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Démonstration

- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.
Alors il existe deux réels m et M tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.
Posons $A = \max(|m|, |M|)$. On a $|M| \leqslant A$ donc $M \leqslant A$, et $|m| \leqslant A$ donc $-A \leqslant m$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-A \leqslant u_n \leqslant A$, soit $|u_n| \leqslant A$. Donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

- Supposons $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. Alors il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ -M \leqslant u_n \leqslant M$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ■

Exemple

La suite de terme général $u_n = \sin(\sqrt{n})$ est bornée car : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(\sqrt{n})| \leqslant 1$.

11.2 Suites convergentes

11.2.1 Définition

Définition – Propriété vraie à partir d'un certain rang

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété P **à partir d'un certain rang**, ou **pour *n* assez grand**, lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P soit vérifiée par tous les termes u_n pour $n \geqslant n_0$.

Exemple

La suite $u = (3/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $u_n \in]0, 1[$ à partir d'un certain rang : en effet, pour tout $n \geqslant 4$, on a $0 < \dfrac{3}{n} < 1$.

Définition – Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

On appelle intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$ tout intervalle de la forme $]a, b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition – Suite convergente

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un réel, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet ℓ pour limite** lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une des conditions équivalentes suivantes :
 - (i) tout intervalle I ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les $n \in \mathbb{N}$, sauf un nombre fini,
 - (ii) pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ, on a $u_n \in I$ à partir d'un certain rang,
 - (iii) pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang.
- Si une suite admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle **converge**, sinon qu'elle **diverge**. Déterminer la **nature d'une suite** signifie déterminer si elle converge ou si elle diverge.

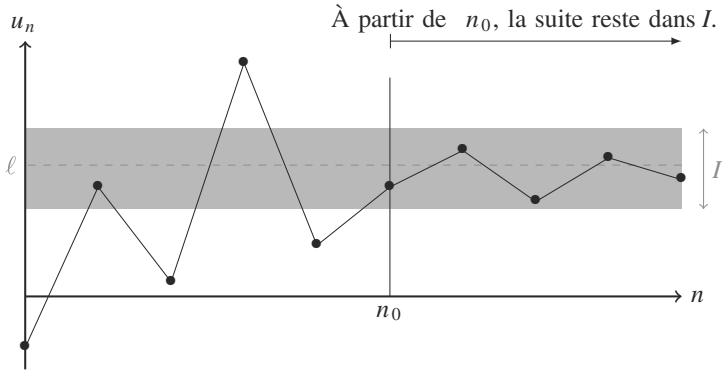


Illustration de la propriété : $u_n \in I$ à partir d'un certain rang.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarques

1. On admettra l'équivalence entre les trois définitions. Toutefois, on peut remarquer que : $|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$: ainsi dans la définition (*iii*) on se restreint aux intervalles I de la forme $I =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
2. Dans (*iii*) on peut remplacer $|u_n - \ell| < \varepsilon$ par $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$: on obtient une définition équivalente.
3. La définition d'une suite convergente est assez délicate à utiliser : seuls les démonstrations du cours et quelques exercices y font appel. Dans la plupart des cas, on démontrera la convergence d'une suite en utilisant les théorèmes du cours : opérations algébriques sur les limites, théorème de la limite monotone, théorème de composition, théorème d'encadrement, suites adjacentes.



Ne pas utiliser la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir montré que la suite était convergente. Pour éviter cette erreur, on peut employer systématiquement la notation $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, qui a l'avantage de ne pouvoir être utilisée qu'une fois la convergence de la suite démontrée.

Théorème – Unicité de la limite

Si une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors celle-ci est unique.
On dit alors que ℓ est **la** limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\ell = \lim u$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration

On raisonne par l'absurde : supposons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette deux limites différentes ℓ et ℓ', avec $\ell < \ell'$.
Posons $m = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$. m est le milieu du segment $[\ell, \ell']$ et on a $\ell < m < \ell'$.
On considère les intervalles disjoints $I =]-\infty, m[$ et $I' =]m, +\infty[$.
I est un intervalle ouvert contenant ℓ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc par définition de la limite, on a $u_n \in I$ à partir d'un certain rang.
De même, I' est un intervalle ouvert contenant ℓ' et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ donc $u_n \in I'$ à partir d'un certain rang.
Ces deux conclusions sont contradictoires puisque I et I' sont disjoints, donc si une suite admet une limite réelle, celle-ci est unique. ■

Théorème – Exemples fondamentaux de suites convergentes

- Toute suite constante converge : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
- Soit α un réel **strictement positif**, alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Soit $a \in]-1, 1[$, alors $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration

- La convergence des suites constantes est évidente.
- Soit $\alpha > 0$, notons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\dfrac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} < n^\alpha \Leftrightarrow (\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}} < n$.
 Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n > (\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}}$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$, soit $\left|\dfrac{1}{n^\alpha}\right| < \varepsilon$, autrement dit, $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Soit $a \in]-1,1[$. Si $a = 0$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n = 0$ donc $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

 Supposons par la suite $a \neq 0$. Notons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

 $|a^n| < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln|a| < \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln|a|}$ car $\ln|a| < 0$.

 Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n > \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln|a|}$, on a $|a^n| < \varepsilon$, autrement dit, $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Le résultat suivant permet de déterminer la nature d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle, en étudiant séparément les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition – *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un nombre réel. On a l'équivalence suivante :*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \iff (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers } \ell.$$

Exemples

1. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ si n est pair, et $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ si n est impair.

 $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

 $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$ donc $\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

 Par conséquent $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = (-1)^n$.

 On a $v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ mais $v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Définition – Limite par valeurs supérieures/inférieures

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ. Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n > \ell$ (resp. $u_n < \ell$), on dit que u **tend vers ℓ par valeurs supérieures** (resp. **inférieures**) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^+$ (resp. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^-$).

Exemple

On a $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ et $2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2^-$.

11.2.2 Propriétés des suites convergentes

Théorème – Opérations algébriques

On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$. Alors :

1. $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b$ et $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a - b$,
2. $u_n.v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a.b$,
3. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.a$,
4. si $a \neq 0$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{b}{a}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

On démontre ici à titre d'exemple le cas de la somme.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon/2 > 0$, donc par définition de la limite, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que :

- pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - a| < \varepsilon/2$, c'est-à-dire $a - \varepsilon/2 < u_n < a + \varepsilon/2$,
- pour tout $n \geqslant n_2$, $|v_n - b| < \varepsilon/2$, c'est-à-dire $b - \varepsilon/2 < v_n < b + \varepsilon/2$.

Donc pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a $a + b - \varepsilon < u_n + v_n < a + b + \varepsilon$, c'est-à-dire $|(u_n + v_n) - (a + b)| < \varepsilon$.

Par conséquent $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b$. ■

Exemple

Montrons que la suite de terme général $u_n = \dfrac{5n^3 + 6n^2 + 1}{n^3 + 3n}$ converge et donnons sa limite.

Pour tout n non nul, on a : $u_n = \dfrac{5 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n^2}}$.

Or $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $5 + \dfrac{6}{n} + \dfrac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5$, et de plus $1 + \dfrac{3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5$.

Théorème – Compatibilité avec la relation d'ordre

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent,

(ii) à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration

Soient a et b les limites respectives de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Raisonnons par l'absurde en supposant $a > b$.

On a $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b - a$. Or $b - a < 0$ donc $]-\infty, 0[$, qui est un intervalle ouvert contenant $b - a$, contient tous les $v_n - u_n$ sauf un nombre fini.

C'est absurde car tous les $v_n - u_n$ sont positifs à partir d'un certain rang. ■

Si on suppose qu'à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, alors en passant à la limite on pourra seulement affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Par exemple les suites de termes généraux $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais elles ont même limite.

On retiendra donc que le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges.

Théorème – Composition des limites

Soient a et b deux réels, I un intervalle contenant a ou admettant a pour borne, $f : I \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Exemples

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc par composition $\cos\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
2. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, comme $\mathrm{e}^x \underset{x\to\ell}{\longrightarrow} \mathrm{e}^\ell$, on en déduit par composition que $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^\ell$.

11.2.3 Théorèmes de convergence

On vient de voir deux théorèmes permettant de montrer qu'une suite converge et de donner sa limite : le théorème portant sur les opérations algébriques et celui sur la composition des limites. Dans les deux cas, on a construit une suite convergente à partir d'une autre suite convergente ou de deux autres suites convergentes.

Dans ce paragraphe, on donne trois autres théorèmes montrant qu'une suite vérifiant certaines propriétés converge. Un seul d'entre eux (le théorème d'encadrement) fournit également la limite.

Théorème d'encadrement

Théorème – Théorème d'encadrement

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et ℓ un nombre réel. On suppose que :

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite ℓ,

(ii) à partir d'un certain rang : $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$,

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Remarque – Le théorème d'encadrement est parfois appelé théorème des gendarmes, mais cette dernière dénomination est rejetée par certains correcteurs.

Démonstration

Soit n_1 un entier naturel tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$.
Soit I un intervalle ouvert quelconque contenant ℓ.
On a $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc il existe deux entiers naturels n_2 et n_3 tels que :

- pour tout $n \geqslant n_2$, $a_n \in I$,
- pour tout $n \geqslant n_3$, $b_n \in I$.

Donc pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2, n_3)$, on a $u_n \in I$. D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. ■

Il ne faut pas confondre le théorème d'encadrement et la compatibilité avec la relation d'ordre : la compatibilité avec la relation d'ordre permet de comparer les limites de suites dont on sait *a priori* qu'elles convergent ; le théorème d'encadrement permet de montrer qu'une suite converge et de donner sa limite.

Méthode 2 Se ramener à une suite de limite nulle

Lorsqu'on souhaite montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il est parfois plus simple de prouver que $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour cela, on peut majorer $|u_n - \ell|$ par une quantité de limite nulle et utiliser le théorème d'encadrement.

Exemple d'application

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ et $a \in [0, 1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - \ell| \leqslant a^n$.

Montrons que la suite de terme général : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ converge vers ℓ.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Pour cela, on va montrer à l'aide du théorème d'encadrement que $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k - \ell\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(v_k - \ell)\right|$.

Donc $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|v_k - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{1}{n} \times \frac{a - a^{n+1}}{1-a}$.

Or $a \in]-1, 1[$ donc $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $\frac{a - a^{n+1}}{1-a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{1-a}$.

Donc $\frac{1}{n} \times \frac{a - a^{n+1}}{1-a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{a - a^{n+1}}{1-a}$ donc par encadrement $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème de limite monotone

Théorème – Limite monotone

Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors elle converge et sa limite ℓ vérifie : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.

Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors elle converge et sa limite ℓ vérifie : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \ell$.

Ce théorème sera démontré page 304.

Exemple

On considère une suite réelle définie par $u_0 \geqslant 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

- Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et positif.
 - par hypothèse, on a bien $u_0 \geqslant 0$
 - soit $n \in \mathbb{N}$, supposons u_n défini et positif, et montrons que u_{n+1} est défini et positif :
 On a $u_n \geqslant 0$ donc $1 + u_n > 0$. Par conséquent $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ est bien défini.
 De plus, $1 + u_n \geqslant 1$ donc $\ln(1 + u_n) \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 0$.

 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et ses termes sont positifs. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est minorée**.
- Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n$.

Or pour tout $x > -1$, on a $\ln(1 + x) \leqslant x$ (inégalité classique que l'on peut démontrer en étudiant $x \mapsto x - \ln(1 + x)$).
On obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante**.
Par conséquent, d'après le théorème de limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Suites adjacentes

Définition – Suites adjacentes

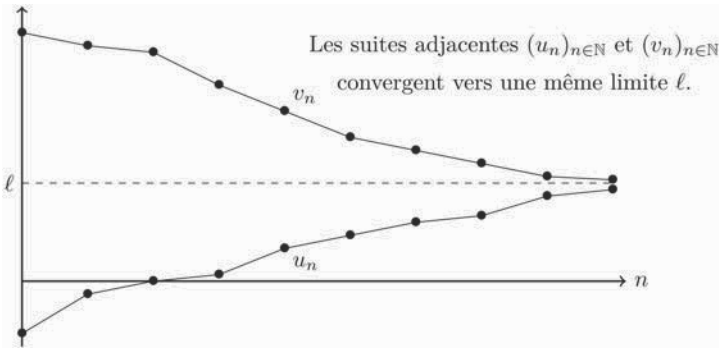
Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** lorsque :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
2. la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple

Les suites u et v de termes généraux $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

Théorème – Si deux suites sont adjacentes alors elles sont convergentes et de même limite.



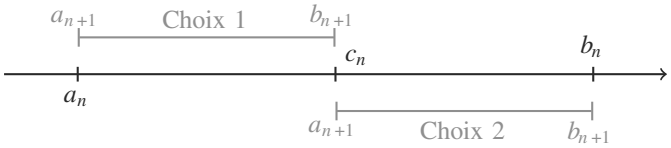
Méthode 3 Construction de suites adjacentes par dichotomie

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

1. on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$,
2. soit $n \in \mathbb{N}$, supposons a_n et b_n construits et soit $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ le milieu de $[a_n, b_n]$. On pose :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}.$$

Le choix se faisant selon les propriétés que l'on veut donner à la limite des deux suites.



Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites sont adjacentes. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par construction :

$$a_{n+1} \geqslant a_n, \quad b_{n+1} \leqslant b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ce procédé de construction de suites adjacentes s'appelle **dichotomie**.

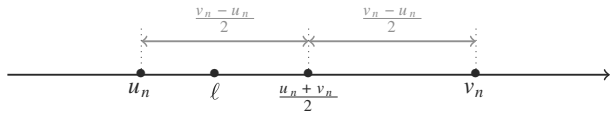
La construction de suites adjacentes par dichotomie nous permettra de démontrer certaines propriétés de $\mathbb{R}$ dans le paragraphe 11.4. Comme nous le verrons dans les exercices, elle est également utilisée pour déterminer une valeur approchée d'une solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$. À cette fin, la proposition suivante est très utile.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Proposition – *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. On note ℓ leur limite commune. Alors :*

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$,

(ii) $\dfrac{u_n + v_n}{2}$ *est une valeur approchée de* ℓ *à* $\dfrac{v_n - u_n}{2}$ *près.*



Démonstration

(i) Soit n un entier naturel quelconque. Pour tout $p \geqslant n$, on a : $u_n \leqslant u_p$ et $v_n \geqslant v_p$.
Par passage à la limite quand $p \to +\infty$, il vient : $u_n \leqslant \ell$ et $v_n \geqslant \ell$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ donc $u_n - \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant \ell - \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant v_n - \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

D'où $-\dfrac{v_n - u_n}{2} \leqslant \ell - \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2}$, et donc : $\left|\ell - \dfrac{u_n + v_n}{2}\right| \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2}$.

Cela signifie bien que $\dfrac{u_n + v_n}{2}$ est une valeur approchée de ℓ à $\dfrac{v_n - u_n}{2}$ près. ■

11.3 Limites infinies

11.3.1 Définition

Définition – Ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Définition – Suite admettant $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :

(i) ***u* tend vers $+\infty$** lorsque, pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a à partir d'un certain rang $u_n \geqslant A$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(ii) ***u* tend vers $-\infty$** lorsque, pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a à partir d'un certain rang $u_n \leqslant A$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim u = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

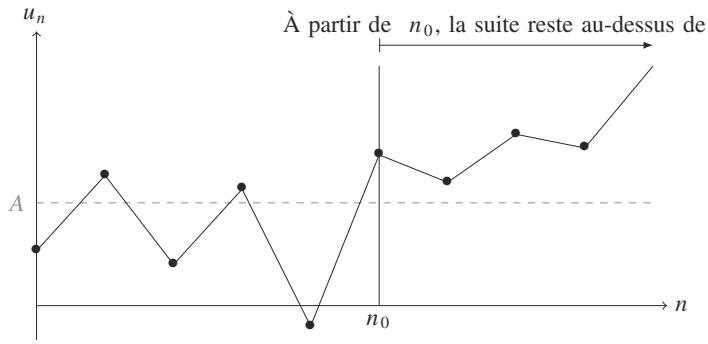
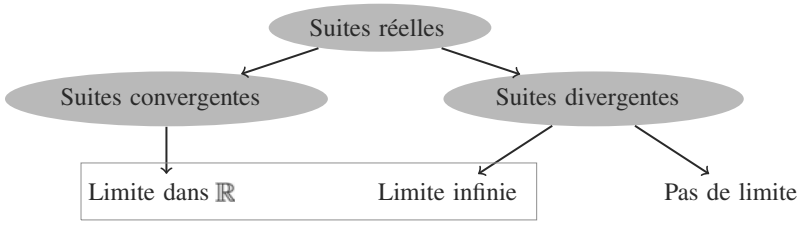


Illustration de la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Une suite admettant $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite est une suite **divergente**.



Suites ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$

Théorème – Exemples fondamentaux de suites admettant $+\infty$ pour limite

- Soit α un réel **strictement positif**, alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Soit $a \in]1, +\infty[$, alors $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration

- Soit $\alpha > 0$. Pour tout $A \leqslant 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^\alpha \geqslant A$.
 Par ailleurs, pour tout $A > 0$, on a : $\forall n \geqslant A^{\frac{1}{\alpha}},\ n^\alpha \geqslant A$.
 Pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $n^\alpha \geqslant A$ à partir d'un certain rang, donc $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour tout $A \leqslant 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n \geqslant A$.
 Pour tout $A > 0$, notons que : $a^n \geqslant A \ \Leftrightarrow\ n\ln(a) \geqslant \ln(A) \ \Leftrightarrow\ n \geqslant \dfrac{\ln(A)}{\ln(a)}$.
 Ainsi pour tout $A > 0$ et pour tout $n \geqslant \dfrac{\ln(A)}{\ln(a)}$, on a $a^n \geqslant A$.
 Pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $a^n \geqslant A$ à partir d'un certain rang, donc $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ■

Proposition – *Toute suite réelle admettant $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite est non majorée (resp. non minorée).*

Démonstration

Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée revient à démontrer que, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M$.
Soit $M \in \mathbb{R}$, posons $A = M + 1$, par définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A$. En particulier $u_{n_0} > M$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée. ■

11.3.2 Propriétés des suites admettant une limite infinie

Opérations algébriques

Théorème – Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les tableaux qui suivent indiquent les limites éventuelles de la somme, la différence, le produit, l'inverse ou le quotient de u et v, sauf dans certains cas notés **F.I** (forme indéterminée) où l'on ne sait pas conclure *a priori* si la suite admet une limite ou non, et si la limite éventuelle est finie ou infinie.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – Dans le cas d'une forme indéterminée, seule une étude spécifique permet de conclure.

Limite de λu_n

λ \ $\lim u$	$-\infty$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	λa	$-\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0
$\lambda > 0$	$-\infty$	λa	$+\infty$

Limite éventuelle de $u_n + v_n$

$\lim u$ \ $\lim v$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$

Limite éventuelle de $u_n - v_n$

$\lim u$ \ $\lim v$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$a - b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Limite éventuelle de $u_n.v_n$

$\lim u$ \ $\lim v$	$-\infty$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
$a = 0$	**F.I.**	0	0	0	**F.I.**
$a > 0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$

Limite de $1/v_n$

$\lim v$	$-\infty$	0^-	$b \in \mathbb{R}^*$	0^+	$+\infty$
$\lim 1/v$	0^-	$-\infty$	$1/b$	$+\infty$	0^+

Limite éventuelle de u_n/v_n

$\lim u$ \ $\lim v$	$-\infty$	$b < 0$	0^-	0^+	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$a < 0$	0^+	a/b	$+\infty$	$-\infty$	a/b	0^-
0	0	0	**F.I.**	**F.I.**	0	0
$a > 0$	0^-	a/b	$-\infty$	$+\infty$	a/b	0^+
$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Exemple

On étudie ici dans différents cas $u_n - v_n$ lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (forme indéterminée « $+\infty - \infty$ »).

- Soit $a \in \mathbb{R}$, si $u_n = a + n$ et $v_n = n$, on a $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$: on peut donc avoir convergence vers un réel quelconque.
- Si $u_n = n^2$ et $v_n = n$ alors $u_n - v_n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$. Or $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $1 - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: on peut donc avoir divergence vers $+\infty$ (en échangeant les valeurs de u_n et v_n, on aurait divergence vers $-\infty$).
- Si $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = n$, on a $u_n - v_n = (-1)^n$: ici $u_n - v_n$ diverge et n'a pas de limite (on vérifiera que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ dans les exemples du paragraphe 11.3.3).

Remarque – Supposons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 sans garder un signe constant (autrement dit, elle ne tend vers 0 ni par valeurs supérieures ni par valeurs inférieures) et que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$. Alors la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et n'a pas de limite.

Par exemple, si $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ alors :

$$\frac{1}{v_{2n}} = 2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{v_{2n+1}} = -(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

donc $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien divergente et n'a pas de limite.

Composition

Le théorème suivant généralise le théorème de composition vu page 294 au cas où les limites sont dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème – Composition des limites

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, I un intervalle contenant a ou admettant a pour borne, $f : I \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Exemple

$n^2 + 3n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 + 3n > 0$ et $\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par composition $\ln(n^2 + 3n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

11.3.3 Théorèmes montrant qu'une suite admet une limite infinie

Théorème – Théorème de comparaison

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(ii) Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Étudions le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Pour tout réel A, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A$.
Or il existe n_1 tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ u_n \leqslant v_n$. Donc : $\forall n \geqslant \max(n_0, n_1),\ v_n \geqslant A$.
Autrement dit, pour tout réel A, on a $v_n \geqslant A$ à partir d'un certain rang : donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ■

Exemples

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+(-1)^n \geqslant n-1$, or $n-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $n+(-1)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n! = n \times (n-1)!$, or $(n-1)! \geqslant 1$, donc $n! \geqslant n$, d'où $n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Théorème – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration

Étudions le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée par A, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc, pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \geqslant u_{n_0} > A$. Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ■

Remarque – On en déduit que toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple une suite croissante est soit majorée et donc convergente, soit non majorée et admet donc $+\infty$ pour limite.

11.4 Quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels

11.4.1 Partie entière d'un nombre réel

Définition – Partie entière d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ (ou $Ent(x)$ ou $E(x)$) l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Le nombre $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier minorant x.

Remarque – On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \ \Leftrightarrow\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$



Par convention, $\lfloor x \rfloor$ est plus petit que x. Lorsque x est un réel positif, $\lfloor x \rfloor$ est donné par le développement décimal tronqué à la virgule : $\lfloor 3,1415 \rfloor = 3$. Ce n'est plus le cas lorsque x est un réel strictement négatif (sauf lorsque x est un entier relatif). Par exemple : $\lfloor -3,14159 \rfloor = -4$ et non -3.

11.4.2 Borne supérieure, borne inférieure

Définitions

Définition – Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est une **borne supérieure** de A si :

(i) pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$ (M est un majorant de A) ;

(ii) si M' est un autre majorant de A alors $M \leqslant M'$ (M est le plus petit majorant de A).

Définition – Borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est une **borne inférieure** de A si :

(i) pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$ (m est un minorant de A) ;

(ii) si m' est autre un minorant de A alors $m' \leqslant m$ (m est le plus grand minorant de A).

Proposition – *Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure) alors celle-ci est unique : on la note* $\sup A$ *(resp.* $\inf A$*)*

Démonstration

Démontrons par exemple l'unicité de la borne supérieure.
Soit M_1 et M_2 deux bornes supérieures de A.
M_1 est le plus petit majorant de A et M_2 est un majorant de A donc $M_1 \leqslant M_2$.
De même, M_2 est le plus petit majorant de A et M_1 est un majorant de A donc $M_2 \leqslant M_1$.
Par conséquent $M_1 = M_2$. ■

Définition – Maximum, minimum d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A admet un **maximum** lorsque A admet une borne supérieure et que $\sup A \in A$. On note alors $\max A = \sup A$.
- On dit que A admet un **minimum** lorsque A admet une borne inférieure et que $\inf A \in A$. On note alors $\min A = \inf A$.

Exemples

1. $]0, +\infty[$ admet 0 pour borne inférieure mais n'admet pas de minimum car $0 \notin]0, +\infty[$.
 De plus, l'intervalle $]0, +\infty[$ n'admet pas de borne supérieure car il n'est pas majoré.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $I = [a, b[$ admet a pour borne inférieure et b pour borne supérieure. Comme $a \in I$, a est le minimum de I ; en revanche, $b \notin I$ donc I n'a pas de maximum.
3. Soit $A = \left\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ l'ensemble des inverses des entiers naturels non nuls.
 1 est un majorant de A et $1 \in A$ donc A admet 1 pour maximum. On note $1 = \max A$ ou $1 = \max\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$.
 0 est un minorant de A et pour tout minorant m de A, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m \leqslant \frac{1}{n}$, d'où en passant à la limite quand $n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$: $m \leqslant 0$.
 0 est donc le plus grand des minorants de A, donc A admet 0 pour borne inférieure. On note $0 = \inf A$ ou $0 = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$. Enfin, A n'admet pas de minimum car $0 = \inf A \notin A$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème d'existence

Toute partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure (resp. inférieure) est par définition majorée (resp. minorée). Le théorème suivant établit la réciproque :

Théorème – Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Démonstration

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. $A \neq \emptyset$, on peut donc choisir a un élément de A.
Notons E l'ensemble des majorants de A. Alors $E \neq \emptyset$ car A est majorée et on peut donc choisir b un élément de E.
Si a est également élément de E alors a est le maximum de A et le théorème est démontré ; par la suite, on va donc supposer que $a \notin E$.

- On construit par dichotomie deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin E$ et $b_n \in E$.
 - On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $a_n \notin E$ et $b_n \in E$ construits. On pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
 Si $c_n \in E$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$; si $c_n \notin E$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
 Dans les deux cas, on aura $a_{n+1} \notin E$ et $b_{n+1} \in E$.

 On obtient bien deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin E$ et $b_n \in E$, et on note ℓ leur limite commune.
- Montrons que ℓ est la borne supérieure de A.

Soit x un élément quelconque de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_n \in E$ donc $x \leqslant b_n$.
En passant à la limite quand $n \to +\infty$, il vient : $x \leqslant \ell$, donc ℓ est un majorant de A.
Soit maintenant M un autre majorant quelconque de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \notin E$ donc $a_n < M$ (sinon a_n serait lui aussi un majorant de A).
En passant à la limite quand $n \to +\infty$, il vient $\ell \leqslant M$ donc ℓ est le plus petit des majorants de A.
Donc A admet bien une borne supérieure et $\ell = \sup A$.
La démonstration est analogue pour les parties de $\mathbb{R}$ non vides et minorées. ■

Application : démonstration du théorème de limite monotone

Démonstration

Étudions le cas d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée.
Posons A l'ensemble des valeurs prises par u : $A = \{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. u est majorée donc A également. En outre $A \neq \emptyset$.
Donc A admet une borne supérieure, que l'on note ℓ. Montrons alors que u converge vers ℓ.
On sait déjà que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$ car ℓ est un majorant de A.
Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert quelconque contenant ℓ : on a $a < \ell < b$.
Comme ℓ est le plus petit des majorants de A, alors a n'est pas un majorant de A donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a < u_{n_0} \leqslant \ell$.
Or u est croissante, donc pour tout $n \geqslant n_0$, $a < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell$ et *a fortiori* $u_n \in]a, b[$.
Ainsi u converge vers ℓ. ■

11.4.3 Approximation d'un nombre réel par une suite de rationnels

Théorème – Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Q}$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{Q}$ alors la suite constante u définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x$, converge vers x.

Supposons par la suite que $x \notin \mathbb{Q}$. On va construire par dichotomie deux suites de rationnels adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < x < b_n$.

– posons $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et $b_0 = \lfloor x \rfloor + 1$.
On a : $a_0 \leqslant x < b_0$. Or $a_0 \in \mathbb{Z}$ donc $a_0 \in \mathbb{Q}$, et $x \notin \mathbb{Q}$, donc $a_0 < x < b_0$.

– soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $a_n \in \mathbb{Q}$ et $b_n \in \mathbb{Q}$ donnés tels que $a_n < x < b_n$.
Posons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. c_n est un rationnel tel que $a_n < c_n < b_n$. Nécessairement $x \neq c_n$.
Si $a_n < x < c_n$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$; si $c_n < x < b_n$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
Dans les deux cas, on aura : $a_{n+1} \in \mathbb{Q}$, $b_{n+1} \in \mathbb{Q}$ et $a_{n+1} < x < b_{n+1}$.

On obtient bien deux suites de rationnels adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < x < b_n$. Soit ℓ leur limite commune. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n < x < b_n$ donc par passage à la limite : $\ell \leqslant x \leqslant \ell$, donc $\ell = x$.
On a donc construit deux suites de rationnels convergeant vers x. ■

Remarque – Le lecteur trouvera une autre démonstration de ce théorème à l'exercice 25, où on construit explicitement une suite de rationnels convergeant vers x.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Synthèse

Savoirs

- expressions des suites arithmétiques et géométriques,
- théorèmes permettant de montrer qu'une suite converge et de déterminer sa limite : opérations algébriques, composition, théorème d'encadrement, étude des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$,
- théorèmes permettant de montrer qu'une suite converge mais sans en donner la limite : limite monotone, convergence des suites adjacentes,
- théorèmes permettant de montrer qu'une suite admet une limite infinie : opérations algébriques, composition, comparaison, suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée),
- théorème permettant de comparer les limites finies de deux suites convergentes : passage à la limite,
- toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure),
- approximation d'un nombre réel par une suite de rationnels.

Savoir-faire

- déterminer le sens de variation d'une suite,
- déterminer la nature d'une suite et sa limite éventuelle,
- construire par dichotomie des suites adjacentes.

Mots-clés

- Suite réelle,
- suite croissante/décroissante,
- suite majorée/minorée/bornée,
- suite convergente,
- limite d'une suite convergente,
- suites adjacentes,
- suite tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$,
- partie entière d'un nombre réel,
- borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Tests de connaissances

11.1 Donner la définition :
a) d'une suite non croissante,
b) d'une suite non majorée,
c) d'une suite non bornée.

11.2 Soit q un nombre réel. Discuter en fonction de q la nature et la limite éventuelle de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de réels strictement positifs. Que peut-on dire de la limite de la suite ?

11.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif. Montrer que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

11.5 Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Quel théorème permet d'obtenir la convergence et la limite de la suite ?

11.6 On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers 1 et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = v_n + 2u_n$.

Quelle est l'erreur dans le raisonnement suivant ?
Notons ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n + 2u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 2\ell$. Donc par unicité de la limite, il vient $\ell = 1 + 2\ell$ donc $\ell = -1$. Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

11.7 Recherche de contre-exemples

Pour chacune des affirmations suivantes, montrer qu'elle est fausse en donnant un contre-exemple.
a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $u_n = \ell$ à partir d'un certain rang.
b) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
c) Si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
d) Si $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

11.8 Vrai ou faux ?

a) Si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \neq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
c) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.
d) Si une suite est croissante alors elle est minorée.
e) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ln(n)$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
f) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
g) Si $a \in]-1, 1[$ alors $\sin(n + a^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(n)$.
h) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent chacune une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ et si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors les deux suites ont la même limite.

11.9 QCM

Chaque question admet au moins une bonne réponse.
1) Une suite de limite $+\infty$ est une suite :
a) convergente,
b) divergente,
c) ni convergente, ni divergente.
2) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_1 = 2$ et $u_2 = 1$ est :
a) décroissante,
b) bornée,
c) non croissante.
3) Quelle est la bonne formulation ?
a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n converge,
b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorées, alors :
a) $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée,
b) $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée,
c) $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

11.10 Donner un exemple de suite :
a) croissante et majorée,
b) convergente et non monotone,
c) ni majorée, ni minorée,
d) non croissante et de limite $+\infty$ (on essaiera de trouver une suite qui n'est même pas croissante à partir d'un certain rang).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 311.

■ Propriétés générales des suites réelles

11.11 ◎

Déterminer le sens de variation des suites définies par :

a) $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{3}{k^2}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$,

b) $v_n = \frac{\ln(n)}{n}$ où $n \geqslant 3$,

c) $w_0 = a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n \sin\left(\frac{\pi}{3^{n+1}}\right)$.

11.12

Pour chacune des suites, déterminer si elle est majorée, minorée, bornée :

a) $u_n = -n^2 + n$,

b) $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) - \frac{\exp(\sqrt{n})}{\exp(\sqrt{n+1})}$,

c) $w_n = \frac{\exp\left(-\frac{1}{n^2}\right) - \sin(n+1)}{\ln(3 + \cos(n))}$.

■ Recherche de limites

11.13

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Montrer que $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

11.14

Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de termes généraux :

a) $u_n = \sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+2n+1}$

b) $v_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

c) $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $r_n = \frac{n!}{n^n}$

e) $s_n = -2n^2 + n^2\cos(3n)$

f) $t_n = 2 + \cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\tan\left(\sin(n^2 - n + 1)\right)$

11.15 ◎

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

11.16 Série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée série harmonique.

a) Déterminer le sens de variation de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

c) En déduire la nature et la limite éventuelle de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

11.17 ◎

On pose $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$$

a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs positives.

b) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

■ Suites adjacentes

11.18

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ v_0 = 3 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n + 5v_n) \end{cases}$$

a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Calculer a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Que peut-on en déduire à l'aide de la question précédente ?

c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11.19 Moyenne arithmético-géométrique ◎

Soient a et b deux réels positifs tels que $a \leqslant b$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels a_n et b_n sont bien définis et vérifient $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

b) En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b).

c) Écrire un programme PASCAL demandant à l'utilisateur a, b et n et affichant à l'écran a_n et b_n.

11.20 Constante d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

a) Démontrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

b) À l'aide de l'inégalité précédente, prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note γ leur limite commune (γ est appelée constante d'Euler).

c) Écrire un programme PASCAL demandant à l'utilisateur un réel strictement positif ε et affichant à l'écran une valeur approchée de γ à ε près.

11.21 Utilisation de la dichotomie pour calculer une valeur approchée de la solution d'une équation ◎

a) Établir le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x$.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = 1$ et que $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

c) Construire à l'aide du procédé de dichotomie, deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ et de termes initiaux : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

d) Écrire un programme PASCAL demandant à l'utilisateur un réel strictement positif ε et affichant à l'écran une valeur approchée de ℓ à ε près.

■ Exercices utilisant la définition de la limite

11.22 ◎

a) Démontrer que toute suite convergente est bornée.

b) Prouver à l'aide d'un contre-exemple qu'une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

11.23 ◎

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et ℓ un réel positif tels que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

a) Si $\ell < 1$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Si $\ell > 1$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Si $\ell = 1$, donner un exemple où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et un exemple où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

■ Partie entière. Borne inférieure ou supérieure

11.24

a) Montrer que si x et y sont deux réels positifs alors $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor xy \rfloor$.

b) Montrer que si x et y sont deux réels négatifs, alors $\lfloor xy \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$.

c) Que peut-on dire lorsque x et y sont de signes opposés ?

11.25

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

a) Expliciter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $x = \pi$ (on rappelle que $\pi \simeq 3,14159265$).

b) On revient au cas général. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels et qu'elle converge vers x.

11.26

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il admet une borne inférieure, une borne supérieure, un minimum, un maximum.

a) $A = \left\{ \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$,

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left\lfloor x^2 \right\rfloor = 2 \right\}$,

c) $C = \left\{ n^m \,\middle|\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \right\}$,

d) $D = \left\{ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \,\middle|\, (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \right\}$.

11.27 ◎

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Démontrer que A admet un minimum si et seulement si A est non vide.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exercices d'approfondissement

11.28 Théorème de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers un réel ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et on cherche à montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge elle aussi vers ℓ.

1) On étudie d'abord le cas particulier où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par ℓ.

b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ' vérifiant $\ell' \geqslant \ell$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{2n} \leqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$. En déduire que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2) On revient désormais au cas général et on ne suppose plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante.

a) On suppose que $\ell = 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0 + 1$:

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{n - n_0}{n} \times \frac{\varepsilon}{2}$$

En remarquant que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, en déduire que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Étudier le cas général où ℓ est un réel quelconque. On pourra considérer la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

11.29 d'après oral ESCP 2008

Si u et v sont deux suites réelles, on appelle *produit de convolution* de u et v la suite $w = u \star v = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

1) Soient a et b des réels fixés. On pose, dans cette question uniquement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^n}{n!} \text{ et } v_n = \frac{b^n}{n!}.$$

Déterminer le produit de convolution $w = u \star v$ des suites u et v.

2) On suppose que u et v sont deux suites convergentes. Le produit de convolution $u \star v$ est-il nécessairement convergent ?

3) On suppose, pour cette question seulement, que $u = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la suite v est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution.

a) Montrer que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_{2n} \leqslant v_0 u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0 u_n + 2v_{n+1}$$

c) En déduire que le produit de convolution w converge, et préciser sa limite.

4) On suppose que $u = \left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la suite v est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution. Montrer, à l'aide de la question précédente, que la suite w converge, et préciser sa limite.

11.30 ◎

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $a_0 = 1$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k}.$$

1 a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} \leqslant \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant b_n < 1$.

c) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

d) Soient $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$0 \leqslant \ell - b_p \leqslant \frac{1}{a_p}.$$

2 a) Soit $q \in]1, +\infty[$. On suppose dans cette question et la suivante que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = q^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer b_n en fonction de q et n.

b) En déduire la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Soit $c \in [0, 1[$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers c.

d) Peut-on trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 ?

Indications

11.11 a) Déterminer le signe de u_n, puis comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

b) Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $[3, +\infty[$.

c) Déterminer le signe de $w_{n+1} - w_n$ en fonction de celui de a.

11.15 Encadrer u_n en faisant intervenir le plus petit terme et le plus grand terme de la somme.

11.17 a) Raisonner par récurrence.

b) Établir et exploiter la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n.$$

11.19 a) Raisonner par récurrence.

b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ensuite, montrer que les deux suites convergent. Enfin, prouver qu'elles ont même limite, et en déduire qu'elles sont adjacentes.

11.21 b) On commencera par montrer qu'il existe un unique $\ell \in [-1, +\infty[$ tel que $f(\ell) = 1$, puis que $f(x) = 1$ n'a pas de solution sur $]-\infty, -1[$. Pour conclure, on calculera $f(0)$ et $f(1)$.

c) Construire par récurrence, en suivant le procédé de dichotomie, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

11.22 a) Montrer d'abord qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \ell - 1 < u_n < \ell + 1$, ce qui prouvera que la suite est bornée à partir du rang n_0. Il restera alors à prendre en compte les premiers termes $u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}$.

11.23 a) Montrer qu'il existe $a < 1$ tel que $u_n \leqslant a^n$ à partir d'un certain rang.

c) On peut chercher u_n sous la forme $u_n = \exp(v_n)$, en remarquant que $\sqrt[n]{u_n}$ sera alors égal à $\exp(\frac{v_n}{n})$.

11.27 Lorsqu'on suppose A non vide, on montrera dans un premier temps que A admet une borne inférieure m, puis on pourra raisonner par l'absurde en supposant $m \notin A$ et en en déduisant qu'il existe $n \in A$ tel que $m < n < \lfloor m \rfloor + 1$.

11.30 **1)** c) Utiliser le théorème de limite monotone.

d) Montrer que : $\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant b_n - b_p \leqslant \dfrac{1}{a_p}$.

2) d) Montrer que $\ell < 1$. On étudiera d'abord le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{p-1} < a_p$ et on montrera alors que $b_p < \dfrac{1}{a_0} - \dfrac{1}{a_p}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

11.1

a) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non croissante lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > u_{n+1}$.

b) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée lorsque, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$.

c) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée lorsqu'elle est non majorée ou non minorée, c'est-à-dire lorsque, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$ ou lorsque, pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < m$.

11.2

- si $q \in]-1, 1[$, on sait que $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- si $q = 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.
- si $q > 1$, on sait que $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et tend vers $+\infty$.
- si $q = -1$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ q^{2n} = 1$ et $q^{2n+1} = -1$. Donc $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et n'a pas de limite.
- si $q < -1$ alors $q^2 > 1$.

Donc d'une part $q^{2n} = (q^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et d'autre part $q^{2n+1} = q \times (q^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Donc $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et n'a pas de limite.

11.3

La limite d'une suite convergente de réels strictement positifs est un réel **positif ou nul**. En effet, les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite : les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite.

11.4

$I =]0, +\infty[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ, donc, par définition de la limite, on a à partir d'un certain rang : $u_n \in I$, c'est-à-dire $u_n > 0$.

11.5

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le théorème d'encadrement permet donc de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Le théorème de passage à la limite ne peut pas être utilisé ici, puisque pour appliquer ce théorème, il faudrait savoir *a priori* que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

11.6

Le raisonnement est faux car on introduit la limite $\ell \in \mathbb{R}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sans avoir montré que cette suite était convergente.

11.7

a) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pourtant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \neq 0$.

b) Il suffit de choisir des suites adjacentes. Posons, par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ et pourtant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas croissante (elle est strictement décroissante).

c) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n)$.

On a $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge (elle tend vers $+\infty$).

d) Posons, pour tout n pair : $u_n = n$ et $v_n = 0$, et pour tout n impair : $u_n = 0$ et $v_n = n$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = n$ donc $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pourtant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n} = 0$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.

11.8

a) VRAI : la définition avec les $\varepsilon > 0$ de $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et celle de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ sont identiques.

b) FAUX : par exemple $|(-1)^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ pourtant la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

c) FAUX : posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{2}{n}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < v_n$ et par ailleurs $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais pourtant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

d) VRAI : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0.

e) FAUX : la suite définie par $u_n = \ln(n)$ vérifie la condition, mais elle n'est pas majorée puisqu'elle tend vers $+\infty$. Un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ devrait être constant par rapport à n, autrement dit n ne devrait pas apparaître dans son expression.

f) FAUX : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après le théorème de limite monotone car elle est décroissante et minorée, mais sa limite n'est pas nécessairement 0. Par exemple, la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ est décroissante et minorée par 0, mais elle converge vers 1.

g) FAUX : l'écriture $\sin(n + a^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(n)$ n'a aucun sens puisque la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas dépendre de l'indice n.

h) VRAI : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (u_n - v_n) + v_n$. Or $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ donc les opérations algébriques sur les limites affirment que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

11.9

1) Réponse b).

2) Réponse c).

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_1 = 2$ et $u_2 = 1$ est non-croissante puisque $u_1 > u_2$. Il est impossible de dire si elle est décroissante ou bornée en ne connaissant que deux de ses termes.

3) Réponse b).

4) Réponse a).

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant majorées, il existe deux réels M_1 et M_2 tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M_1$ et $v_n \leqslant M_2$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n \leqslant M_1 + M_2$.

Les deux autres réponses sont fausses : par exemple les suites de termes généraux $u_n = -1$ et $v_n = -n$ sont majorées par 0, mais $u_n - v_n = n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n v_n = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc ni $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ni $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est majorée.

11.10

a) La suite de terme général $u_n = -\dfrac{1}{n}$ est croissante et majorée (par 0).

b) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
On a $u_{2n} = \dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} > u_{2n+1}$ et $u_{2n+1} < u_{2n+2}$ donc la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

c) Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n n$.
On a $u_{2n} = 2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Par ailleurs, $u_{2n+1} = -(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

d) Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + (-1)^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n-1$ or $n-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par comparaison, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 2n+1$ et $u_{2n+1} = 2n$ donc $u_{2n} > u_{2n+1}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

11.11

a) Déterminons d'abord le signe de u_n. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - \dfrac{3}{k^2} = \dfrac{k^2-3}{k^2}$. Cette quantité est strictement négative lorsque $k = 1$ et strictement positive lorsque $k \geqslant 2$. Donc u_n est un produit de n facteurs dont un est strictement négatif, et les autres strictement positifs. D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{3}{(n+1)^2} < 1$ donc $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$

b) Étudions $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $I = [3, +\infty[$. f est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. $f'(x)$ est donc du signe de $1 - \ln(x)$. Or pour tout $x \in I$, on a $x > \mathrm{e}$ (car $\mathrm{e} \simeq 2,7$) donc $\ln(x) > \ln(\mathrm{e}) = 1$.
Ainsi $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur I.
On en déduit que $\forall n \geqslant 3, f(n+1) < f(n)$ ce qui signifie que $\boxed{(v_n)_{n\geqslant 3} \text{ est strictement décroissante.}}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = w_n(\sin\left(\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\right) - 1)$.
• Déterminons le signe de w_n : on va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n a le signe de $w_0 = a$.

• la propriété est vraie au rang initial,

• soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que w_n est du signe de a, montrons que w_{n+1} est également du signe de a. On a $\dfrac{\pi}{3^{n+1}} \in]0, \dfrac{\pi}{3}]$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\right) > 0$.
Ainsi $w_{n+1} = w_n \sin\left(\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\right)$ est du même signe que w_n, c'est-à-dire que a.

• Déterminons maintenant le signe de $\sin\left(\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\right) - 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\pi}{3^{n+1}} \in]0, \dfrac{\pi}{3}]$ donc $\dfrac{\pi}{3^{n+1}} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ et ainsi $\sin\left(\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\right) < 1$. Donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\right) - 1 < 0$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n$ est du signe opposé à celui de a. D'où :

si $a > 0$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ;
si $a = 0$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 ;
si $a < 0$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

11.12

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n(n-1)$. Or on a $-n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $n-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi :

$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas minorée, et donc pas bornée.}}$

En revanche, $u_0 = 0$ et pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 \geqslant 0$ et donc $u_n = -n(n-1) \leqslant 0$. Par conséquent :

$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée par 0.}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant 1 + \dfrac{(-1)^n}{2} \leqslant \dfrac{3}{2}$ donc par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, il vient :
$\ln(\frac{1}{2}) \leqslant \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{2}) \leqslant \ln(\frac{3}{2})$.
Par ailleurs, $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$ donc par croissance de l'exponentielle $0 < \exp(\sqrt{n}) \leqslant \exp(\sqrt{n+1})$ et ainsi $0 < \dfrac{\exp(\sqrt{n})}{\exp(\sqrt{n+1})} \leqslant 1$.
Donc $-1 \leqslant -\dfrac{\exp(\sqrt{n})}{\exp(\sqrt{n+1})} < 0$.
Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(\frac{1}{2}) - 1 \leqslant v_n < \ln(\frac{3}{2})$. Ainsi

$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée et majorée, et donc bornée.}}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leqslant \dfrac{|\exp(-1/n^2)| + |\sin(n+1)|}{|\ln(3+\cos(n))|}$.
Or $0 < \exp(-1/n^2) \leqslant 1$ car $-1/n^2 \leqslant 0$ et de plus $|\sin(n+1)| \leqslant 1$.
Par ailleurs, $1 < 2 \leqslant 3 + \cos(n)$ donc par croissance stricte de ln, on a : $0 = \ln(1) < \ln(2) \leqslant \ln(3+\cos(n))$ donc $\dfrac{1}{|\ln(3+\cos(n))|} \leqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leqslant \dfrac{2}{\ln(2)}$. Donc :

$\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée, donc minorée et majorée.}}$

11.13

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |v_n| \leqslant M$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant |u_n v_n| \leqslant M|u_n|$. Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $M|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis, d'après le théorème d'encadrement, $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Attention : Notons m_1 et m_2 des réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_1 \leqslant v_n \leqslant m_2$. Pour en déduire un encadrement de $u_n v_n$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faudrait supposer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de signe constant, ce qui n'est pas le cas *a priori*. Par exemple, pour en déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ m_1 u_n \leqslant u_n v_n \leqslant m_2 u_n$, il faudrait supposer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

11.14

a) En multipliant et en divisant u_n par la quantité conjuguée $\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+2n+1}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+2n+1}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par n, il vient :
$u_n = (\sqrt{1+3/n+1/n^2} + \sqrt{1+2/n+1/n^2})^{-1}$.
Or $1+3/n+1/n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1+2/n+1/n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc

$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{1}{2}.}$

b) En factorisant le numérateur et le dénominateur par 3^n, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1-(2/3)^n}{1+(2/3)^n}$. Or $\dfrac{2}{3} \in]-1,1[$ donc $(2/3)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par suite :

$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ donc :

$\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ diverge et tend vers } +\infty.}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \dfrac{n}{n} \times \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n} \times \cdots \times \dfrac{1}{n}$. Tous les facteurs sont compris entre 0 et 1. Donc en majorant chacun des n facteurs, à l'exception du dernier, par 1, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant r_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Or $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement, on en déduit que :

$\boxed{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\cos(3n) \leqslant 1$ et par conséquent $s_n \leqslant -2n^2 + n^2 = -n^2$.
Or $-n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. On en déduit par comparaison que

$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge et tend vers } -\infty.}$

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$. Or $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or cos est continue en 0, donc par composition des limites, on obtient : $\cos(\dfrac{(-1)^n}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$.
Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 \leqslant \sin(n^2-n+1) \leqslant 1$ donc par croissance de la fonction tan sur $]-\pi/2, \pi/2[$, il vient :
$\dfrac{1}{n^2}\tan(-1) \leqslant \dfrac{1}{n^2}\tan(\sin(n^2-n+1)) \leqslant \dfrac{1}{n^2}\tan(1)$.
Or $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement,
$\dfrac{1}{n^2}\tan(\sin(n^2-n+1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les opérations algébriques sur les limites permettent alors de conclure que $\boxed{(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 3.}$

11.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ 0 < n^2+1 \leqslant n^2+k \leqslant n^2+n$.

Donc $\dfrac{n}{n^2+n} \leqslant \dfrac{n}{n^2+k} \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$.

En additionnant ces inégalités pour $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
Or $\dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{n^2}{n^2+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc par encadrement $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 1.}$

Attention : Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{n}{n^2+k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. En effet, u_n est une somme de n termes et pour appliquer le théorème sur les opérations algébriques, il faudrait que le nombre de termes soit constant, c'est-à-dire ne dépende pas de n.

11.16

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$. Ainsi

$\boxed{(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
Or pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$.
Donc $H_{2n} - H_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

c) $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante, elle est soit convergente, soit divergente de limite $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ. Alors $H_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et ainsi $H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En passant à la limite dans l'inégalité obtenue à la question précédente, il vient $0 \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Donc

$\boxed{(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ diverge et tend vers } +\infty.}$

11.17

Rappel : dire qu'un réel est positif signifie qu'il est positif ou nul.

a) Montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et positif.
- u_0 est bien défini et positif par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont bien définis et positifs et montrons que u_{n+1} est défini et positif. On a $u_0 + u_1 + \cdots + u_n \geqslant 0$. Donc $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$ est bien défini et positif.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1}^2 = (u_0 + \cdots + u_{n-1}) + u_n = u_n^2 + u_n.$$

Or les u_n sont positifs, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1}^2 \geqslant u_n^2$, donc $|u_{n+1}| \geqslant |u_n|$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante à partir du rang 1. D'où : soit elle admet une limite finie soit elle tend vers $+\infty$.
Raisonnons par l'absurde pour montrer qu'elle tend vers $+\infty$:
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors en passant à la limite dans la relation $u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$, il vient : $\ell^2 = \ell^2 + \ell$ donc $\ell = 0$.
Or la croissance de la suite donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant u_1 = \sqrt{u_0} > 0$. Par passage à la limite $\ell \geqslant \sqrt{u_0} > 0$ ce qui est une contradiction.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

11.18

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{18}(3u_n - 3v_n) = \frac{1}{2}a_n.$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Comme $a_0 = 1$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Enfin $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(-u_n + v_n) = -a_n \leqslant 0$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
D'autre part $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{6}(u_n - v_n) = \frac{1}{2}a_n \geqslant 0$.
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Enfin, $u_n - v_n = 3a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc elles convergent et ont même limite.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} = \frac{1}{9}(3u_n + 6v_n) = b_n.$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Or $b_0 = \frac{1}{3}(6 + 2 \times 3) = 4$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 4$.
En appelant ℓ la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $b_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par unicité de la limite, il vient $\ell = 4$.

11.19

a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété suivante, notée $\mathcal{P}(n)$: a_n et b_n sont bien définis et $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.
• $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $0 \leqslant a \leqslant b$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, a_n et b_n sont définis, donc $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ également ; a_n et b_n sont de plus positifs, donc la racine carrée $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ est définie et a_{n+1} et b_{n+1} sont positifs.
Par ailleurs, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - \sqrt{a_n b_n})$ donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geqslant 0$. Donc $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$. On a bien démontré $\mathcal{P}(n+1)$.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels a_n et b_n sont bien définis et vérifient $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.
b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ donc $0 \leqslant a_n^2 \leqslant a_n b_n$ puis $a_n \leqslant \sqrt{a_n b_n}$. Par conséquent, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant a_{n+1}$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \leqslant 0$. Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
• On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$, mais $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \leqslant b_0$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par b_0, et elle est de plus croissante. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
De même $\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par a_0, et elle est de plus décroissante, donc elle converge.
• Notons ℓ la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ' celle de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Or $b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ et $\frac{1}{2}(a_n + b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(\ell + \ell')$. Donc par unicité de la limite, on a : $\ell' = \frac{1}{2}(\ell + \ell')$, d'où : $\ell = \ell'$: les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.
• On en déduit que $a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or une des suites est croissante, et l'autre est décroissante. Par conséquent, les deux suites sont adjacentes.

c) Dans le programme ci-dessous, pour chaque valeur de $k \in [\![1, n]\!]$, on calcule a_k et b_k et on attribue ces valeurs aux variables a et b. Comme on calcule a_k en premier, la variable a contient a_k au moment où on veut calculer b_k. Or pour ce calcul, on a besoin de a_{k-1}, c'est-à-dire l'ancienne valeur de la variable a. Afin de résoudre cette difficulté, on mémorise l'ancienne valeur de a dans la variable aa.

```
VAR a,b,aa:REAL; k,n:INTERGER;
BEGIN
   WRITE('Entrez a, b et n');
   READLN(a,b,n);
   FOR k:=1 TO n DO
      BEGIN
      aa:=a;
      a:=SQRT(a*b);
      b:=(aa+b)/2;
      END;
   WRITE('a_n= ',a,' et b_n= ',b);
END.
```

11.20

a) On définit la fonction f par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ f(x) = x - \ln(1 + x).$$

f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont, et $\forall x \in]-1, +\infty[,\ f'(x) = \frac{x}{1+x}$. D'où le tableau de variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On en déduit que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln(\dfrac{n}{n+1})$
d'où $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln(1 - \dfrac{1}{n+1})$. En appliquant la question précédente avec $x = -\frac{1}{n+1}$, il vient $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n} - \ln(\dfrac{n+1}{n})$
d'où $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln(1 + \dfrac{1}{n})$.
En appliquant la question précédente avec $x = \frac{1}{n}$, il vient $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Enfin $v_n - u_n = -\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

c) D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n + v_n}{2}$ est une valeur approchée de γ à $\dfrac{u_n - v_n}{2}$ près. On va donc calculer les termes successifs des deux suites tant que $\dfrac{u_n - v_n}{2} > \varepsilon$. Remarquons que $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$.

```
VAR u,v,s,eps:REAL; n:INTERGER;
BEGIN
        WRITE('Entrez epsilon');
        READLN(eps);
        u:=1;v:=0;s:=1;n:=1;
        WHILE (u-v)/2 > eps DO
                BEGIN
                n:=n+1;
                s:=s+1/n;
                u:=s-LN(n);
                v:=u-1/n;
                END;
        WRITE('Valeur approchee : ',(u+v)/2);
END.
```

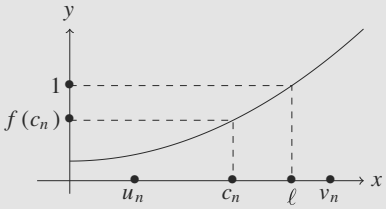
11.21

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$. $f'(x)$ est donc du signe de $x+1$.
De plus, on sait que $xe^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $xe^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-1/e$	↗	$+\infty$

b) f est continue et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$, de plus $f(-1) = -1/e$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. On sait donc que pour tout $y \in [-1/e,+\infty[$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x dans $[-1,+\infty[$. Or $1 \in [-1/e,+\infty[$ donc il existe un unique $\ell \in [-1,+\infty[$ tel que $f(\ell) = 1$.
D'après le tableau de variations, on a par ailleurs : $\forall x \in]-\infty,-1[,\ f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans $]-\infty,-1[$. Donc ℓ est l'unique réel vérifiant $f(\ell) = 1$.
Enfin, $f(0) = 0$, $f(1) = e > 1$ et f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$, donc $\forall x \in [-1,0[,\ f(x) < 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) > 1$. Nécessairement on a $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

c) Construisons par dichotomie deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.
• On pose $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, ainsi $0 \leqslant u_0 \leqslant \ell \leqslant v_0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons u_n et v_n construits tels que $0 \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ et définissons u_{n+1} et v_{n+1}.
On pose $c_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. On a $c_n \geqslant 0$.
1er cas : si $f(c_n) < 1$ alors $f(c_n) < f(\ell)$, or f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc $c_n < \ell$. On pose alors $u_{n+1} = c_n$ et $v_{n+1} = v_n$ ce qui permet d'obtenir $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1}$.



Cas où $f(c_n) < 1$

2nd cas : si $f(c_n) \geqslant 1$ alors $c_n \geqslant \ell$. On pose alors $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = c_n$. Ainsi $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1}$.
Ainsi construites par dichotomie, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite μ. Or $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, il vient : $\mu \leqslant \ell \leqslant \mu$. Donc $\mu = \ell$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

d) D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n + v_n}{2}$ est une valeur approchée de ℓ à $\dfrac{v_n - u_n}{2}$ près. On va donc calculer les termes successifs des deux suites tant que $\dfrac{v_n - u_n}{2} > \varepsilon$.

```
VAR u,v,c,eps:REAL;
BEGIN
   WRITE('Entrez epsilon');
   READLN(eps);
   u:=0;v:=1;
   WHILE (v-u)/2 > eps DO
      BEGIN
      c:=(u+v)/2;
      IF c*EXP(c)<1 THEN u:=c ELSE v:=c;
      END;
   WRITE('Valeur approchee : ',(u+v)/2);
END.
```

11.22

a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et ℓ sa limite. L'intervalle $]\ell-1, \ell+1[$ est ouvert et contient ℓ, donc par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \ell - 1 < u_n < \ell + 1.$$

Posons par ailleurs, $m = \min(u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1})$ et $M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1})$. On a alors :

$$\forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!],\ m \leqslant u_n \leqslant M.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\min(\ell - 1, m) \leqslant u_n \leqslant \max(\ell + 1, M)$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|(-1)^n\right| = 1$. Mais elle n'est pas convergente car $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.

11.23

a) $\ell < 1$, donc il existe $a \in]\ell, 1[$. L'intervalle $]-\infty, a[$ est ouvert et contient ℓ, donc par définition de la limite, on a $\sqrt[n]{u_n} < a$ à partir d'un certain rang. De plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs. Donc par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$, on obtient : $0 \leqslant u_n \leqslant a^n$ à partir d'un certain rang. Or $a \in]\ell, 1[$ donc *a fortiori* $a \in]-1, 1[$ et par suite : $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit par encadrement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $\ell > 1$, donc il existe $b \in]1, \ell[$. L'intervalle $]b, +\infty[$ est ouvert et contient ℓ, donc par définition de la limite, on a $\sqrt[n]{u_n} > b$ à partir d'un certain rang. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$, on obtient : $u_n \geqslant b^n$ à partir d'un certain rang. Or $b > 1$ donc $b^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit par comparaison que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) • Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp(-\sqrt{n})$. On a $-\sqrt{n} \to -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$, donc par composition $u_n \to 0$. Par ailleurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt[n]{u_n} = \exp(-\frac{\sqrt{n}}{n}) = \exp(-1/\sqrt{n}).$$

Or $-1/\sqrt{n} \to 0$ et exp est continue en 0 donc par composition des limites : $\sqrt[n]{u_n} \to 1$.

• Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp(\sqrt{n})$. Ici, on a $u_n \to +\infty$ et $\sqrt[n]{u_n} = \exp(1/\sqrt{n}) \to 1$.

11.24

On rappelle qu'on ne peut pas multiplier terme à terme des inégalités : si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, on n'a pas en général $ac \leqslant bd$. En revanche, si on a $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.

a) x et y étant positifs, on a d'une part $0 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$ et d'autre part $0 \leqslant \lfloor y \rfloor \leqslant y$. On en déduit que $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor \leqslant xy$. Or $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$ est un entier (produit de deux entiers) et $\lfloor xy \rfloor$ est par définition le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à xy. Donc $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor xy \rfloor$.

b) x et y étant négatifs, on a d'une part $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant 0$ et d'autre part $\lfloor y \rfloor \leqslant y \leqslant 0$. Donc $0 \leqslant -x \leqslant -\lfloor x \rfloor$ et $0 \leqslant -y \leqslant -\lfloor y \rfloor$. On en déduit par produit que $xy \leqslant \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$. Or $\lfloor xy \rfloor \leqslant xy$ donc $\lfloor xy \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$.

c) Lorsque x et y sont de signes opposés, on ne peut pas conclure.
Par exemple, si $x = 2$ et $y = -1,5$ alors $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor = 2 \times (-2) = -4$ et $\lfloor xy \rfloor = \lfloor -3 \rfloor = -3$. Donc $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor < \lfloor xy \rfloor$.
En revanche, si $x = 0,9$ et $y = -1$ alors $\lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor = 0$ et $\lfloor xy \rfloor = \lfloor -0,9 \rfloor = -1$ donc $\lfloor xy \rfloor < \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$.

11.25

a) On a :

$$\begin{aligned} u_0 &= \lfloor \pi \rfloor = 3 \\ u_1 &= 10^{-1} . \lfloor 10\pi \rfloor = 3,1 \\ u_2 &= 10^{-2} . \left\lfloor 10^2 \pi \right\rfloor = 3,14 \\ u_3 &= 10^{-3} . \left\lfloor 10^3 \pi \right\rfloor = 3,141 \end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor 10^n x \rfloor$ est un entier (par définition de la partie entière) et 10^n également donc u_n est un quotient d'entiers, c'est-à-dire un rationnel.
Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N},\ 10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$. En divisant par 10^n, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x - \frac{1}{10^n} < u_n \leqslant x.$$

Or $x - \dfrac{1}{10^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, donc il vient par encadrement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

11.26

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $0 \leqslant \sin(\dfrac{\pi}{2n}) \leqslant 1$. Ainsi A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée) donc A admet une borne supérieure (resp. inférieure).
1 est un majorant de A et $1 = \sin\dfrac{\pi}{2}$ donc $1 \in A$. Donc A admet 1 pour borne supérieure et maximum.
Enfin, 0 est un minorant de A et $\sin(\dfrac{\pi}{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il ne peut pas y avoir un minorant strictement plus grand que 0. Ainsi $0 = \inf A$, mais $0 \notin A$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(\dfrac{\pi}{2n}) \neq 0$. Donc A n'admet pas de minimum.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \left\lfloor x^2 \right\rfloor = 2 &\Leftrightarrow 2 \leqslant x^2 < 3 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}[\end{aligned}$$

Donc $B =]-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}[$, donc B admet $-\sqrt{3}$ pour borne inférieure et $\sqrt{3}$ pour borne supérieure, mais n'admet ni minimum, ni maximum.

c) On a $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant n^m$ et de plus $0 = 0^1$ donc $0 \in C$. Donc C admet 0 pour minimum (et *a fortiori* pour borne inférieure).
En revanche, en fixant un entier naturel non nul m, on a $n^m \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc C n'est pas majoré. Donc C n'admet pas de borne supérieure (ni bien entendu de maximum).

d) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, or $(x - y)^2 \geqslant 0$ donc $0 < 2xy \leqslant x^2 + y^2$, puis $0 < \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} \leqslant 1$. Ainsi D est une

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée) donc D admet une borne supérieure (resp. inférieure).

1 est un majorant de D et en prenant $x = y$, on a $\dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 1$ donc $1 \in D$. Ainsi D admet 1 pour maximum.

Enfin, 0 est un minorant de D et en fixant $y = 1$, on a $\dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \dfrac{2x}{x^2+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $0 = \inf D$. Mais $0 \notin D$, donc D n'admet pas de minimum.

11.27

• Si A admet un minimum m alors A est non vide car $m \in A$.

• Étudions la réciproque : supposons A non vide. A étant une partie de $\mathbb{N}$, A est minorée par 0. Donc A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, donc elle admet une borne inférieure m. Il reste à montrer que $m \in A$.

Raisonnons par l'absurde. On suppose $m \notin A$. Posons $a = \lfloor m \rfloor + 1$. On a $m < a$, or m est le plus grand des minorants de A, donc a ne minore pas A. Par suite, il existe $n \in A$ tel que $m < n < a$. Or $n \in \mathbb{N}$ (car $A \subset \mathbb{N}$) et $a = \lfloor m \rfloor + 1$ est le plus petit des entiers strictement supérieurs à m : absurde. Donc $m \in A$ et A admet m pour minimum.

11.28

1 a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers ℓ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \ell$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell = \ell.$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par ℓ.

b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(n\sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k\right) \end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $u_{n+1} \leqslant u_k$ et donc $nu_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k$. Ainsi $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée, elle converge vers un réel ℓ'. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant \ell$ donc en passant à la limite, on obtient : $\ell' \geqslant \ell$.

c) • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} u_k + \dfrac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

Or $\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{2}v_n$ et d'autre part, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on a : $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $u_k \leqslant u_n$ donc $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant nu_n$. Ainsi $v_{2n} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n + u_n)$.

• Or $v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ et $\frac{1}{2}(v_n + u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(\ell' + \ell)$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient donc : $\ell' \leqslant \frac{1}{2}(\ell' + \ell)$ d'où $\ell' \leqslant \ell$. Mais on sait que $\ell' \geqslant \ell$, donc $\ell' = \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2 a) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a également $\varepsilon/2 > 0$, et donc, par définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon/2$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$:

$$\begin{aligned} |v_n| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{n-n_0}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^{n_0} |u_k|$ est une constante indépendante de n donc $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par définition de la limite, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ 0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \leqslant \varepsilon/2.$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant \max(n_0 + 1, n_1)$, on a : $|v_n| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tilde{u}_n = u_n - \ell \text{ et } \tilde{v}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_k.$$

Comme $\tilde{u}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a d'après la question précédente $\tilde{v}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{v}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = v_n - \ell$. Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

11.29

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Par la formule du binôme $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n!}(a+b)^n.}$

2) Montrons à l'aide d'un contre-exemple que la convergence de u et v n'implique pas celle de w. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = 1$. Ainsi u et v convergent. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$w_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Ainsi w diverge vers $+\infty$: w n'est pas convergente.

3 a) $\sum_{k=n+1}^{m} u_k$ est la somme de $m-n$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Le premier terme est $\frac{1}{2^{n+1}}$ donc :

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \times (1 - \frac{1}{2^{m-n}})$$

Or $1 - \frac{1}{2^{m-n}} \leqslant 1$ donc $\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant \frac{1}{2^n} = u_n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• $w_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n-k}$.

Or la suite v est décroissante, donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ v_{2n-k} \leqslant v_n$$

$$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!],\ v_{2n-k} \leqslant v_0$$

La suite u étant à termes positifs, on en déduit que :

$$w_{2n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_0$$

Or $v_0 \geqslant 0$ (v est à termes positifs car décroissante de limite nulle), donc d'après 3.a, on a :

$$w_{2n} \leqslant v_n \sum_{k=0}^{n} u_k + v_0 u_n$$

Enfin $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) \leqslant 2$.

Donc $w_{2n} \leqslant 2v_n + v_0 u_n$.

• De même, en écrivant :

$$w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k v_{2n+1-k},$$

on obtient $w_{2n+1} \leqslant 2v_{n+1} + v_0 u_n$.

c) u et v sont à termes positifs donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_{2n} \leqslant 2v_n + v_0 u_n$$

Or $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement, on a : $w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On montre de même que $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\boxed{w \text{ converge vers } 0.}$

4) On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \tilde{u}_k = |u_k|$ et $\tilde{w} = \tilde{u} \star v$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|w_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n} \tilde{u}_k v_{n-k} = \tilde{w}_n$$

Or $\tilde{w}$ est le produit de convolution étudié à la question 3, et on a vu que $\tilde{w}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, on en déduit que $\boxed{w \text{ converge vers } 0.}$

11.30

1 a) Calculons la différence :

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} - \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} \\ &= \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}a_k} - \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^2} \\ &= \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) \\ &= \frac{(a_k - a_{k-1})^2}{a_{k-1}a_k^2}\end{aligned}$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs car elle est croissante et $a_0 = 1$; ainsi : $\delta \geqslant 0$ et

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} \leqslant \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$$

b) Il vient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n}$$

Or $a_0 = 1$ et $a_n > 0$ donc $b_n < 1$.

Par ailleurs, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 < a_{k-1} \leqslant a_k$ donc $\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} \geqslant 0$ et par conséquent $b_n \geqslant 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+1} - b_n = \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{a_{n+1}} \geqslant 0$.

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Par ailleurs, d'après 1.b, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1. On en déduit, d'après le théorème de limite monotone, que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant b_n < 1$. En passant à la limite, il vient : $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \leqslant 1$.

d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc, pour tout $n \geqslant p$, on a $b_n - b_p \geqslant 0$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}b_n - b_p &= \sum_{k=p+1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} \\ &\leqslant \sum_{k=p+1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_n} \\ &\leqslant \frac{1}{a_p} \quad \text{car } a_n > 0\end{aligned}$$

D'où : $\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant b_n - b_p \leqslant \frac{1}{a_p}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, il vient : $0 \leqslant \ell - b_p \leqslant \frac{1}{a_p}$.

2 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = (1 - \frac{1}{q})\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{q}\right)^k$. Comme $\frac{1}{q} \neq 1$, il vient : $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{q}\right)^k = \frac{1}{q} \times \frac{1-(\frac{1}{q})^n}{1-\frac{1}{q}}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$$

b) $q > 1$ donc $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{q}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

c) Soit $c \in [0, 1[$.
• si $c = 0$, posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors constante égale à 0 et *a fortiori* elle converge vers $c = 0$.
• si $c \in]0, 1[$, posons $q = \dfrac{1}{c}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = q^n$. On a $q > 1$ donc d'après 2.b, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{q} = c$.
Ainsi, pour tout $c \in [0, 1[$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ associée converge vers c.

d) Montrons que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger vers 1. Pour cela, on va prouver que $\ell < 1$.
• si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 = 1$. On a vu dans la question précédente que, dans ce cas, on a $\ell = 0$.
• si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{p-1} \neq a_p$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, il vient : $0 < a_{p-1} < a_p$. Par suite, on a :

$$\left(1 - \frac{a_{p-1}}{a_p}\right)\frac{1}{a_p} = \frac{a_p - a_{p-1}}{a_p^2}$$

$$< \frac{a_p - a_{p-1}}{a_p a_{p-1}} = \frac{1}{a_{p-1}} - \frac{1}{a_p}$$

Par conséquent :

$$b_p = \sum_{k=1}^{p-1}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} + \left(1 - \frac{a_{p-1}}{a_p}\right)\frac{1}{a_p}$$

$$< \sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{a_{p-1}} - \frac{1}{a_p} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_p}$$

Or d'après 1.d, on a : $\ell \leqslant b_p + \dfrac{1}{a_p}$. Donc $\ell < \dfrac{1}{a_0} = 1$.
Ainsi, il n'existe pas de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exemples de suites

CHAPITRE 12

Plan

12.1 Suites arithmético-géométriques 322
12.2 Relation linéaire de récurrence d'ordre 2 323
12.3 Relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 325
Synthèse 331
Tests et exercices 332
Corrigés des exercices 336

Introduction

Après avoir établi des outils généraux pour étudier les suites, nous présentons un certain nombre de suites usuelles qu'il convient de savoir identifier. Pour certaines d'entre elles, il sera possible de donner une expression explicite ; pour d'autres, on se limitera à donner une méthode pour déterminer leur limite éventuelle.

Prérequis

- généralités sur les suites

Objectifs

- exprimer explicitement certaines suites usuelles afin de faciliter leur étude :
 - suites arithmético-géométriques
 - suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2
- étudier les suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$.
- ce chapitre se prête à plusieurs applications de programmation en Turbo-Pascal : vous trouverez des compléments au chapitre 28.

Parmi les suites usuelles, nous connaissons les sommes de puissance d'entiers qui ont été introduites au chapitre premier. Certains exercices s'y réfèrent.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

- Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Plus généralement, si $n_0 \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} q^k = q^{n_0}\frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

12.1 Suites arithmético-géométriques

Définition – Suites arithmético-géométriques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Remarque – Deux cas particuliers :

$a = 1$: la suite est arithmétique de raison b.

$b = 0$: la suite est géométrique de raison a.

Méthode 1 Étude d'une suite arithmético-géométrique

Si $a = 1$: La suite est arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$.

Si $a \neq 1$:

- Introduire le réel λ solution de $\lambda = a\lambda + b$: c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, retrancher terme à terme les égalités suivantes :
$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \lambda = a\lambda + b \end{cases}$$
on obtient $u_{n+1} - \lambda = a(u_n - \lambda)$
- En remarquant alors que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n = u_n - \lambda$ pour tout entier n, est géométrique, en déduire l'expression de v_n
- En déduire enfin l'expression explicite de u_n.

Exemples d'application

1. Donnons une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$:

- Soit $\lambda = -3$, la solution de $\lambda = 2\lambda + 3$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3 \\ \lambda = 2\lambda + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - \lambda = 2(u_n - \lambda)$$
- Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n = u_n + 3$ pour tout entier n, est géométrique, de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = 4$.
- Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = 4 \times 2^n$ et $u_n = 2^{n+2} - 3$.

2. Donnons une expression explicite de la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $w_2 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $w_{n+1} = \sqrt{2w_n}$.
Une récurrence rapide donne que pour tout $n \geqslant 2$, $w_n > 0$.

- Posons pour $n \geqslant 2,\ t_n = \ln w_n$, alors $\begin{cases} t_2 = 0 \\ \forall n \geqslant 2,\ t_{n+1} = \dfrac{1}{2}t_n + \dfrac{\ln 2}{2} \end{cases}$

La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique :

- Soit $\lambda = \ln 2$, la solution de $\lambda = \dfrac{1}{2}\lambda + \dfrac{\ln 2}{2}$.
- Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} t_{n+1} = \dfrac{1}{2}t_n + \dfrac{\ln 2}{2} \\ \lambda = \dfrac{1}{2}\lambda + \dfrac{\ln 2}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t_{n+1} - \lambda = \frac{1}{2}(t_n - \lambda)$$

- Ainsi, la suite $(s_n)_{n\geqslant 2}$, définie par $s_n = t_n - \ln 2$ pour tout $n \geqslant 2$, est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $s_2 = t_2 - \ln 2 = -\ln 2$.
 Ainsi, $\forall n \geqslant 2$, $s_n = -\dfrac{\ln 2}{2^{n-2}}$ donc $t_n = -\dfrac{\ln 2}{2^{n-2}} + \ln 2$.
- Conclusion, pour tout $n \geqslant 2$, $w_n = \exp\left(-\dfrac{\ln 2}{2^{n-2}} + \ln 2\right) = 2^{1-\frac{1}{2^{n-2}}}$.

12.2 Relation linéaire de récurrence d'ordre 2

Définition – Relation linéaire de récurrence d'ordre 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une **relation linéaire de récurrence d'ordre deux** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On appelle (E) : $r^2 = ar + b$ **équation caractéristique** de la suite.

Théorème – Avec les notations de la définition, soit Δ le **discriminant** de (E).

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux racines réelles distinctes $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$.
 Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une racine double réelle $r \in \mathbb{R}$.
 Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + \beta n)r^n$.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta} \in \mathbb{C}$.
 Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))$

- Dans chaque cas, α et β sont déterminées en utilisant les données de l'énoncé (souvent u_0 et u_1 ou une limite).
- Le lecteur trouvera une généralisation pour des suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre supérieur à l'exercice 18 du chapitre 9 (inspiré de EDHEC 2003 S) : la méthode repose sur le calcul de la puissance n-ième d'une matrice.
- Ce théorème se démontre à l'aide des outils introduits dans les chapitres d'algèbre linéaire (notamment les résultats sur la dimension finie).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

1. Donnons une expression explicite de la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $v_0 = 1$, $v_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$.
Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$
L'équation admet 2 pour racine double.
Ainsi $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (\alpha + \beta n)2^n$.
Avec les données initiales, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha = v_0 = 1 \\ 2(\alpha+\beta) = v_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(1 - \dfrac{3}{2}n\right)2^n$.

2. Expression explicite de la suite réelle définie par $\begin{cases} (u_0,u_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$
Équation caractéristique : $r^2 - r + 1 = 0$
Discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3$
Deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$
Ainsi, $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right) + \beta\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$
Avec les données initiales, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \dfrac{\alpha + \sqrt{3}\beta}{2} = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \dfrac{2u_1 - u_0}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{2u_1 - u_0}{\sqrt{3}}\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$.

La recherche d'une expression explicite des suites suivantes donne :

3. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3.2^n - 2.3^n.$

4. $\begin{cases} (v_0,v_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}^3}{v_n^2} \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^{2^n-1}.$

Il convient de poser $w_n = \ln v_n$ ainsi $\begin{cases} (w_0,w_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n \end{cases}$
L'étude donne $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (2w_0 - w_1) + (w_1 - w_0)2^n = \ln\left(\dfrac{v_0^2}{v_1}\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^{2^n}\right)$

Méthode 2 Lorsque les données initiales sont u_1 et u_2

Lorsque les données initiales pour une suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 sont u_1 et u_2, on aura intérêt à effectuer un décalage d'indice. Par exemple, si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, on cherchera la suite sous la forme :

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1}$$

Le calcul de α et β à partir de u_1 et u_2 en sera grandement simplifié.

En effet, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même relation linéaire de récurrence d'ordre 2 que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$, soit $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\alpha r_1^{n-1}+\beta r_2^{n-1}$.

Exemple d'application

Déterminons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1=0,\ u_2=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}+2u_n \end{cases}$$

- L'équation caractéristique est : $r^2-2r-2=0$.
- Le discriminant est : $\Delta=4+8=12=(2\sqrt{3})^2$.
- L'équation admet deux racines réelles distinctes : $r_1=1+\sqrt{3}$ et $r_2=1-\sqrt{3}$.
- Donc il existe $(\alpha,\beta)^2\in\mathbb{R};\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\alpha(1+\sqrt{3})^{n-1}+\beta(1-\sqrt{3})^{n-1}$
- Ainsi, les données initiales donnent : $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha(1+\sqrt{3})+\beta(1-\sqrt{3})=1 \end{cases}$

 On obtient $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ et $\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, de sorte que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{\sqrt{3}}{6}\left((1+\sqrt{3})^{n-1}-(1-\sqrt{3})^{n-1}\right).$$

- Sans le décalage nous aurions écrit qu'il existait $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}^*$,
$$u_n=\lambda(1+\sqrt{3})^n+\mu(1-\sqrt{3})^n$$
 Nous aurions dû résoudre : $\begin{cases} \lambda(1+\sqrt{3})+\mu(1-\sqrt{3})=u_1 \\ \lambda(1+\sqrt{3})^2+\mu(1-\sqrt{3})^2=u_2 \end{cases}$.

12.3 Relation de récurrence du type $u_{n+1}=f(u_n)$

On écartera les suites pour lesquelles on sait exprimer u_n en fonction de n, notamment les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.

12.3.1 Point fixe

Définition – Point fixe

Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On appelle **point fixe** de f sur I tout nombre $\alpha\in I$ vérifiant $\alpha=f(\alpha)$.

Théorème – Soient I un intervalle, $f:I\to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in I$ et si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f.

Remarques

1. C'est le seul résultat à connaître sur les suites définie par $u_{n+1}=f(u_n)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

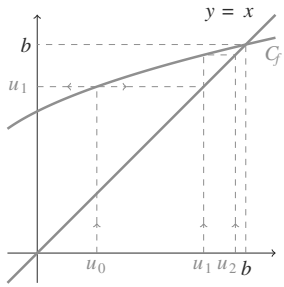
2. Supposons par exemple que $I =]a, b[$ et que f est continue sur I. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite ℓ est dans $[a, b]$. Soit $\ell \in \{a, b\}$, soit $\ell \in]a, b[$ et alors ℓ est un point fixe de f. Ainsi, lorsque f est continue sur I, la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à chercher parmi les points fixes de f ou les bornes de I non incluses dans I.

Exemples

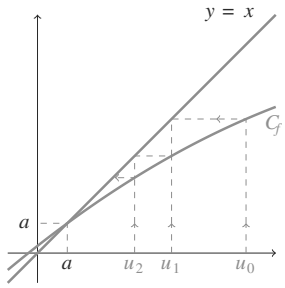
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4\sqrt{u_n} - u_n - 2$.
Comme $x \mapsto 4\sqrt{x} - x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est solution de $x = 4\sqrt{x} - x - 2 \Leftrightarrow x = 1$.
La seule limite finie possible est 1.

2. Considérons une suite arithmético-géométrique telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = av_n + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 1$.
Or $x \mapsto ax+b$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on note $\lambda = \frac{b}{1-a}$ l'unique solution de $\lambda = a\lambda+b$.
Ainsi, les limites possibles pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont λ, $-\infty$ ou $+\infty$.

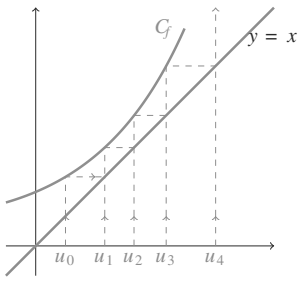
L'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ conduit à six situations *simplifiées* :



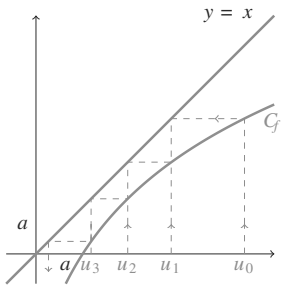
Conjecture : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$



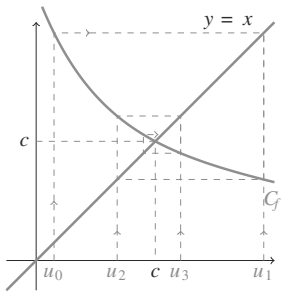
Conjecture : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$



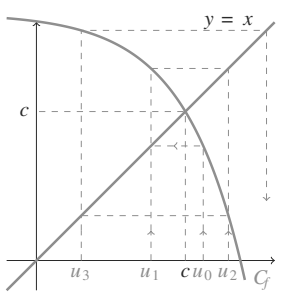
Conjecture : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$



Conjecture : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$



Conjecture : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$



$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite a priori.

Le sens de variation de la fonction f semble être un élément déterminant pour le comportement de la suite. Plus précisément :

- Si f est croissante, la suite semble monotone et donc admet une limite : le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant donné par la position de C_f par rapport à la 1ère bissectrice, c'est-à-dire, par le signe de $f(x) - x$.
 - Si pour tout x, $f(x) - x \geqslant 0$, alors la suite est croissante.
 - Si pour tout x, $f(x) - x \leqslant 0$, alors la suite est décroissante.
- Si f est décroissante, une approche intéressante est d'étudier les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui semblent monotones alors que l'on ne peut rien dire sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le principe d'étude est de construire le graphe de la fonction, puis de conjecturer le comportement de la suite en fonction de son premier terme : intervalle *minimal* contenant les termes de la suites, monotonie éventuelle, limite éventuelle.
La détermination de l'intervalle de travail est donc un préalable qui permet de se ramener à l'une des situations ci-dessus : l'intervalle contient forcément le premier terme. En particulier, lorsque f est croissante, la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est de signe fixe sur cet intervalle : ses bornes sont soit des points fixes soit des bornes du domaine d'étude. Ensuite, il suffit de démontrer la conjecture avec une rédaction bien rodée.

12.3.2 Exemple avec f croissante

Étudions les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{3}u_n$.

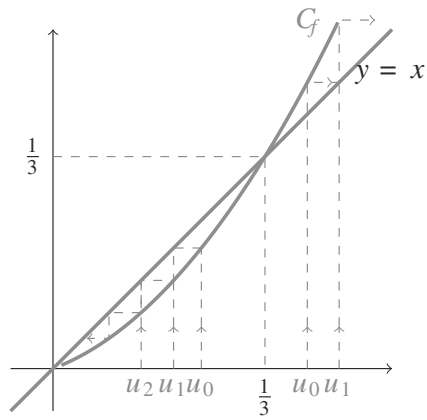
Étape 1 : représentation graphique et conjecture

- **Variations de** f : On pose $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{3}x$. On devine (on le montre par la suite) que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on étudiera f sur $\mathbb{R}_+$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = 2x + \dfrac{2}{3} > 0$.
 Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- **Signe de** $g : x \mapsto f(x) - x$: On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = f(x) - x$.
 On cherche le signe de $g(x)$. On pourra ainsi placer la courbe de f par rapport à la première bissectrice et déterminer les points fixes de f.
 On a $g(x) = x\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$ d'où le tableau de signe :

x	0		1/3		$+\infty$
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	

 Les points fixes de f sont 0 et $\dfrac{1}{3}$.
- **Graphe de** f : On peut maintenant donner l'allure du graphe de f et représenter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



- **Conjecture** : On se propose de démontrer la conjecture suivante :

$$\begin{cases} \text{si } u_0 \in [0, \frac{1}{3}[, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et tend vers } 0 \\ \text{si } u_0 = \frac{1}{3}, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante (tend vers } \frac{1}{3}) \\ \text{si } u_0 > \frac{1}{3}, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et tend vers } +\infty \end{cases}$$

Étape 2 : démonstration de la conjecture

- Si $u_0 \in [0, \frac{1}{3}[$.
 - **Stabilité de la suite** : il s'agit de montrer que les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous dans $[0, \frac{1}{3}[$. Une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ permet de montrer cela.
 L'initialisation est l'hypothèse et l'hérédité se montre en utilisant la stricte croissance de f : $0 \leqslant u_n < \frac{1}{3} \Rightarrow f(0) = 0 \leqslant f(u_n) = u_{n+1} < f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
 On a ainsi localisé la suite dans un intervalle où g garde un signe constant.
 - **Variations** : Pour tout $x \in [0, \frac{1}{3}[$, on a $g(x) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant x$.
 Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
 - **Existence et valeur de la limite** : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de limite monotone, elle converge. Soit ℓ sa limite.
 Comme f est continue, alors ℓ est un point fixe de f, ainsi $\ell \in \{0, \frac{1}{3}\}$.
 Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 < \frac{1}{3}$. Par passage à la limite, $\ell \leqslant u_0 < \frac{1}{3}$ donc $\ell = 0$.
 Finalement : si $u_0 \in [0, \frac{1}{3}[$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $u_0 = \frac{1}{3}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\frac{1}{3}$.
- Si $u_0 > \frac{1}{3}$.
 - On montre aisément par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{1}{3}$.

– Pour tout $x > \frac{1}{3}$, on a $g(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant x$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc elle converge ou bien elle tend vers $+\infty$.
Montrons par l'absurde que la suite diverge : supposons qu'elle converge vers un réel ℓ alors ℓ est un point fixe de f, ainsi $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{1}{3}$.
Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $\ell \geqslant u_0 > \frac{1}{3}$: contradiction.
Finalement : si $u_0 \in]\frac{1}{3}; +\infty[$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Dans le cas où f est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours monotone. Pour déterminer si elle est croissante ou décroissante, on cherche le signe de g :
Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite dont les termes sont dans l'intervalle J :

- si pour tout $x \in J$, $g(x) = f(x) - x \geqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- si pour tout $x \in J$, $g(x) = f(x) - x \leqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Remarque – Lorsque f est croissante, il est possible de déterminer la monotonie de la suite sans étudier le signe de g. Cette approche n'est pas présentée ici, mais demeure un classique. Cela se fait en deux étapes :

- comparer les deux premiers termes : souvent u_0 et u_1.
- par récurrence, montrer que cette comparaison est vérifiée à tout rang : f étant croissante, elle respecte les inégalités. Par exemple :
$$u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$

Méthode 3 Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$ quand f est croissante

Étape 1 : représentation graphique et conjecture

- Étudier les variations de f
- Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$. En déduire les points fixes de f.
- Représenter la courbe de f et la première bissectrice.
- Conjecturer le comportement de la suite en fonction du premier terme.

Étape 2 : démonstration de la conjecture

- Établir la stabilité de la suite : il s'agit de montrer, par récurrence en utilisant la croissance de f, que la suite reste sur un intervalle où g est de signe constant.
- Donner la monotonie de la suite suivant le signe de g.
- Établir l'existence et la valeur de la limite.

La suite étant monotone, elle admet une limite ; il y a deux cas :

- soit la suite est bornée, alors le théorème de limite monotone, la notion de point fixe et un passage à la limite permettent de conclure.
- soit la suite n'est pas bornée alors un raisonnement par l'absurde permet de conclure sur une limite infinie.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

12.3.3 Exemple avec f décroissante

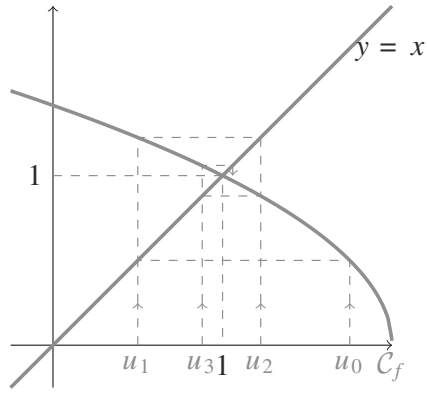
Considérons les suites définies par $u_0 \in [0,2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.
On montre facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0,2]$.

Étape 1 : représentation graphique et conjecture

- **Variations de** f : On pose $f(x) = \sqrt{2-x}$ pour $x \in [0,2]$. f est dérivable sur $[0,2[$ de dérivée strictement négative donc f est strictement décroissante sur $[0,2]$.
 De plus, on a $\forall x \in [0,2],\ f(x) \in [0, \sqrt{2}]$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, \sqrt{2}]$ $(\star)$.
- **Point fixe de** f : Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{2-x} = x &\Leftrightarrow 2 - x = x^2 \text{ et } x \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 1) \text{ et } x \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

 1 est le seul point fixe de f sur $[0,2]$.
- **Représentation graphique et conjecture** :



On se propose de démontrer la conjecture suivante : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Étape 2 : démonstration de la conjecture

Méthode utilisée : majoration de type géométrique de $|u_n - \ell|$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - 1| &= |\sqrt{2-u_n} - 1| = \left|\frac{2 - u_n - 1}{\sqrt{2-u_n}+1}\right|\\ &= \frac{|u_n - 1|}{\sqrt{2-u_n}+1} \leqslant \frac{|u_n-1|}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1} \text{ en utilisant } (\star) \text{ qui est vraie pour } n \geq 1\end{aligned}$$

On pose $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1} \in]0,1[$.
On en déduit par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $|u_n - 1| \leqslant \alpha^{n-1}|u_1 - 1|$.
Or $\alpha^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; le théorème d'encadrement donne $|u_n - 1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Remarque – Ce type de majoration sera régulièrement obtenue par l'inégalité des accroissements finis (voir le chapitre 16 sur la dérivation) :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \max_{[0,\sqrt{2}]}(|f'|)|u_n - \ell|$$

Remarque – Une autre approche possible consiste à considérer $f \circ f$:
Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante. Ici $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone, en revanche la suite des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs le sont : on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$:

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(v_n)$$

Donc $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$ et $w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)$ avec $f \circ f$ est croissante.
Alors, on montre que ces suites sont adjacentes de limite commune 1. En particulier, on peut se ramener au schéma du paragraphe précédent. Ainsi, on obtient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Cette méthode est appliquée dans l'exercice 18 page 333.

Méthode 4 Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$ quand f est décroissante

Étape 1 : représentation graphique et conjecture
- étudier les variations de f, son point fixe
- répresenter la courbe de f et la première bissectrice, conjecturer

Étape 2 : démonstration de la conjecture
- méthode 1 : établir une majoration de type géométrique de $|u_n - \ell|$
- méthode 2 : se ramener au cas d'une fonction croissante en considérant la fonction $h = f \circ f$ et les suites de termes généraux $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Remarque – La méthode 1 n'est pas spécifique au cas f décroissante. Dans tous les cas, sa mise en place sera guidée par le contexte du problème.

Synthèse

Savoirs

Reconnaître et donner l'expression explicite de suites particulières :
- sommes de puissances d'entiers,
- arithmétiques,
- géométriques,
- arithmético-géométriques
- suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

Savoir-faire

- Étudier une suite arithmético-géométrique
- Étudier des situations simples de suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Mots-clés

- Suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique,
- relation linéaire de récurrence d'ordre 2
- point fixe.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

12.1 Déterminer $\sum_{k=7}^{12} \frac{1}{3^k}$.

12.2 Déterminer $\sum_{k=12}^{19} k^2$.

12.3 Pour chaque suite, dire si elle est de type connu et préciser ses caractéristiques. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1) $u_n = 2n + 3$
2) $u_{n+2} = 2u_n$
3) $u_{n+1} = u_n - 4$
4) $u_n = 2u_{n+1}$
5) $u_{n+2} + 9u_n = 6u_{n+1}$
6) $u_{n+1} = (n + 1)u_n$
7) $u_{n+1} = -2u_n + 1$
8) $u_n = 3^{n+2}$
9) $u_{n+2} = u_{n+1} + n$

12.4 À l'aide de la notion de point fixe, donner les limites éventuelles des suites suivantes :

1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$
2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$

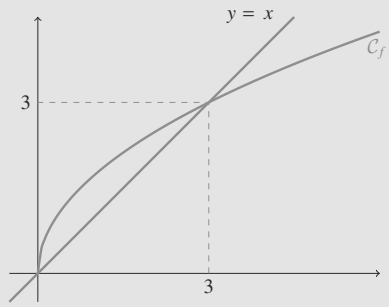
12.5 **Vrai ou faux ?**

a) Soient f une application croissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

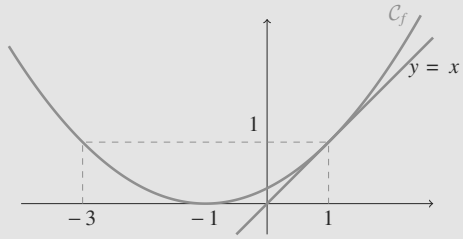
b) Soient f une application croissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = f(n)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

12.6 Conjecturer, en fonction de u_0, la limite éventuelle de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ dans les cas suivants :

a) $f : x \mapsto \sqrt{3x}$ et $u_0 \geqslant 0$



b) $f : x \mapsto \dfrac{(1+x)^2}{4}$



Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 335.

■ Sommes de puissances d'entiers

12.7

Déterminer la limite éventuelle de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

12.8 ◎

Déterminer l'expression de $\sum_{k=1}^{n} k^4$.

12.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

On admet que pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$$

1) Donner un encadrement de $\ln u_n$.
2) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

■ Suites arithmético-géométriques

12.10

Exprimer explicitement les suites définies par :

1) $u_3 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$
2) $v_2 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3$
3) $w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 3 - 5w_n$

12.11 ◎

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln\left(2 + \frac{1}{3}e^{u_n}\right)$$

Déterminer u_n en fonction de n, puis la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12.12 ◎

Déterminer tous les polynômes complexes P tels que

$$P(X) = \alpha P(2 - 3X) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C}^*$$

12.13

Soient (u_n) et (v_n) les suites réelles définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n - v_n \qquad v_{n+1} = -2u_n + 2v_n$$

1) Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

2) Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

3) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de n.

■ **Récurrences linéaires d'ordre 2**

12.14

Exprimer explicitement les suites définies par :

a) $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_1 = 1,\ v_2 = \dfrac{2}{3} \\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 6v_{n+2} - 5v_{n+1} = -v_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} w_0 = 1,\ w_1 = 2 \\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} t_0 = 1,\ t_1 = 0 \\ \text{et pour tout } n \geqslant 2,\ t_n = 3t_{n-2} \end{cases}$

12.15

Exprimer explicitement les suites définies par :

a) $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \qquad \textit{appelée suite de Fibonacci} \\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_0 = 1,\ v_1 = e \\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1}v_n \end{cases}$

12.16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2n - 1\ (\bigstar) \end{cases}$$

1) Chercher une suite vérifiant ($\bigstar$) sous la forme $v_n = an + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2) Exprimer explicitement la suite $w_n = u_n - v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3) En déduire une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ **Suite récurrente de type** $u_{n+1} = f(u_n)$

12.17

Soient $a > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - au_n^2$$

Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$.

12.18 ◎

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1 + 2u_n}$$

1) Montrer que la suite $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est minorée et décroissante, que la suite $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée et croissante.

Montrer que ces deux suites convergent vers $\dfrac{1}{2}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

12.19

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour chacune des situations suivantes, faire l'étude préliminaire :

- Variation de f et signe de $g : x \mapsto f(x) - x$
- Représentation graphique de C_f :
- Conjecture sur la limite éventuelle (suivant u_0).

1) $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x$

2) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exercices d'approfondissement

12.20 d'après oral ESCP 2006

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel.
On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{A}$ des suites réelles vérifiant pour tout entier naturel n, la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$$

1) Montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera, tel que la suite w définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \alpha n(-1)^n$, soit élément de $\mathcal{A}$.
2) Montrer que u appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si la suite $v = u - w$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.
3) Calculer v_n en fonction de v_0, v_1 et n, puis en fonction de u_0, u_1 et n.
En déduire u_n en fonction de u_0, u_1 et n.
Donner un équivalent simple de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$.
4) On suppose ici que $u_0 = u_1 = 1$.
Calculer u_n en fonction de n.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.

12.21 d'après oral ESCP 2004 ◎

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurence sur n en posant :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(a - u_n^2\right)$$

1) Que peut-on dire de la suite u lorsque $a < 0$?
2) Étudier la suite u lorsque $a = 0$ et lorsque $a = 4$.
3) Dans cette question, on suppose que $a \in]0, 4[$.
a) Montrer que $\frac{a}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier $n \geq 1$.
b) Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leq \max\left(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\right)\left|u_n - \sqrt{a}\right|$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

12.22 d'après oral ESCP 2005 ◎

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel. Soit u et v les suites définies par :

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{100} + \sqrt{\frac{1}{101} + \sqrt{\frac{1}{102} + \sqrt{\cdots + \sqrt{\frac{1}{100+n}}}}}}.$$

$$v_n = \sqrt{\frac{1}{100} + \sqrt{\frac{1}{100} + \sqrt{\cdots + \sqrt{\frac{1}{100}}}}}$$

avec $n + 1$ symboles $\sqrt{\cdot}$, dans les deux cas.
On pose pour tout réel strictement positif a, et pour tout réel positif x, $f_a(x) = \sqrt{\frac{1}{a} + x}$.
1) Montrer que les suites u et v sont bien définies.
2) Montrer que f_{100} admet un unique point fixe α que l'on déterminera, puis que la suite v converge vers α.
3) On admet que $u_8 > 1$. Montrer que u converge.

12.23 d'après oral ESCP 2010

On considère la suite u définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$$

1) Démontrer que la suite u est bien définie et à valeurs strictement positives.
2) Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n > 1$.
En déduire la seule limite finie possible pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans toute la suite, l'entier p est fixé, tel que : $\forall n \geqslant p$, $u_n > 1$.
3) On pose pour tout entier naturel n, $w_n = \frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1$, et on considère la suite $(x_n)_{n\geqslant p}$ définie par :

$$\begin{cases} x_p = |w_p|,\ x_{p+1} = |w_{p+1}| \\ \text{et pour tout } n \geq p,\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{3} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant p}$ converge vers 0.
4) Montrer, par récurrence que : $\forall n \geqslant p,\ x_n \geq |w_n|$.
En déduire que la suite w est convergente.
5) En déduire que la suite u est convergente.

Indications

12.8 Calculer de deux façons la somme télescopique : $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^5 - k^5)$

12.11 Se ramener à une suite de type connu en posant $v_n = e^{u_n}$.

12.12 Faire un raisonnement par analyse-synthèse. Dans la partie analyse, étudier l'ensemble des racines éventuelles de P comme les termes d'une suite arithmético-géométrique. Trois cas sont à traiter : pas de racine, une racine particulière, une infinité de racines.

12.18 Dans un premier temps, établir que les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0, 1]$.
Ensuite, comme f est décroissante, $h = f \circ f$ est croissante : la suite $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente de fonction h.

12.21
3) a) Étudier l'application $f : x \mapsto x + \frac{1}{2}(a - x^2)$ sur le segment $\left[\frac{a}{2}, 2\right]$ et montrer :

$$\forall x \in \left[\frac{a}{2}, 2\right],\ f(x) \in \left[\frac{a}{2}, 2\right] \quad (\bigstar)$$

3) b) Utiliser la relation de récurrence et le fait que $\sqrt{a}$ est un point fixe de f pour établir :

$$|\sqrt{a} - u_{n+1}| = |\sqrt{a} - u_n| \times \left|1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2}\right|$$

Enfin, pour $u_n \in [\frac{a}{2}, 2]$, majorer $1 - \frac{\sqrt{a}+u_n}{2}$ et $-1 + \frac{\sqrt{a}+u_n}{2}$.

12.22
1) Ecrire u et v en fonction de f_a, pour des valeurs de a bien choisies.
2) Montrer que v est croissante et majorée par α.
3) Montrer que u est croissante, majorée par α.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

12.1

On a $\displaystyle\sum_{k=7}^{12} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^7}\frac{1-\frac{1}{3^6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^6-1}{2\times 3^{12}}$

Le nombre de termes de la somme est $6 = 12 - 7 + 1$.

12.2

On a $\displaystyle\sum_{k=12}^{19} k^2 = \sum_{k=1}^{19} k^2 - \sum_{k=1}^{11} k^2$

$$= \frac{19\times 20\times 39}{6} - \frac{11\times 12\times 23}{6}$$

12.3

1) La suite $(2n+3)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2 et de premier terme 3.

2) La suite vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 - 2 = 0$. Il y a deux racines réelles distinctes $\pm\sqrt{2}$. La forme générale de la suite est donnée par :

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2;\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (\alpha+\beta(-1)^n)\sqrt{2^n}$$

3) La suite est arithmétique de raison -4.

4) La suite est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

5) La suite vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2-6r+9 = 0$. Il y a une racine double : 3. La forme générale de la suite est donnée par :

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2;\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (\alpha+\beta n)3^n$$

6) La suite n'est pas de type connu (mais on peut tout de même en donner une expression en fonction de n, par récurrence : $u_n = n!u_0$)

7) La suite est arithmético-géométrique.

8) La suite est géométrique de raison 3 et de premier terme 9.

9) La suite n'est pas d'un type connu.

12.4

1) La fonction $f : x \mapsto 3x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a deux cas :

- la suite converge, la limite est un un point fixe de f :

$$x = 3x+1 \ \Leftrightarrow\ x = -\frac{1}{2}$$

- la suite diverge, la limite est $+\infty$ ou $-\infty$.

Les limites éventuelles de la suite sont $\{-\infty, -\dfrac{1}{2}, +\infty\}$.

2) La fonction $g : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a deux cas :

- la suite converge, la limite est un un point fixe de g : $x = x^2 - 4x + 6 \ \Leftrightarrow\ x = 2$ ou $x = 3$
- la suite diverge, la limite est $+\infty$ ou $-\infty$. Les limites éventuelles de la suite sont $\{-\infty, 2, 3, +\infty\}$.

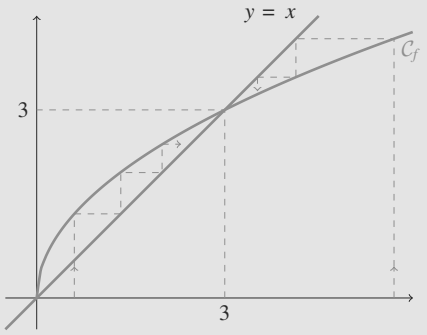
12.5

a) Faux. La variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par le signe de l'application $x \mapsto f(x) - x$.

b) Vrai. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(n+1) \geqslant f(n) = u_n$.

12.6

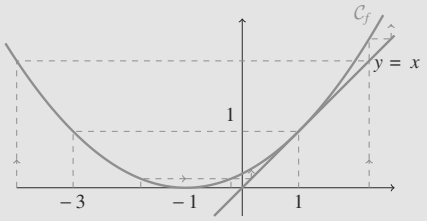
a) Par construction graphique :



on conjecture : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet toujours une limite,

si $u_0 < 0$ alors la suite n'est pas définie
si $u_0 = 0$ alors la suite est la suite nulle ($u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)
si $u_0 > 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$

b) Par construction graphique :



on conjecture : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet toujours une limite,

si $u_0 \in [-3, 1]$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
sinon $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

12.7

Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

12.8

Soient $k, n\in\mathbb{N}$, la formule du binôme donne :

$$(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

Sommons ces égalités pour $k\in[\![1, n]\!]$.

Le membre de gauche est une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^5-k^5)=(n+1)^5-1$$

Le membre de droite est :

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+n$$

On isole dans l'équation $\sum_{k=1}^{n}k^4$; les autres sommes sont connues. On commence par factoriser par $(n+1)$, puis développant et factorisant l'expression, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

12.9

1) Soient $k,n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\ln u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

et $\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^4}\leqslant\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)\leqslant\dfrac{k}{n^2}$.

Sommons ces égalités pour $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)\leqslant\ln u_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2},\ \text{donc}$$

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}\leqslant\ln u_n\leqslant\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

2) Application le théorème d'encadrement avec

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=\dfrac{1}{2}$ et par composition des limites $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{e}$.

12.10

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0=\dfrac{u_3}{3^3}=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2.3^{n-2}$

2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison -3 et de premier terme $v_0=v_2-2(-3)=11$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=11-3n$

3) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha=3-5\alpha:\alpha=\dfrac{1}{2}$
- Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t_n=w_n-\dfrac{1}{2}$.

 La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -5 et de premier terme $t_0=\dfrac{1}{2}$.
- Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$t_n=\frac{(-5)^n}{2},\quad w_n=\frac{1+(-5)^n}{2}$$

12.11

Remarquons que $f:x\mapsto\ln\left(2+\dfrac{1}{3}e^x\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=e^{u_n}$; ainsi,

$$v_{n+1}=2+\frac{1}{3}v_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique :

- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha=2+\dfrac{\alpha}{3}:\alpha=3$
- Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=v_n-3$.

 La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $w_0=v_0-3=e^0-3=-2$.
- Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$w_n=-\frac{2}{3^n},\quad v_n=-\frac{2}{3^n}+3\quad\text{et}\quad u_n=\ln\left(3-\frac{2}{3^n}\right)$$

Comme $\dfrac{1}{3}\in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 3$$

12.12

Procédons par analyse-synthèse :

➜ Analyse (ou condition nécéssaire) :

Considérons un polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation et $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble de ses racines.

La relation vérifiée par P donne pour $x\in\mathcal{Z}(P)$:

$$\begin{aligned}P(x)=0&\Rightarrow P(2-3x)=0\\&\Rightarrow 2-3x\in\mathcal{Z}(P)\end{aligned}$$

Ainsi, considérant une suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_{n+1}=2-3u_n$, si $u_0\in\mathcal{Z}(P)$ alors par récurrence on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathcal{Z}(P)$.

Une telle suite est arithmético-géométrique :

- soit $\lambda=\frac{1}{2}$ solution de $\lambda=2-3\lambda$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases}u_{n+1}=2-3u_n\\ \lambda=2-3\lambda\end{cases}\quad\Rightarrow\quad u_{n+1}-\lambda=-3(u_n-\lambda)$$

 Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n-\frac{1}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison -3 et de premier terme $v_0=u_0-\frac{1}{2}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = (-3)^n\left(u_0 - \frac{1}{2}\right) \text{ et } u_n = (-3)^n\left(u_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

Il y a trois cas :

1) $\mathcal{Z}(P) = \emptyset$ alors P est un polynôme constant : c'est la contraposée du théorème de d'Alembert-Gauss

2) $\mathcal{Z}(P)\backslash\{\frac{1}{2}\} \neq \emptyset$: P possède une racine $x \neq \frac{1}{2}$. Ainsi les termes de la suite définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - 3u_n$ sont dans $\mathcal{Z}(P)$. Or ces termes sont tous distincts donc P possède une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

3) $\mathcal{Z}(P) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$: il existe $\beta \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P = \beta\left(X - \frac{1}{2}\right)^n$.

Donc si P vérifie la relation, alors P est de la forme :

$$P = \beta\left(X - \frac{1}{2}\right)^n$$

où $\beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ ($\beta \in \mathbb{C}^*$ et $n = 0$ correspond au cas 1 ; $\beta = 0$ correspond au cas 2)

➜ Synthèse (ou condition suffisante) :

Réciproquement, on cherche les polynômes de cette forme vérifiant la relation $P(X) = \alpha P(2 - 3X)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Soit $\beta \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et $P = \beta\left(X - \frac{1}{2}\right)^n$:

Or $\beta\left(2 - 3X - \frac{1}{2}\right)^n = (-3)^n\beta(X - \frac{1}{2})^n$. La relation est vérifiée pour $\alpha = (-3)^n$.

En conclusion , les polynômes solutions sont de la forme : il existe $\beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$P = \beta\left(X - \frac{1}{2}\right)^n$$

12.13

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} + v_{n+1} = (3u_n - v_n) + (-2u_n + 2v_n) = u_n + v_n.$$

La suite est donc constante égale à $u_0 + v_0 = 3$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n - v_n = 3u_n - (3 - u_n) = 4u_n - 3$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

3) Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- posons α tel que $\alpha = 4\alpha - 3$: $\alpha = 1$
- posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - 1$.

 Alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 - 1 = 1$.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = 4^n,\ u_n = 4^n + 1 \text{ et } v_n = 3 - u_n = 2 - 4^n$$

12.14

Ce sont toutes des suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre deux.

a) Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 4 = 0$

Discriminant : $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$

Les racines sont : $r_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $r_2 = \overline{r_1}$

La forme générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\left(\alpha\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \beta\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Recherche de α et β grâce aux données initiales :

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha \\ u_1 = 0 = 2\left(\alpha\frac{1}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

b) Étude de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: la suite est définie sur $\mathbb{N}^*$. Si elle avait été définie sur $\mathbb{N}$, il aurait été possible de déterminer v_0 (à partir de v_1) afin de revenir au cas d'étude classique. Comme ce n'est pas le cas, utilisons la méthode proposée en cours :

Équation caractéristique : $6r^2 - 5r + 1 = 0$

Discriminant : $\Delta = 25 - 24 = 1$

Les racines sont : $r_1 = \frac{5 - 1}{12} = \frac{1}{3}$ et $r_2 = \frac{1}{2}$

➜ La forme générale de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{\alpha}{3^{n-1}} + \frac{\beta}{2^{n-1}}$$

Recherche de α et β grâce aux données initiales :

$$\begin{cases} v_1 = 1 = \alpha + \beta \\ v_2 = \frac{2}{3} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{3^{n-1}}$.

c) Étude de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$: la suite est bien définie sur $\mathbb{N}$ même si la relation de récurrence est *décalée*.

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$

Il y a une racine double : $r = 1$.

La forme générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=(\alpha+n\beta)1^n$$

Recherche de α et β grâce aux données initiales :

$$\begin{cases} w_0=1=\alpha \\ w_1=2=\alpha+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=n+1$.

d) Étude de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$: la suite est bien définie sur $\mathbb{N}$.

Équation caractéristique : $r^2-3=0$

Les racines sont : $r_1=\sqrt{3}$ et $r_2=-\sqrt{3}$

La forme générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ t_n=\alpha\sqrt{3^n}+\beta(-\sqrt{3})^n$$

Recherche de α et β grâce aux données initiales :

$$\begin{cases} t_0=1=\alpha+\beta \\ t_1=0=\alpha\sqrt{3}-\beta\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$t_n=\frac{\sqrt{3^n}}{2}(1+(-1)^n)=\begin{cases}\sqrt{3^n} \text{ si } n \text{ est pair}\\ 0 \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

12.15

a) La suite de Fibonacci vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre deux.

Son équation caractéristique est : $r^2-r-1=0$.

Discriminant : $\Delta=1+4=5$.

Les racines sont : $r_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La forme générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Recherche de α et β grâce aux données initiales :

$$\begin{cases} u_0=0=\alpha+\beta \\ u_1=1=\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=-\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

b) On note que $\ln v_0=0=u_0$ et $\ln v_1=1=u_1$. Par ailleurs, on montre facilement par récurrence double que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a alors :

$$\ln v_{n+2}=\ln v_{n+1}+\ln v_n$$

Donc $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en **a)**. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$v_n=e^{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}.$$

12.16

1) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. La suite $(an+b)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (★) si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a(n+2)+b-5(a(n+1)+b)+6(an+b)=2n-1$$

c'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N},\ n(2a-2)+2b-3a+1=0$

ou encore $\begin{cases} 2a-2=0 \\ 2b-3a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n=n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, vérifie (★).

2) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $w_0=2-1=1$, $w_1=6-2=4$ et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient (★), pout tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+2}-5w_{n+1}+6w_n$ vaut

$$\underbrace{(u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n)}_{=2n-1}-\underbrace{(v_{n+2}-5v_{n+1}+6v_n)}_{=2n-1}=0$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

Son équation caractéristique est : $r^2-5r+6=0$.

Discriminant : $\Delta=25-24=1$.

Les racines sont : $r_1=2$ et $r_2=3$.

La forme générale de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=\alpha 2^n+\beta 3^n$$

Recherche de α et β grâce aux données initiales :

$$\begin{cases} w_0=1=\alpha+\beta \\ w_1=4=2\alpha+3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=2.3^n-2^n$

3) Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2.3^n-2^n+n+1$.

12.17

Étude préliminaire : on définit

$f : x\mapsto 2x-ax^2$

• Variations de f : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2(1-ax)$.
Ainsi, le tableau de variations de f est :

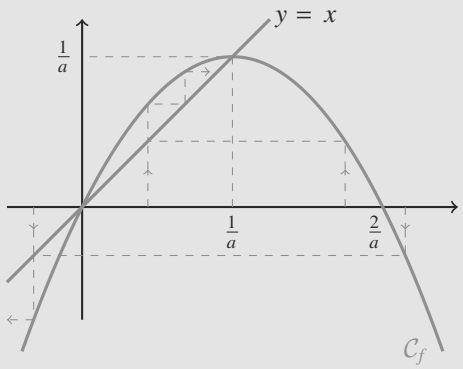
x	$-\infty$		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{a}$	↘	$-\infty$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

• Signe de $g : x \mapsto f(x) - x$: pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x(1 - ax)$. Les points fixes de f sont 0 et $\frac{1}{a}$ et le tableau de signe de g est :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• Représentation graphique de $\mathcal{C}_f$:



• Conjectures : il convient de détailler l'étude sur les ensembles : $]-\infty, 0[$, $\{0\}$, $]0, \frac{1}{a}]$, $]\frac{1}{a}, \frac{2}{a}[$, $\{\frac{2}{a}\}$ et $]\frac{2}{a}, +\infty[$. Quel que soit le premier terme, la suite admet une limite :

$$\begin{cases} \text{si } u_0 \in \left\{0; \dfrac{2}{a}\right\} \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{si } u_0 \in \left]0; \dfrac{2}{a}\right[\text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{a} \\ \text{si } u_0 \in \mathbb{R}_-^* \cup \left]\dfrac{2}{a}; +\infty\right[\text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{cases}$$

Démonstration des conjectures :

➜ Si $u_0 = 0$, alors la suite est constante car 0 est un point fixe de f donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

➜ Si $u_0 = \dfrac{2}{a}$, alors $u_1 = f(u_0) = 0$. D'après ce qui précède, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

➜ Si $u_0 \in]0, \frac{1}{a}]$, alors procédons à l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

• Stabilité de la suite : Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \frac{1}{a}]$:

Initialisation : $u_0 \in]0, \frac{1}{a}]$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]0, \frac{1}{a}]$. Comme f est croissante sur $]0, \frac{1}{a}]$:

$$f(0) = 0 \leqslant f(u_n) = u_{n+1} \leqslant f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \frac{1}{a}]$.

• Variation de la suite : g est positive sur $]0, \frac{1}{a}]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

• Limite de la suite : la suite est croissante et majorée par $\frac{1}{a}$, d'après le théorème de limite monotone, la suite converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, par passage à la limite on a : $0 < u_0 \leqslant \ell$. Or sa limite est un point fixe de f car f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cap \{0, \frac{1}{a}\}$: $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$.

➜ Si $u_0 \in]\frac{1}{a}, \frac{2}{a}[$, alors comme f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{a}, \frac{2}{a}[$, $u_1 = f(u_0) \in]f(\frac{2}{a}), f(\frac{1}{a})[=]0, \frac{1}{a}[$. D'après ce qui précède, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{a}$.

➜ Si $u_0 < 0$, alors procédons à l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

• Stabilité de la suite : Une récurrence permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.

• Variation de la suite : g est négative sur $\mathbb{R}_-^*$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

• Limite de la suite : la suite est décroissante donc admet une limite soit finie soit $-\infty$.

Raisonnons par l'absurde pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Il suffit de montrer qu'elle n'est pas convergente.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, par passage à la limite sa limite est dans $]-\infty, u_0] \subset \mathbb{R}_-^*$. De plus sa limite est un point fixe de f ce qui est impossible puisque les points fixes de f sont dans $\mathbb{R}_+$.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

➜ Si $u_0 > \frac{2}{a}$, alors comme f est strictement décroissante sur $]\frac{2}{a}, +\infty[$, $u_1 = f(u_0) \in]\lim\limits_{-\infty} f, f(\frac{2}{a})[\subset \mathbb{R}_-^*$. D'après ce qui précède, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$.

Conclusion : Chaque situation de la conjecture a été démontrée :

$$\begin{cases} \text{si } u_0 \in \left\{0; \dfrac{2}{a}\right\} \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{si } u_0 \in \left]0; \dfrac{2}{a}\right[\text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{a} \\ \text{si } u_0 \in \mathbb{R}_-^* \cup \left]\dfrac{2}{a}; +\infty\right[\text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{cases}$$

12.18

1) Par récurrence, on peut montrer que les termes de la suite sont dans $[0, 1]$.

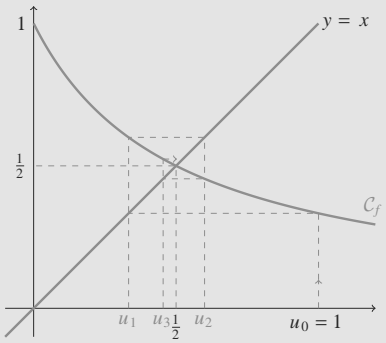
Soit $f : x \in [0, 1] \mapsto \dfrac{1}{1 + 2x}$.

Étude préliminaire :

• Variations de f sur $[0,1]$: f est dérivable sur $[0, 1]$ de dérivée $f' : x \mapsto -\frac{2}{(1+2x)^2}$. Ainsi f est décroissante sur $[0, 1]$.

Point fixe de f : $f(x) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

• Représentation graphique de $\mathcal{C}_f$:



Soit $h : x \mapsto f(f(x)) = \frac{1+2x}{3+2x}$
On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = h(u_n)$
• Tableau de variations de h :

x	0		1
$h(x)$		↗	

• Signe de $g : x \mapsto h(x) - x$: pour $x \in [0, 1]$,
$g(x) = \frac{1+2x}{3+2x} - x = \frac{-2x^2-x+1}{3+2x} = \frac{(x+1)(1-2x)}{3+2x}$
Tableau de signe de g :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g(x)$		$+$	0	$-$	

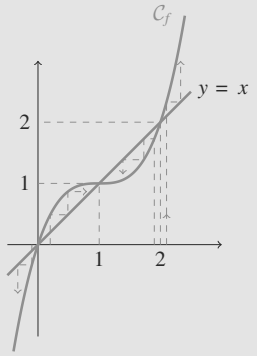
➜ Étude de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$:
• Stabilité sur $[\frac{1}{2}, 1]$: on a $u_0 = 1$; une récurrence permet de montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [\frac{1}{2}, 1]$.
• Variation : comme g est de signe négatif sur $[\frac{1}{2}, 1]$ alors la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
• Limite : la suite est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, d'après le théorème de limite monotone, elle converge. Par passage à la limite ont sait que sa limite est dans $[\frac{1}{2}, 1]$. De plus, la limite est un point fixe de h (car h continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$), donc $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée et converge vers $\frac{1}{2}$.
➜ Étude de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:
• Stabilité sur $[0, \frac{1}{2}]$: on a $u_1 = f(1) = \frac{1}{3}$; une récurrence permet de montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$.
• Variation : comme g est de signe positif sur $[1, \frac{1}{2}]$ alors la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
• Limite : la suite est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, d'après le théorème de limite monotone, elle converge. Par passage à la limite ont sait que sa limite est dans $[0, \frac{1}{2}]$. De plus, la limite est un point fixe de h (car h continue sur $[0, \frac{1}{2}]$), donc $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée et converge vers $\frac{1}{2}$.
2) Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers $\frac{1}{2}$.

12.19

1) $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x$
• Études fonctionnelles :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3(x-1)^2 \geqslant 0$$
et $g(x) = f(x) - x = x(x-1)(x-2)$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$			↗					$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

• Représentation graphique de C_f :



• Conjecture : il convient de détailler l'étude sur les ensembles : $]-\infty, 0[$, $\{0\}$, $]0, 1]$, $[1, 2[$, $\{2\}$ et $]2, +\infty[$. Quel que soit le premier terme, la suite admet une limite :

$$\begin{cases} \text{si } u_0 < 0 \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \text{si } u_0 \in \{0, 2\} \text{ alors la suite est constante} \\ \text{si } u_0 \in]0, 2[\text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \\ \text{si } u_0 > 2 \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$$

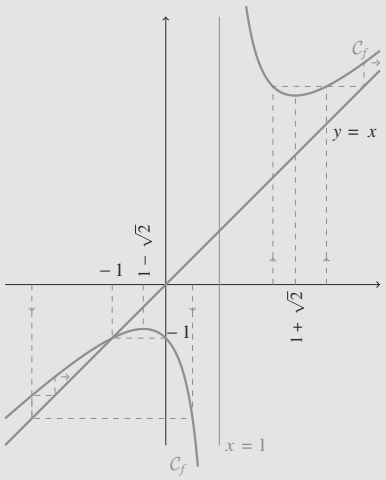
2) $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x-1}$
• Études fonctionnelles : pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,
$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}{(x-1)^2}$
et $g(x) = f(x) - x = \frac{x^2+1}{x-1} - x = \frac{1+x}{x-1}$. D'où les tableaux :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

et

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

• Représentation graphique de C_f :



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

• Conjecture : il convient de détailler l'étude sur les ensembles : $]-\infty,-1]$, $[-1,1-\sqrt{2}]$, $]1-\sqrt{2},0]$, $]0,1[$, $]1,1+\sqrt{2}[$ et $[1+\sqrt{2},+\infty[$. Si $u_0=1$ la suite n'est pas définie, sinon la suite admet une limite :

$$\begin{cases}\text{si } u_0<1 \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1\\ \text{si } u_0>1 \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{cases}$$

12.20

1) On remplace u_n par $\alpha n(-1)^n$ dans l'équation de récurrence ; pour tout n on a :

$$\alpha(n+2)(-1)^{n+2}=\alpha(n+1)(-1)^{n+1}+2\alpha n(-1)^n+(-1)^n$$

c'est-à-dire $(-1)^n(3\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{3}$.

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\begin{cases}u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n+(-1)^n\\ w_{n+2}=w_{n+1}+2w_n+(-1)^n\end{cases}$$

Par soustraction on obtient que $v=u-w$ vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=v_{n+1}+2v_n \quad (\bigstar)$$

La suite v est récurrente linéaire d'ordre deux.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\begin{cases}v_{n+2}=v_{n+1}+2v_n\\ w_{n+2}=w_{n+1}+2w_n+(-1)^n\end{cases}$$

Par addition, on obtient que $u=v+w$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n+(-1)^n$, donc $u\in\mathcal{A}$.

3) L'équation caractéristique associée à $(\bigstar)$ est : $r^2-r-2=0$.
Le discriminant est : $\Delta=1+8=9$.
Les racines sont : $r_1=\frac{1-3}{2}=-1$ et $r_2=\frac{1+3}{2}=2$.
La forme générale de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : il existe $(\beta,\lambda)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\beta(-1)^n+\lambda 2^n$$

Recherche de β et λ grâce aux données initiales :

$$\begin{cases}v_0=\beta+\lambda\\ v_1=-\beta+2\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{2v_0-v_1}{3}\\ \lambda=\dfrac{v_0+v_1}{3}\end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_n=\frac{2v_0-v_1}{3}(-1)^n+\frac{v_0+v_1}{3}2^n$$

Or, $v_0=u_0-w_0=u_0$ et $v_1=u_1-w_1=u_1+\frac{1}{3}$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_n=\frac{6u_0-3u_1-1}{9}(-1)^n+\frac{3u_0+3u_1+1}{9}2^n$$

Enfin, $u=v+w$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\frac{6u_0-3u_1-1+3n}{9}(-1)^n+\frac{3u_0+3u_1+1}{9}2^n$$

Recherche d'un équivalent de u_n :
comme $6u_0-3u_1-1=o(n)$ et $n(-1)^n=o(2^n)$, alors
• si $3u_0+3u_1+1\neq 0$, on a $u_n\sim\dfrac{3u_0+3u_1+1}{9}2^n$,
• sinon $u_n\sim\dfrac{n}{3}(-1)^n$.

4) D'après ce qui précède : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\frac{2+3n}{9}(-1)^n+\frac{7}{9}2^n$$

Montrons par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$ que :
$|u_n|\leqslant 2^{n+1}-1$.
• Initialisation : $u_0=1\leqslant 1=2^1-1$ et $u_1=1\leqslant 3=2^2-1$.
• Hérédité : soit $n\geqslant 1$, on suppose que $|u_{n-1}|\leq 2^n-1$ et $|u_n|\leq 2^{n+1}-1$. Considérons le rang $n+1$:
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}|u_{n+1}|&=|u_n+2u_{n-1}+(-1)^{n+1}|\\ &\qquad\text{l'inégalité triangulaire donne}\\ |u_{n+1}|&\leqslant |u_n|+2|u_{n-1}|+1\\ &\qquad\text{l'hypothèse de récurrence donne}\\ &\leqslant 2^{n+1}-1+2(2^n-1)+1\\ &\leqslant 2^{n+2}-2\leqslant 2^{n+2}-1\end{aligned}$$

• Conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\leq 2^{n+1}-1$.

12.21

1) Si $a<0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(a-u_n^2)<0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc elle admet une limite soit finie, soit $-\infty$.
Supposons que la limite est finie : $\ell\in\mathbb{R}_-$. Alors ℓ est un point fixe de l'application continue sur $\mathbb{R}$, $f: x\mapsto x+\frac{1}{2}(a-x^2)$:

$$f(x)=x\Leftrightarrow x^2=a<0$$

Ceci est impossible car un carré est toujours positif, donc la suite diverge et $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$.

2) • Si $a=0$, f possède un unique point fixe : 0. La suite est constante : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=0$.
• Si $a=4$, f possède deux points fixes : 2 et -2. Or $u_1=f(u_0)=2$, donc la suite est constante à partir du rang 1 : $\forall n\geqslant 1,\ u_n=2$.

3) a) L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f': x\mapsto 1-x$. Le tableau de variations est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi f admet un maximum en $x=1$, qui vaut $\frac{a+1}{2}$.
On a $u_1=f(0)=\frac{a}{2}$.

➜ Montrons que pour tout $x\in[\frac{a}{2},2]$, $f(x)\in[\frac{a}{2},2]$.
Deux cas sont à distinguer :
• soit $a\in]0,2]$ alors $\frac{a}{2}\leqslant 1$: f est croissante sur $[\frac{a}{2},1]$:
$\forall x\in[\frac{a}{2},1],\ f(x)\in[f(\frac{a}{2}),f(1)]$.
Or $f(1)=\frac{a+1}{2}\leqslant\frac{3}{2}\leqslant 2$ et $f(\frac{a}{2})-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\left(1-\frac{a}{4}\right)\geqslant 0$ car $a<2$; donc $\forall x\in[\frac{a}{2},1],\ f(x)\in[\frac{a}{2},2]$.

f est décroissante sur $[1,2]$: $\forall x \in [1,2],\ f(x) \in [f(2), f(1)]$.

Or $f(1) = \frac{a+1}{2} \leqslant \frac{3}{2} \leqslant 2$ et $f(2) = \frac{a}{2}$; donc $\forall x \in [1,2],\ f(x) \in [\frac{a}{2}, 2]$.

• soit $a \in]2,4[$ alors $\frac{a}{2} \geqslant 1$:

f est décroissante sur $[\frac{a}{2}, 2]$: $\forall x \in [1,2],\ f(x) \in [f(2), f(\frac{a}{2})]$.

Or $f(2) = \frac{a}{2}$ et $f(\frac{a}{2}) = a(1 - \frac{a}{8})$. Une étude rapide de l'application $h : x \mapsto x(1 - \frac{x}{8})$ donne que h est croissante sur $[0,4]$. Comme $a \in]2,4[$, $f(\frac{a}{2}) = h(a) \leqslant h(4) = 2$: donc $\forall x \in [1,2],\ f(x) \in [\frac{a}{2}, 2]$.

Conclusion : $\forall x \in [\frac{a}{2}, 2],\ f(x) \in [\frac{a}{2}, 2]$ (★)

➜ Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [\frac{a}{2}, 2]$:
• Initialisation : $u_1 = \frac{a}{2} \in [\frac{a}{2}, 2]$.
• Hérédité : soit $n \geqslant 1$, suppons $u_n \in [\frac{a}{2}, 2]$.
D'après (★), $u_{n+1} = f(u_n) \in [\frac{a}{2}, 2]$.
• Conclusion, $\forall n \geqslant 1,\ u_n \in [\frac{a}{2}, 2]$.

3) b) $\sqrt{a}$ est un point fixe de f, donc pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} |\sqrt{a} - u_{n+1}| &= |f(\sqrt{a}) - f(u_n)| \\ &= \left|\sqrt{a} - \tfrac{a}{2} - u_n + \tfrac{u_n^2}{2}\right| \\ &= |\sqrt{a} - u_n| \times \left|1 - \tfrac{\sqrt{a}+u_n}{2}\right| \end{aligned}$$

Majorons $\left|1 - \frac{\sqrt{a}+u_n}{2}\right|$:
Pour $n \geqslant 1$, $u_n \in [\frac{a}{2}, 2]$ donc :

$$1 - \tfrac{\sqrt{a}+u_n}{2} \leqslant 1 - \tfrac{\sqrt{a}+\frac{a}{2}}{2} = 1 - \tfrac{\sqrt{a}}{2} - \tfrac{a}{4}$$
$$-1 + \tfrac{\sqrt{a}+u_n}{2} \leqslant -1 + \tfrac{\sqrt{a}+2}{2} = \tfrac{\sqrt{a}}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|\sqrt{a} - u_{n+1}| \leqslant \max\left(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\right) |\sqrt{a} - u_n|.$$

3) c) Posons $\alpha = \max(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4})$.
On a $\frac{\sqrt{a}}{2} > 0$ donc $\alpha > 0$. De plus $\frac{\sqrt{a}}{2}$ et $1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}$ sont tous les deux strictement inférieurs à 1. Donc $\alpha \in]0,1[$.
La question précédente donne :

$$\forall n \geqslant 1,\ |\sqrt{a} - u_{n+1}| \leq \alpha |\sqrt{a} - u_n|.$$

Une récurrence permet d'établir :

$$\forall n \geqslant 1,\ |\sqrt{a} - u_n| \leq \alpha^{n-1} |\sqrt{a} - u_1|.$$

Or $\alpha \in]0,1[$, donc $\alpha^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
donc $\alpha^{n-1} |\sqrt{a} - u_1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a}$.

12.22

1) Pour tout $a > 0$, f_a est définie de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}(0)$
et $v_n = \underbrace{f_{100} \circ f_{100} \circ \cdots \circ f_{100}(0)}_{(n+1) \text{ fois}}$
Ainsi, les suites u et v sont bien définies.
2) Recherche des points fixes de f_{100} :

$$f_{100}(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{1}{100} = 0$$

Discriminant : $\Delta = 1 + \frac{4}{100} = \left(\frac{\sqrt{104}}{10}\right)^2$.
Une seule racine positive : $r = \frac{1+\frac{\sqrt{104}}{10}}{2} = \frac{10+\sqrt{104}}{20}$.
Donc f_{100} admet un unique point fixe : $\alpha = \frac{10+\sqrt{104}}{20}$.
Étude de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f_{100}(v_n)$.
• Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0, \alpha]$:
Initialisation : $v_0 = \frac{1}{10} < \frac{10}{20} < \alpha$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant v_n \leqslant \alpha$.
f_{100} étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f_{100}(0) \leqslant f_{100}(v_n) \leqslant f_{100}(\alpha)$;
ce qui donne $0 \leqslant \sqrt{\frac{1}{100}} \leqslant v_{n+1} \leqslant \alpha$.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \alpha$.
• Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone :
Considérant v_0 et v_1, il y a deux cas :
Soit $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant \alpha$: Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$.
Initialisation : $v_0 \leqslant v_1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $v_n \leqslant v_{n+1}$. Comme f_{100} est croissante, $f(v_n) \leqslant f(v_{n+1})$ et donc $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$.
Conclusion, la suite est croissante.
Soit $0 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant \alpha$: une récurrence similaire donne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant v_{n+1}$. La suite est décroissante.
• La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée, d'après le théorème de limite monotone, elle converge vers une limite positive.
De plus sa limite est un point fixe de f_{100} car f_{100} est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
3) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $h = f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}$, application strictement croissante car composée d'applications strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, $u_{n+1} = h\left(\sqrt{\frac{1}{100+n+1}}\right) > h(0) = u_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant \alpha$ donc la suite est majorée.
Le théorème de limite monotone donne que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

12.23

1) Procédons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$:
• Initialisation : $u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+^*$
• Hérédité : soit $n \geqslant 0$, on suppose $u_n, u_{n+1} > 0$, alors $\sqrt{u_n}$ et $\sqrt{u_{n+1}}$ existent et sont strictement positifs, donc $\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} > 0$ et u_{n+2} est bien défini.
• Conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien défnie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrons par l'absurde qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > 1$: supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.
Or pour tout $x \in [0,1]$, $\sqrt{x} \geqslant x$ donc $u_2 \geqslant u_1 + u_0$.
Posons $y_1 = u_1$, $y_0 = u_0$, et pour $n \geq 1$,

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}.$$

Alors, une récurrence double (et l'argument $x \in [0,1] \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant x$) permet de montrer :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < y_n \leqslant u_n \leq 1.$$

Alors, pour tout $k \geq 1$, $y_{k+1} - y_k = y_{k-1} \geq 0$, donc la suite $(y_k)_{k\geq 1}$ est croissante, donc $y_{k-1} \geq y_1$ pour $k \geq 2$. Par conséquent, pour

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

tout $k \geq 2$,

$$y_{k+1} - y_k \geq y_1.$$

On somme ces dernières inégalités pour $k \in [\![2, n-1]\!]$:

$$y_n \geq (n-2)y_1 + y_2 \geq (n-1)y_1.$$

Or $(n-1)y_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $y_1 > 0$), donc par comparaison $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ qui contredit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Conclusion, il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_p > 1$.
Comme pour tout $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$, alors une récurrence rapide donne que pout tout $n \geqslant p$, $u_n > 1$.

Recherche des limites finies éventuelles de u :
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$.
Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$, par passage à la limite on obtient : $\ell = 2\sqrt{\ell} \Leftrightarrow \ell \in \{0, 4\}$
Comme $\forall n \geqslant p$, $u_n > 1$, par passage à la limite $\ell \geqslant 1$.
Donc la seule limite finie possible est $\ell = 4$.
3) La suite x vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.
Equation caractérisitque associée : $3r^2 - r - 1 = 0$.
Discrimant : $\Delta = 1 + 12 = 13$.
Les racines sont : $r_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$.
La forme générale de la suite est : il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall\, n \geq p, x_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
Or $r_1, r_2 \in]-1, 1[$ car $\sqrt{13} \in [3, 4]$; ainsi, $r_1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $r_2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par somme, on obtient que la suite $(x_n)_{n\geqslant p}$ converge vers 0.

4) Procédons par récurrence double sur $n \geq p$:
• Initialisation : $|w_p| = x_p$ et $|w_{p+1}| = x_{p+1}$. la relation est vraie aux rangs p et $p+1$.
• Hérédité : soit $n \geqslant p$, on suppose que $|w_n| \leq x_n$ et $|w_{n+1}| \leq x_{n+1}$. Considérons x_{n+2}.

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \tfrac{x_{n+1}+x_n}{3} \geqslant \tfrac{1}{3}(|w_n| + |w_{n+1}|) \\ &\quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\geqslant \tfrac{1}{3}\left(\left|\tfrac{\sqrt{u_n}}{2} - 1\right| + \left|\tfrac{\sqrt{u_{n+1}}}{2} - 1\right|\right) \\ &\quad \text{par l'inégalité triangulaire :} \\ &\geqslant \tfrac{1}{3}\left|\tfrac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}}}{2} - 2\right| \\ &\geqslant \tfrac{2}{3}\left|\tfrac{u_{n+2}}{4} - 1\right| \\ &\geqslant \tfrac{2}{3}\left|\tfrac{\sqrt{u_{n+2}}}{2} - 1\right| \times \left|\tfrac{\sqrt{u_{n+2}}}{2} + 1\right| \end{aligned}$$

Or $u_{n+2} > 1$ (car $n + 2 \geq p$) donc $\left|\frac{\sqrt{u_{n+2}}}{2} + 1\right| > \frac{3}{2}$ et

$$x_{n+2} \geqslant \left|\frac{\sqrt{u_{n+2}}}{2} - 1\right| = |w_{n+2}|$$

• Conclusion : pour tout $n \geqslant p$, $x_n \geqslant |w_n|$.
Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le théorème d'encadrement donne que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
5) On a $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sqrt{u_n} = 2(w_n + 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Par continuité de $x \mapsto x^2$ en 2, $u_n = (\sqrt{u_n})^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

Étude asymptotique des suites

CHAPITRE 13

Plan

13.1 Suite négligeable devant une autre 345
13.2 Suites équivalentes 348
Synthèse 353
Tests et exercices 354
Corrigés des exercices 357

Introduction

On ne dispose jusqu'à présent que d'un seul outil permettant de comparer deux suites réelles : celui fourni par les inégalités. Elles donnent lieu à quelques résultats : passage à la limite, théorème d'encadrement, théorème de comparaison, convergence des suites adjacentes.

Dans ce chapitre, il s'agit d'introduire deux nouvelles relations de comparaison : la négligeabilité et l'équivalence. Elles constituent un outil très puissant pour lever les formes indéterminées et trouver la limite d'une suite. Plus généralement, elles permettent de mieux comprendre le comportement de u_n lorsque n devient grand : on parle alors d'étude asymptotique de la suite.

Objectifs

- Comparer des suites réelles à l'aide des relations de négligeabilité et d'équivalence.
- Déterminer un équivalent simple d'une suite réelle.

Prérequis

Généralités sur les suites réelles.

13.1 Suite négligeable devant une autre

13.1.1 Définition

Définition – Suite négligeable devant une autre

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est négligeable devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.

On note alors $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et on lit « u_n est un petit o de v_n ».

Remarques

1. L'écriture $a_n = b_n + o(u_n)$ signifie que $a_n - b_n = o(u_n)$.
2. On place le $o(u_n)$ en dernière position : on évitera d'écrire $a_n = o(u_n) + b_n$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Méthode 1 Montrer que $u_n = o(v_n)$

Pour montrer qu'une suite est négligeable devant une autre, on utilise très souvent le résultat suivant : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors :

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration

• Supposons $u_n = o(v_n)$ et soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang. Quitte à prendre n encore plus grand pour avoir $v_n \neq 0$, il vient $\frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang. Donc $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• Réciproquement, supposons $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ v_n \neq 0$. On pose alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$.
Ainsi $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \varepsilon_n v_n$. Par conséquent $u_n = o(v_n)$. ■

Exemples d'application

1. $n = o(n^2)$: en effet $\dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$: en effet $\dfrac{1}{n^2} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^{-1} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. $\dfrac{1}{n} = o(n)$: en effet le quotient de $\dfrac{1}{n}$ par n est $\dfrac{1}{n^2}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
 Plus généralement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers un infini, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et donc $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $u_n = o(v_n)$.



$a_n = o(u_n)$ et $b_n = o(u_n)$ ne signifie pas que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales. Par exemple, on a $n = o(n^3)$ et $n^2 = o(n^3)$ bien que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \neq n^2$.
Il faut bien comprendre qu'on désigne par le même symbole $o(u_n)$ **n'importe quelle** suite négligeable devant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

13.1.2 Propriétés

Proposition – Caractérisation des suites de limite nulle
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, alors : $u_n = o(1) \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration
On a : $u_n = o(1) \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Proposition – Règles d'utilisation des o
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles et λ un nombre réel.

(i) *Si $u_n = o(v_n)$ et si $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*
(ii) *Si $u_n = o(w_n)$ et si $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.*
(iii) *Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$.*
(iv) *Si $u_n = o(v_n)$ et si $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.*
(v) *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(u_n w_n)$.*
(vi) *Si $\lambda \neq 0$: $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow u_n = o(\lambda v_n)$.*

Démonstration

Démontrons par exemple la propriété (i). On suppose $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ donc il existe deux suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que : $\forall n \geqslant n_1,\ u_n = \varepsilon_n v_n$ et $\forall n \geqslant n_2,\ v_n = \eta_n w_n$. Par conséquent pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2),\ u_n = (\varepsilon_n \eta_n) w_n$. Or $\varepsilon_n \eta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n = o(w_n)$. ■

Exemples

1. On a $n^2 = o(n^3)$ et $n = o(n^3)$ (car $\dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). On en déduit que $n + n^2 = o(n^3)$ (on a utilisé ici la propriété (ii)).
2. On a $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{2}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (on a utilisé ici la propriété (iii)).

13.1.3 Comparaison des suites usuelles

La notion de négligeabilité permet notamment de comparer deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes les deux vers 0 ou qui tendent toutes les deux vers un infini. Dans ce cas, la recherche de la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$ aboutit *a priori* à une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ » ou « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». La connaissance des relations de négligeabilité suivantes permettra de lever un certain nombre de ces formes indéterminées.

Théorème – Croissance comparée des suites usuelles

Soient a, b, α et β des nombres réels.

- Si $\alpha < \beta$, alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.
- Si $0 < a < b$, alors a $a^n = o(b^n)$.
- Si $\alpha > 0$, alors $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.
- Si $a > 1$, alors $n^\alpha = o(a^n)$. En particulier $n^\alpha = o(e^n)$.
- On a $a^n = o(n!)$.

Démonstration

À titre d'exemple, montrons que si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 1$, alors $n^\alpha = o(a^n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{n^\alpha}{a^n} = \dfrac{\exp(\alpha \ln(n))}{\exp(n \ln(a))} = \exp(\alpha \ln(n) - n \ln(a))$.

Or $\alpha \ln(n) - n \ln(a) = n(\alpha \dfrac{\ln(n)}{n} - \ln(a))$ et on sait que $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\alpha \dfrac{\ln(n)}{n} - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(a)$.

Or $a > 1$ donc $-\ln(a) < 0$ d'où : $\alpha \ln(n) - n \ln(a) = n(\alpha \dfrac{\ln(n)}{n} - \ln(a)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$ donc par composition : $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ainsi $n^\alpha = o(a^n)$. ■

Le théorème précédent permet de classer les suites usuelles en fonction de la vitesse à laquelle elles tendent vers 0 ou vers $+\infty$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

➜ Classement des suites usuelles tendant vers $+\infty$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ et si $u_n = o(v_n)$, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend plus rapidement vers $+\infty$ que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

lente						rapide
	$(\ln n)^\gamma$	n^α	n^β	a^n	b^n	$n!$
	$\gamma > 0$	$0 < \alpha < \beta$		$1 < a < b$		

➜ Classement des suites usuelles convergeant vers 0

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 et si $u_n = o(v_n)$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge plus rapidement vers 0 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

lente						rapide
	$\dfrac{1}{(\ln n)^\gamma}$	$\dfrac{1}{n^\alpha}$	$\dfrac{1}{n^\beta}$	b^n	a^n	$\dfrac{1}{n!}$
	$\gamma > 0$	$0 < \alpha < \beta$		$0 < a < b < 1$		

Exemples

1. $n^2 = o(3^n)$ car $3 > 1$.
 En revanche $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = o(n^2)$ car $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. $(\ln n)^3 = o((-2)^n)$. En effet, par croissance comparée : $(\ln n)^3 = o(2^n)$ car $2 > 1$, on en déduit que $\left|\dfrac{(\ln n)^3}{(-2)^n}\right| = \dfrac{(\ln n)^3}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

13.2 Suites équivalentes

13.2.1 Définition

Définition – Suites équivalentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est équivalente à** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On note alors $u_n \sim v_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Proposition – *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.*
- *La relation d'équivalence est symétrique : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$.*
- *Elle est également transitive : si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*

Méthode 2 Montrer que $u_n \sim v_n$

Pour montrer que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, on utilise souvent les résultats suivants.
- $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(u_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.
- Si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Démonstration

On démontre le premier résultat, la démonstration du second étant en tout point analogue à celle de $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• Supposons $u_n \sim v_n$, alors il existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 telle qu'à partir d'un certain rang $u_n = \alpha_n v_n$ et donc $u_n - v_n = (\alpha_n - 1)v_n$. Or $\alpha_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n - v_n = o(v_n)$.

• Réciproquement supposons $u_n - v_n = o(v_n)$. Il existe alors $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle qu'à partir d'un certain rang $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$ et donc $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$. Or $1 + \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \sim v_n$.

On a donc montré : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$. En échangeant les rôles des deux suites, on en déduit : $v_n \sim u_n \Leftrightarrow v_n - u_n = o(u_n)$.
Or $v_n \sim u_n \Leftrightarrow u_n \sim v_n$ et $v_n - u_n = o(u_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = o(u_n)$.
On obtient ainsi $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(u_n)$. ■

Exemples d'application

1. $n + 1 \sim n$ car $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
2. $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. En effet $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\ln(n+1) - \ln(n) = o(\ln(n))$.
3. $n + \ln(n) \sim n$ car $(n + \ln(n)) - n = \ln(n) = o(n)$ par croissance comparée.

13.2.2 Propriétés

➜ Équivalence et limite

Proposition – *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*
• si $u_n \sim v_n$ et si l'une des deux suites admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors l'autre suite admet la même limite,
*• réciproque partielle : si les deux suites convergent vers une même limite **finie non nulle** $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim v_n$.*

Démonstration

• On suppose $u_n \sim v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Il existe alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 telle qu'à partir d'un certain rang $u_n = \alpha_n v_n$. On a $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc $\alpha_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, ce qui prouve que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

• Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell \in \mathbb{R}^*$.
Sans perte de généralité, on peut supposer $\ell \in]0, +\infty[$. $]0, +\infty[$ étant un intervalle ouvert contenant ℓ, par définition de la limite, on a $v_n \in]0, +\infty[$ à partir d'un certain rang.
On peut donc définir $\dfrac{u_n}{v_n}$ à partir d'un certain rang et on a $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite non nulle. Ainsi $u_n \sim v_n$.
On remarque que si la limite commune était nulle ou infinie, on obtiendrait une forme indéterminée, ce qui nous empêcherait de conclure. ■



• La réciproque est fausse lorsque $\ell \in \{0, +\infty, -\infty\}$. Voici deux contre-exemples :
– Les suites de termes généraux $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ convergent toutes les deux vers 0 et pourtant $u_n \neq v_n$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

– Les suites de termes généraux $u_n = n$ et $v_n = n^2$ tendent toutes les deux vers $+\infty$ et pourtant $u_n \not\sim v_n$.

• Pour tout réel ℓ **non nul**, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow u_n \sim \ell$. Cette équivalence est fausse lorsque $\ell = 0$ car $u_n \sim 0$ signifie que $u_n = 0$ à partir d'un certain rang. L'expérience montre que, lorsqu'on est amené à écrire $u_n \sim 0$, il est presque certain que l'on a commis une erreur de raisonnement.

➜ Équivalence et négligeabilité

Proposition – *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.*

- *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim v_n$.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim w_n$ alors $w_n = o(v_n)$.*

Remarque – Les deux dernières propriétés signifient que, dans une relation de négligeabilité, on peut remplacer une des deux suites par une suite qui lui est équivalente.

➜ Équivalence et opérations algébriques

Proposition – Compatibilité avec le produit et le quotient
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles.
On suppose que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. Alors :

- $u_n w_n \sim v_n t_n$,
- *si à partir d'un certain rang $w_n \neq 0$ et $t_n \neq 0$, alors $\dfrac{1}{w_n} \sim \dfrac{1}{t_n}$ et $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$.*

Remarque – En particulier si $u_n \sim v_n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.



Attention, l'équivalence n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction. C'est une source très fréquente d'erreurs.
Voici un contre-exemple : posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$ et $w_n = t_n = -n^2$. On vérifie facilement que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$.
Pourtant $u_n + w_n \not\sim v_n + t_n$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + w_n = n$ et $v_n + t_n = 0$.

➜ Équivalence et composition



En règle générale, on ne peut pas composer des équivalents : si $u_n \sim v_n$ et si f est une fonction quelconque, on n'aura pas *a priori* $f(u_n) \sim f(v_n)$. On donne ci-dessous quelques contre-exemples.

- $n + 1 \sim n$ et pourtant $e^{n+1} \not\sim e^n$ puisque $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e$ ne tend pas vers 1.
- $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ et pourtant $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \not\sim \ln(1)$. En effet $\ln(1) = 0$.

Il existe néanmoins quelques exceptions précisées par la proposition suivante.

Proposition – *Supposons $u_n \sim v_n$ alors :*

- $|u_n| \sim |v_n|$,
- *pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n^k \sim v_n^k$.*
- *si à partir d'un certain rang $u_n > 0$ et $v_n > 0$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.*

Remarque – Il est important de remarquer que, dans la proposition précédente, k et α sont des constantes indépendantes de n. On verra dans le paragraphe suivant un exemple justifiant que $u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n^n \sim v_n^n$.

Exemple

On a $4n^2 + 3n + 2 \sim 4n^2$ puisque $\dfrac{4n^2 + 3n + 2}{4n^2} = 1 + \dfrac{3}{4n} + \dfrac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

On en déduit que $\sqrt{4n^2 + 3n + 2} \sim \sqrt{4n^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{4n^2 + 3n + 2} \sim 2n$.

13.2.3 Équivalents usuels

Proposition – Expressions polynomiales
Si $a_q \neq 0$ *alors* $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_q n^q \sim a_q n^q$.

Démonstration
On a $\dfrac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_q n^q}{a_q n^q} = \dfrac{a_0}{a_q n^q} + \dfrac{a_1}{a_q n^{q-1}} + \cdots + \dfrac{a_{q-1}}{a_q n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. ■

Ne pas oublier l'hypothèse $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ lorsqu'on utilise ces équivalents usuels.

Théorème – Équivalents usuels
Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors :

- $\sin u_n \sim u_n$,
- $1 - \cos u_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$,
- $\tan u_n \sim u_n$,
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$,
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Nous verrons comment obtenir les équivalents usuels dans le chapitre 14 « Étude locale des fonctions ».

Exemples

1. On a $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n^2}$.
2. Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 1. On cherche des équivalents de $\ln(v_n)$ et de $v_n^\alpha - 1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(v_n) = \ln(1 + (v_n - 1))$, or $v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln(v_n) \sim v_n - 1$.
 - $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n^\alpha - 1 = (1 + (v_n - 1))^\alpha - 1$, or $v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par conséquent $v_n^\alpha - 1 \sim \alpha(v_n - 1)$.

Méthode 3 « Composer » les équivalents usuels

Supposons qu'on cherche à déterminer un équivalent de $(g \circ f)(u_n)$ à l'aide des équivalents usuels.

Si on commence par déterminer un équivalent de $f(u_n)$, on risque de ne pas aboutir puisqu'on ne peut pas composer une relation d'équivalence (en effet $f(u_n) \sim v_n \not\Rightarrow g(f(u_n)) \sim g(v_n)$).

On commencera donc par utiliser l'équivalent usuel associé à la fonction g, puis celui associé à la fonction f en s'inspirant des exemples ci-dessous.

Exemples d'application

1. Cherchons un équivalent simple de $\tan\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Si on commence par écrire que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, on ne pourra pas aboutir.

$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ainsi $\tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
(on utilise ici le fait que, lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\tan(u_n) \sim u_n$).

Or $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, et donc $\tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{n}$.

2. Déterminons un équivalent simple de $\ln\left(\cos\left(\frac{3}{n^2}\right)\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln\left(\cos\left(\frac{3}{n^2}\right)\right) = \ln\left(1 + \cos\left(\frac{3}{n^2}\right) - 1\right)$.

Or $\frac{3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc : $\cos\left(\frac{3}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\cos\left(\frac{3}{n^2}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que : $\ln\left(1 + \cos\left(\frac{3}{n^2}\right) - 1\right) \sim \cos\left(\frac{3}{n^2}\right) - 1$.

Comme $\frac{3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $\cos\left(\frac{3}{n^2}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{n^2}\right)^2$.

Finalement, $\ln\left(\cos\left(\frac{3}{n^2}\right)\right) \sim -\frac{9}{2n^4}$.

Méthode 4 Déterminer la limite de u_n^n où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Lorsque $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, on écrira $u_n^n = \exp(n \ln(u_n))$.
On pourra dans un premier temps chercher la limite de $n \ln(u_n)$ (à l'aide d'un équivalent) ; puis dans un deuxième temps, composer cette limite avec l'exponentielle. Ici, il s'agit de composer des limites et non des équivalents.
La même méthode s'applique dès que l'exposant dépend de n.

Exemple d'application

Déterminons la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lorsque $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + \frac{1}{n} > 0$ et donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ d'où : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par composition des limites, on en déduit que $\exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

Ainsi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$. Remarquons que $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ et pourtant $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nsim 1^n$.

Synthèse

Savoirs

- comparaison des suites usuelles (croissance comparée),
- équivalents usuels.

Savoir-faire

- montrer qu'une suite est négligeable devant une autre,
- montrer que deux suites sont équivalentes,
- déterminer un équivalent simple d'une suite à l'aide des équivalents usuels.

Mots-clés

- Négligeabilité,
- croissance comparée,
- équivalence.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

13.1 Les suites dont les termes généraux figurent ci-dessous tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide (autrement dit par ordre croissant pour la négligeabilité) :

$$2^n,\ n,\ (\ln(n))^{100},\ n!,\ \mathrm{e}^n,\ 3^n,\ \sqrt{n},\ n^3.$$

13.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

a) Si on suppose que les deux suites ont même limite, quelle hypothèse doit-on ajouter pour en déduire que $u_n \sim v_n$?

b) Si on suppose que $u_n \sim v_n$, quelle hypothèse doit-on ajouter pour en déduire que les deux suites ont même limite ?

13.3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si $u_n \sim v_n$, que peut-on en déduire parmi les propositions suivantes :

- ☐ $u_n + 1 \sim v_n + 1$
- ☐ $2u_n \sim 2v_n$
- ☐ $-u_n \sim -v_n$
- ☐ $u_n v_n \sim u_n^2$
- ☐ $u_n - v_n \sim 0$
- ☐ $|u_n| \sim |v_n|$
- ☐ $u_n^2 \sim v_n^2$
- ☐ $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$

13.4 Recherche d'exemples

a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives telles que $u_n = o(v_n)$. Construire $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

b) Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} \not\sim u_n$.

c) Déterminer deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \not\sim v_n$ et $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.

d) Donner un exemple d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante telles que $u_n \sim v_n$.

13.5 Vrai ou faux ?

a) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n \sim v_n$.

c) $\sin(\mathrm{e}^{-n}) \sim \mathrm{e}^{-n}$ mais $\sin(\mathrm{e}^n) \not\sim \mathrm{e}^n$.

d) Si $a_n = o(u_n)$ et $b_n = o(v_n)$ alors :

$$a_n + b_n = o(u_n + v_n).$$

13.6 QCM

Chaque question admet au moins une bonne réponse.

1) Si $u_n \sim \dfrac{1}{2}n$ alors :

- **a)** $u_n \sim n$,
- **b)** $u_n = o(n)$,
- **c)** $u_n = o(n^2)$.

2) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors :

- **a)** $\ln(u_n) = o(n)$
- **b)** $\ln(u_n) = o(u_n)$
- **c)** $\ln(n) = o(u_n)$

3) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors :

- **a)** $\exp(u_n) \sim 1 + u_n$,
- **b)** $\exp(u_n) \sim 1$,
- **c)** $\exp(u_n) \sim 1 - u_n$.

4) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ alors :

- **a)** $\sin(\ln(u_n)) \sim \ln(u_n)$,
- **b)** $\sin(\ln(u_n)) \sim u_n - 1$,
- **c)** $\sin(\ln(u_n)) \sim 0$.

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 356.

■ **Négligeabilité**

13.7

Les suites dont les termes généraux figurent ci-dessous tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide (autrement dit par ordre croissant pour la négligeabilité) :

$$n\ln n,\ \frac{n^2}{\ln n},\ \frac{3^n}{n^3},\ n^{3/2},\ 2^n \ln n.$$

13.8

Les suites dont les termes généraux figurent ci-dessous convergent toutes vers 0. Classez-les de la plus rapide à la plus lente (autrement dit par ordre croissant pour la négligeabilité) :

$$\frac{n}{2^n},\ \frac{(\ln n)^2}{n},\ n^{10}\mathrm{e}^{-n},\ \frac{1}{n\ln n},\ \frac{1}{n^2}.$$

13.9

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

a) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $|v_n| \to +\infty$ alors $u_n = o(v_n)$,

b) si $u_n \to +\infty$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ et si $\alpha < \beta$ alors $u_n^\alpha = o(u_n^\beta)$,

c) si $u_n \to +\infty$ et si $0 < \alpha < \beta$ alors $\alpha^{u_n} = o(\beta^{u_n})$.

13.10

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

■ Équivalence

13.11

Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général :

a) $u_n = \dfrac{n^6 + 4n^2 - 6}{7n^4 - 3n^2 + n}$;

b) $v_n = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;

c) $w_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$;

d) $r_n = (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$;

e) $s_n = \left(1 + \ln\left(1 + \sin\dfrac{1}{n}\right)\right)^{2/3} - 1$.

13.12

À l'aide des équivalents, déterminer la limite de la suite de terme général :

a) $u_n = (n^2+n)\sqrt{\sin\dfrac{\pi}{2n^4}}$;

b) $v_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

c) $w_n = n^2 \tan\left(\sqrt{\cos\dfrac{1}{n}} - 1\right)$;

d) $r_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)}{\sqrt{\exp\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right)} - 1}$;

e) $s_n = \dfrac{(1+\frac{1}{n})^{1+\frac{1}{n}} - 1}{\sin\frac{1}{n}}$.

13.13 ◎

a) Montrer que : $\ln(n^2+n) \sim 2\ln(n)$.

b) Montrer que : $\exp\left(n + \dfrac{1}{n}\right) \sim \exp(n)$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$.

13.14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 + 2n^2 - n \leqslant u_n \leqslant n^3 + 2n^2 + 3n$$

a) Montrer que $u_n \sim n^3$.

b) Montrer que $u_n = n^3 + 2n^2 + o(n^2)$.

13.15

Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ puis en donner un équivalent.

13.16 Équivalent de la série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée série harmonique.

a) Démontrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

c) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

d) En déduire que $H_n \sim \ln(n)$.

13.17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

b) Déterminer la limite de S_n.

c) On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer qu'elle converge.

d) En déduire un équivalent simple de S_n.

13.18 oral ESCP 2006 ◎

Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\ln(k)}{n^2}\right)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exercices d'approfondissement

13.19 D'après Ecricome 2005 ◎

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1) Montrer que pour tout entier n, $\quad u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2.a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x)$.

2.b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$ puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2.c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier n non nul,

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}},$$

en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

3) On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. À l'aide d'un équivalent usuel, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite L que l'on précisera.

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1})$. Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que :

$\forall n \geqslant N_0, \ u_n \geqslant u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

5) Écrire un programme en langage Pascal qui calcule le terme d'indice n de la suite, u_0 et n étant entrés par l'utilisateur.

13.20 Développement asymptotique d'une suite définie implicitement ◎

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère le polynôme $P_n = X^{2n} - 2nX + 1$ et on note a_n la plus grande racine réelle de P_n.

1.a) Étudier les variations de $x \mapsto P_n(x)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n > 1$.

1.b) Montrer que $P_n(2) \sim 4^n$. En déduire qu'à partir d'un certain rang, on a : $a_n < 2$.

2) On pose, pour tout $n \geqslant 2$, $\varepsilon_n = a_n - 1$.

2.a) Montrer qu'il existe $(\eta_n)_{n\geqslant 2}$ convergeant vers 0 telle que :

$$\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{2n} + \frac{\ln 2 + \eta_n}{2n}.$$

2.b) Montrer que :

$$\frac{\ln 2 + \eta_n}{2n} = o\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \text{ et } \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{2n} = o\left(\frac{\ln n}{2n}\right).$$

En déduire un équivalent simple de $\ln(1+\varepsilon_n)$.

2.c) Montrer que $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ et en déduire que :

$$a_n = 1 + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Indications

13.13 Pour montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$, on peut prouver que $\ln(u_n) - \ln(v_n) = o(\ln(u_n))$ ou $\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Pour montrer que $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$, on peut montrer que $\dfrac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

13.18 Utiliser le théorème d'encadrement. Pour la majoration, écrire $\ln(u_n)$ sous forme de somme et considérer le plus grand terme.

13.19

2.a) Exprimer la différence à l'aide d'une identité remarquable.

2.b) Raisonner par récurrence.

3) Factoriser l'expression $\sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n}$ par $\sqrt{n}$.

4) Existence de N_0 : utiliser la définition de la limite.

Signe de $u_{n+1} - u_n$: utiliser la relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et introduire une quantité conjuguée.

13.20

1.a) Dresser le tableau de variation de P_n. Pour le signe de la dérivée, on peut faire intervenir la monotonie de $x \mapsto x^{2n-1}$.

1.b) De $P_n(2) \sim 4^n$ déduire que $P_n(2) > 0$ à partir d'un certain rang, et revenir au tableau de variation de P_n.

2.a) En utilisant le fait que $a_n = 1 + \varepsilon_n$ est racine de P_n, on obtient $(1+\varepsilon_n)^{2n} = 2n(1+\varepsilon_n) - 1$. Passer ensuite au logarithme.

13.1

De la plus lente à la plus rapide :
$(\ln(n))^{100},\ \sqrt{n},\ n,\ n^3,\ 2^n,\ \mathrm{e}^n,\ 3^n,\ n!$
($\mathrm{e} \simeq 2,7$ ce qui permet de ranger e^n entre 2^n et 3^n)

13.2

a) si la limite commune est dans $\mathbb{R}^*$ (on exclut 0, $+\infty$ et $-\infty$) alors $u_n \sim v_n$.
b) si on suppose de plus qu'une des suites admet une limite, alors l'autre admet la même limite.

13.3

Si $u_n \sim v_n$ alors :

- $2u_n \sim 2v_n$
- $-u_n \sim -v_n$
- $u_n v_n \sim u_n^2$
- $|u_n| \sim |v_n|$
- $u_n^2 \sim v_n^2$

13.4

a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sqrt{u_n v_n}$.
On a $\dfrac{u_n}{w_n} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n = o(w_n)$.
Et $\dfrac{w_n}{v_n} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $w_n = o(v_n)$.
b) Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^n$. On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e} \not\to 1$ donc $u_{n+1} \not\sim u_n$.
c) Prenons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. On a $u_n \not\sim v_n$. Mais $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\mathrm{e}^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.
d) Prenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$. Les deux suites ont la même limite finie non nulle, donc $u_n \sim v_n$.

13.5

a) FAUX : un contre-exemple est donné par $u_n = n$ et $v_n = n+1$.
b) FAUX : un contre-exemple est donné par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.
c) VRAI : $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin(\mathrm{e}^{-n}) \sim \mathrm{e}^{-n}$; $0 \leqslant \left|\dfrac{\sin(\mathrm{e}^n)}{\mathrm{e}^n}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-n}$, donc par encadrement : $\dfrac{\sin(\mathrm{e}^n)}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\sin(\mathrm{e}^n) \not\sim \mathrm{e}^n$.
d) FAUX : un contre-exemple est donné par $a_n = b_n = n$, $u_n = n^2$ et $v_n = -n^2$.

13.6

1) Réponse **c)**.
En effet $\frac{1}{2}n = o(n^2)$.
2) Réponse **b)**.
$\ln(u_n) = o(u_n)$; en effet $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par composition de limites, on a : $\frac{\ln(u_n)}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On prendra $u_n = \mathrm{e}^n$ (resp. $u_n = \ln(n)$) pour montrer que la réponse a (resp. la c) est fausse.
3) Réponses **a)**, **b)** et **c)**.
En effet, toutes les suites convergent vers la même limite finie non nulle, donc sont équivalentes. L'équivalent usuel $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$ n'intervient pas ici : l'équivalence n'étant pas compatible avec l'addition, on ne peut pas ajouter 1 de part et d'autre.
4) Réponses **a)** et **b)**.
On a $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin(\ln(u_n)) \sim \ln(u_n)$. De plus $\ln(u_n) = \ln(1 + u_n - 1)$, or $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(u_n) \sim u_n - 1$, d'où $\sin(\ln(u_n)) \sim u_n - 1$. Enfin, on rappelle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \not\Rightarrow a_n \sim 0$.

13.7

La classement de la plus lente à la plus rapide est :

$$\boxed{n \ln n,\ n^{3/2},\ \frac{n^2}{\ln n},\ 2^n \ln n,\ \frac{3^n}{n^3}}$$

Les termes des différentes suites étant non nuls pour $n \geqslant 2$, on peut utiliser :

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On fait également appel aux croissances comparées :

- on a $\ln n = o(n^{1/2})$ donc $n \ln n = o(n^{3/2})$,
- $n^{3/2} \times \dfrac{\ln n}{n^2} = \dfrac{\ln n}{n^{1/2}}$, or $\ln n = o(n^{1/2})$ donc $n^{3/2} \times \dfrac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $n^{3/2} = o\left(\dfrac{n^2}{\ln n}\right)$,
- on a $n^2 = o(2^n)$ donc $\dfrac{n^2}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et *a fortiori* $\dfrac{n^2}{\ln n} \times \dfrac{1}{2^n \ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $\dfrac{n^2}{\ln n} = o(2^n \ln n)$,
- on veut montrer que $\dfrac{2^n n^3 \ln n}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a $\ln n = o(n)$ donc $n^3 \ln n = o(n^4)$; de plus $n^4 = o((\frac{3}{2})^n)$, donc $n^3 \ln n = o((\frac{3}{2})^n)$. Ainsi $\dfrac{2^n n^3 \ln n}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $2^n \ln n = o\left(\dfrac{3^n}{n^3}\right)$.

13.8

Le classement de la plus rapide à la plus lente est :

$$\boxed{n^{10}\mathrm{e}^{-n},\ \frac{n}{2^n},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n \ln n},\ \frac{(\ln n)^2}{n}}$$

Les termes des différentes suites étant non nuls pour $n \geqslant 2$, on peut utiliser :

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On fait également appel aux croissances comparées :

- $\dfrac{2^n n^{10} \mathrm{e}^{-n}}{n} = \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^n n^9$, or $\dfrac{\mathrm{e}}{2} > 1$ par conséquent $n^9 = o\left((\dfrac{\mathrm{e}}{2})^n\right)$. Ainsi $\dfrac{2^n n^{10} \mathrm{e}^{-n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $n^{10}\mathrm{e}^{-n} = o\left(\dfrac{n}{2^n}\right)$,
- $n^3 = o(2^n)$ donc $\dfrac{n \times n^2}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $\dfrac{n}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
- $\dfrac{n \ln n}{n^2} = \dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\ln n = o(n)$, donc $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)$,
- $\dfrac{n}{(n \ln n) \times (\ln n)^2} = \dfrac{1}{(\ln n)^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par conséquent $\dfrac{1}{n \ln n} = o\left(\dfrac{(\ln n)^2}{n}\right)$.

13.9

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $|v_n| > 0$ à partir d'un certain rang. On alors $0 \leqslant \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \dfrac{M}{|v_n|}$, or $\dfrac{M}{|v_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

encadrement $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi $u_n = o(v_n)$.

b) On a : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n^\alpha}{u_n^\beta} = u_n^{\alpha-\beta}$. Or $\alpha - \beta < 0$ donc $x^{\alpha-\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition des limites, $u_n^{\alpha-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $u_n^\alpha = o(u_n^\beta)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\alpha^{u_n}}{\beta^{u_n}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{u_n} = \exp\left(u_n \ln\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Or $0 < \alpha < \beta$ donc $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$ et $\ln\frac{\alpha}{\beta} < 0$. Mais $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $u_n \ln\frac{\alpha}{\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et par composition de limites, $\exp(u_n \ln\frac{\alpha}{\beta}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a bien $\alpha^{u_n} = o(\beta^{u_n})$.

13.10

On pose pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^p}\right).$$

On a :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{n^{p-1} + n^{p-2} + \cdots + 1}{n^p}$$

$$= \frac{n^p - (n-1)(n^{p-1} + n^{p-2} + \cdots + 1)}{(n-1)n^p}$$

$$= \frac{n^p - (n^p - 1)}{(n-1)n^p} = \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n^p}$$

Or $\frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Ainsi :

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

13.11

a) On a d'une part $n^6 + 4n^2 - 6 \sim n^6$ et d'autre part $7n^4 - 3n^2 + n \sim 7n^4$. Donc $u_n \sim \frac{n^6}{7n^4}$, c'est-à-dire $\boxed{u_n \sim \frac{1}{7}n^2}$.

b) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. De plus, $n+1 \sim n$ donc $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$. Ainsi $\boxed{v_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

c) On a $n^2+1 \sim n^2$ donc $\sqrt{n^2+1} \sim n$. D'où $\sqrt{n^2+1} = o(n^3)$ et $n^3 - \sqrt{n^2+1} \sim n^3$. Par ailleurs, par croissance comparée, on a : $\ln n = o(n^2)$ donc $\ln n - 2n^2 \sim -2n^2$. Finalement $w_n \sim -\frac{n^3}{2n^2}$, c'est-à-dire $\boxed{w_n \sim -\frac{1}{2}n}$.

d) En factorisant par $n^{1/3}$, il vient :

$$r_n = n^{1/3}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3} - 1\right]$$

Or $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(1+\frac{1}{n})^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3n}$, d'où $\boxed{r_n \sim \frac{1}{3n^{2/3}}}$.

e) On a $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+\sin\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $s_n \sim \frac{2}{3}\ln(1+\sin\frac{1}{n})$.
Mais $\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(1+\sin\frac{1}{n}) \sim \sin\frac{1}{n}$.
Enfin $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$.
Conclusion : $\boxed{s_n \sim \frac{2}{3n}}$.

13.12

a) $n^2+n \sim n^2$; de plus $\frac{\pi}{2n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2n^4}\right) \sim \frac{\pi}{2n^4}$. D'où $u_n \sim n^2\sqrt{\frac{\pi}{2n^4}}$ c'est-à-dire $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Il vient : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

b) $v_n = \exp\left[n^2 \ln(\cos\frac{1}{n})\right]$; or $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\cos\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc :

$$\ln(\cos\frac{1}{n}) = \ln(1 + \cos\frac{1}{n} - 1) \sim \cos\frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$$

Ainsi $n^2\ln(\cos\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$ et par composition des limites, $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1/2}}$.

c) $\sqrt{\cos\frac{1}{n} - 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\tan\left(\sqrt{\cos\frac{1}{n} - 1}\right) \sim \sqrt{\cos\frac{1}{n} - 1}.$$

Ensuite $\sqrt{\cos\frac{1}{n} - 1} = \left(1 + \cos\frac{1}{n} - 1\right)^{1/2} - 1$ donc :

$$\sqrt{\cos\frac{1}{n} - 1} \sim \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right).$$

Enfin $\cos\frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$. Finalement $w_n \sim -\frac{1}{4}$ c'est-à-dire $\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}}$.

d) D'une part $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$\sin\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^2}$$

D'autre part $\exp\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\sqrt{\exp\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) - 1}$$

$$= \left[1 + \exp\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) - 1\right]^{1/2} - 1$$

$$\sim \frac{1}{2}\left[\exp\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) - 1\right]$$

Mais $\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$\exp\left(\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}\right) - 1 \sim \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} \sim \frac{4}{n}$$

Ainsi $r_n \sim \frac{1/n^2}{1/2 \times 4/n}$ soit $r_n \sim \frac{1}{2n}$ d'où $\boxed{r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

e) $\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^{1+\frac{1}{n}}-1 &= \exp\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]-1\\ &\sim \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\sim 1\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

Or $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ donc $\boxed{s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

13.13

a) • **1ère méthode –** On a :

$$\ln(n^2+n)-2\ln(n)=\ln(n^2+n)-\ln(n^2)=\ln(1+\frac{1}{n}).$$

Donc $\ln(n^2+n)-2\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or $2\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc :

$$\ln(n^2+n)-2\ln(n)=o(2\ln(n)),$$

d'où $\ln(n^2+n)\sim 2\ln(n)$.

• **2nde méthode –** On a :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n^2+n)}{2\ln(n)} &= \frac{\ln(n^2)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n^2)}\\ &= 1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n^2)}\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus $\ln(n^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où :

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n^2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que :

$$\frac{\ln(n^2+n)}{2\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc que $\ln(n^2+n)\sim 2\ln(n)$.

b) $\frac{\exp(n+\frac{1}{n})}{\exp(n)}=\exp\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Donc $\exp(n+\frac{1}{n})\sim\exp(n)$.

c) Remarquons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exp(v_n)\neq 0$ et raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned}\exp(u_n)\sim\exp(v_n) &\Leftrightarrow \frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\\ &\Leftrightarrow \exp(u_n-v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\\ &\Leftrightarrow u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante est :

$$\boxed{u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

13.14

a) L'encadrement de u_n donne :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{u_n}{n^3}\leqslant 1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}$$

Le théorème d'encadrement donne alors :

$\frac{u_n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où $u_n\sim n^3$.

b) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ -n\leqslant u_n-(n^3+2n^2)\leqslant 3n$$

En divisant par n^2, on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n}\leqslant\frac{u_n-(n^3+2n^2)}{n^2}\leqslant\frac{3}{n}$$

Par encadrement, il vient : $\frac{u_n-(n^3+2n^2)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n-(n^3+2n^2)=o(n^2)$ c'est-à-dire $u_n=n^3+2n^2+o(n^2)$.

13.15

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est (E) : $r^2-r-1=0$. Le discriminant de (E) est $\Delta=1+4=5>0$. Donc (E) admet deux solutions réelles distinctes :

$$\boxed{\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{ et }\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda\alpha^n+\mu\beta^n$$

Or $u_0=0$ et $u_1=1$ d'où $\begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \lambda\alpha+\mu\beta=1\end{cases}$.

On obtient :

$$\lambda=-\frac{\sqrt{5}}{5}\text{ et }\mu=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\beta^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\alpha^n}$$

Or $\sqrt{5}\simeq 2,2$ donc $\alpha\simeq -0,6$ et $\beta\simeq 1,6$ et par conséquent $\alpha^n=o(\beta^n)$. Donc :

$$\boxed{u_n\sim\frac{\sqrt{5}}{5}\beta^n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

13.16

a) On pose : $\forall x>-1,\ f(x)=x-\ln(x+1)$. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x>-1,\ f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

$f'(x)$ étant du signe de x, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]-1,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Donc f admet un minimum en 0 et ce minimum est $f(0)=0$. D'où :

$$\forall x>-1,\ \ln(1+x)\leqslant x$$

b) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité démontrée ci-dessus avec successivement $x=\frac{1}{k}$ et $x=-\frac{1}{k+1}$, on a d'une part :

$$\ln(k+1)-\ln(k)=\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\leqslant\frac{1}{k}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\ln(k+1)-\ln(k) &= -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\geqslant\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

c) De $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$, on déduit que :

$$H_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$.

Ensuite, de $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k)$, on déduit par changement d'indice :

$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$

puis que :

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1))$$

Or $\displaystyle 1 + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) = 1 + \ln(n) - \ln(1) = 1 + \ln(n)$.

Finalement, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

d) On en déduit que pour $n \geqslant 2$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Or $1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$$

Donc $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par encadrement, on en déduit que $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc que $H_n \sim \ln(n)$.

13.17

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En multipliant et en divisant par la quantité conjuguée $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, il vient :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Or $0 < 2\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1}$ donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) D'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par comparaison, on en déduit que : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &\leqslant 0 \text{ d'après } \mathbf{a)} \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Par ailleurs, on a vu en **b)** que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 \geqslant -2$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également minorée et d'après le théorème de limite monotone, elle est convergente.

d) $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ admet une limite finie quand $n \to +\infty$ donc :

$$\frac{S_n - 2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où : $S_n - 2\sqrt{n} = o(2\sqrt{n})$. Donc $\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}}$.

13.18

Tous les facteurs dans l'expression de u_n sont supérieurs ou égaux à 1, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geqslant 1$ c'est-à-dire $\ln(u_n) \geqslant 0$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\ln(k)}{n^2}\right)$$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \ln(k) \leqslant \ln(n)$ donc :

$$0 \leqslant \ln(u_n) \leqslant n \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Mais par croissance comparée, $\ln(n) = o(n^2)$ donc $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où :

$$n \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{n^2}\right) \sim n \times \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n}.$$

Par croissance comparée, $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$n \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le théorème d'encadrement donne alors : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par composition de limites, il vient : $\exp(\ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

13.19

1) Montrons d'abord par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et positif.

- $u_0 \geqslant 0$ par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que u_{n-1} et bien défini et positif, et montrons que u_n l'est également. Comme $u_{n-1} \geqslant 0$, on a $n + u_{n-1} \geqslant 0$ donc $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ est bien défini et positif.

Montrons maintenant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{n}$.

On a $u_0 \geqslant 0 = \sqrt{0}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n-1} \geqslant 0$ donc $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \geqslant \sqrt{n}$.

2.a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$1 + x - 2\sqrt{x} = 1 + (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$$

Donc $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1 + x)$.

2.b) *(i)* Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

- $u_0 = 0 + \dfrac{u_0}{2^0}$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et montrons $\mathcal{P}(n)$.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n + u_{n-1}} \\ &\leqslant \sqrt{2n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}} \text{ d'après } \mathcal{P}(n-1) \\ &\leqslant n + \frac{u_0}{2^n} \text{ d'après } \textbf{2.a)} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ vraie.
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$\frac{u_{n-1}}{n^2} \leqslant \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$$

Or $\frac{n-1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{u_0}{n^2 2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n-1} \geqslant 0$ donc par encadrement : $\frac{u_{n-1}}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.c) *(i)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_n}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}$$

Or $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{u_{n-1}}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc : $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'une part $u_n \geqslant \sqrt{n}$ d'après **1)** et d'autre part $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$ par définition de u_n. *A fortiori*

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$$

Or $\frac{u_{n-1}}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après ce qui précède, donc :

$$\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1} \times \frac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 1 = 0$$

Ainsi $\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et par encadrement, il vient : $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ c'est-à-dire $\boxed{u_n \sim \sqrt{n}}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} w_n &= \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{u_{n-1}}{n}\right)^{1/2} - 1\right) \\ &\sim \sqrt{n} \times \frac{u_{n-1}}{2n} \text{ car } \frac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\sim \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} \text{ car } u_{n-1} \sim \sqrt{n-1} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$ donc $\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}}$.

4) *(i)* En introduisant la quantité conjuguée, on a :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$



De $u_n \sim \sqrt{n}$ et $u_{n-1} \sim \sqrt{n-1}$, on ne peut pas déduire que $u_n - u_{n-1} \sim \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ car l'équivalence est incompatible avec l'addition (et donc la soustraction).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (w_n + \sqrt{n}) - (w_{n-1} + \sqrt{n-1}) \\ &= w_n - w_{n-1} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.
(ii) $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ est un intervalle ouvert contenant 0, donc par définition de $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant N_0$, $u_n - u_{n-1} > -\frac{1}{2}$. En particulier : $\forall n \geqslant N_0$, $u_n \geqslant u_{n-1} - \frac{1}{2}$.
(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en introduisant la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}} \\ &= \frac{1 + u_n - u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}} \end{aligned}$$

Le dénominateur de cette dernière fraction étant strictement positif, on en déduit que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$.
(iv) Or pour tout $n \geqslant N_0$, on a :

$$1 + u_n - u_{n-1} \geqslant 1 - \frac{1}{2} \geqslant 0$$

Ainsi : $\forall n \geqslant N_0$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang N_0.

5) Programme Pascal :

```
VAR n,k:INTEGER;u:REAL;
BEGIN
    WRITE('Entrez u0 et n');
    READLN(u,n);
    FOR k:=1 TO n DO u:=SQRT(k+u);
    WRITE(u);
END.
```

13.20

1.a) Soit $n \geqslant 2$. P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = 2nx^{2n-1} - 2n = 2n(x^{2n-1} - 1)$$

Or $2n-1$ est impair donc la fonction $x \mapsto x^{2n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; par ailleurs, elle prend la valeur 1 quand $x = 1$. On obtient ainsi les variations de P_n :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Or $P_n(1) = 1 - 2n + 1 = 2(1-n) < 0$ car $n \geqslant 2$. D'après le tableau de variations, P_n s'annule donc une fois sur $]-\infty, 1[$ et une fois sur $]1, +\infty[$. La plus grande de ses racines est donc dans $]1, +\infty[$, c'est-à-dire $a_n > 1$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

1.b) On a : $P_n(2) = 2^{2n} - 4n + 1 = 4^n - 4n + 1$. Or $4 > 1$ donc par croissance comparée $n = o(4^n)$, puis $4n - 1 = o(4^n)$. Donc $P_n(2) \sim 4^n$.

Cela signifie que $\dfrac{P_n(2)}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc à partir d'un certain rang, on a $\dfrac{P_n(2)}{4^n} > 0$ et donc $P_n(2) > 0$, c'est-à-dire $P_n(2) > P_n(a_n)$. Or P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, donc $2 > a_n$. On a bien $a_n < 2$ à partir d'un certain rang.

2.a) $a_n = 1 + \varepsilon_n$ est racine de P_n donc :

$$(1 + \varepsilon_n)^{2n} = 2n(1 + \varepsilon_n) - 1$$

Or on a vu que $a_n = 1 + \varepsilon_n > 1$, en particulier $1 + \varepsilon_n > 0$, ce qui autorise l'introduction du logarithme :

$$\begin{aligned} 2n \ln(1 + \varepsilon_n) &= \ln\Big(2n(1 + \varepsilon_n) - 1\Big) \\ &= \ln\left(2n(1 + \varepsilon_n)\left(1 - \frac{1}{2n(1 + \varepsilon_n)}\right)\right) \\ &= \ln(2) + \ln(n) + \ln(1 + \varepsilon_n) + \eta_n \end{aligned}$$

où on a noté $\boxed{\eta_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n(1 + \varepsilon_n)}\right)}$.

Or à partir d'un certain rang on a $1 < a_n < 2$ donc :

$$\frac{1}{4n} < \frac{1}{2n(1 + \varepsilon_n)} < \frac{1}{2n}$$

donc par encadrement $\dfrac{1}{2n(1 + \varepsilon_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement, on a $\eta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et :

$$\ln(1 + \varepsilon_n) = \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{\ln(1 + \varepsilon_n)}{2n} + \frac{\ln(2) + \eta_n}{2n}$$

2.b) On a $\eta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$\frac{\ln(2) + \eta_n}{2n} \times \frac{2n}{\ln(n)} = \frac{\ln(2) + \eta_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par conséquent : $\dfrac{\ln(2) + \eta_n}{2n} = o\left(\dfrac{\ln n}{2n}\right)$.

Ensuite, on a à partir d'un certain rang $1 < a_n < 2$ donc $0 < \ln(1 + \varepsilon_n) < \ln(2)$. On en déduit par encadrement que $\dfrac{\ln(1 + \varepsilon_n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $\dfrac{\ln(1 + \varepsilon_n)}{2n} = o\left(\dfrac{\ln(n)}{2n}\right)$.

Enfin, on déduit de ce qui précède et de **2.a)** que :

$$\boxed{\ln(1 + \varepsilon_n) \sim \frac{\ln(n)}{2n}}$$

2.c) Par croissance comparée, on a : $\dfrac{\ln(n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(1 + \varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi par composition de limites, $\varepsilon_n = \exp(\ln(1 + \varepsilon_n)) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\ln(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$.

Avec **2.b)** il vient alors : $\varepsilon_n \sim \dfrac{\ln(n)}{2n}$ donc :

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{2n}\right) = \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

mais $\varepsilon_n = a_n - 1$ donc :

$$a_n = 1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Étude locale des fonctions

CHAPITRE 14

Plan

14.1 Limite et continuité en un point 363
14.2 Limite à gauche, à droite. Prolongement par continuité 366
14.3 Propriétés 369
14.4 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point 374
14.5 Branches infinies des courbes 377
Synthèse 381
Tests et exercices 382
Corrigés des exercices 386

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de certaines propriétés locales des fonctions. Les propriétés locales sont liées aux valeurs de la fonction au voisinage d'un point.

Nous étudions d'abord, dans le prolongement du cours de Terminale, les notions de limite et de continuité. La suite du cours est consacrée à la comparaison des fonctions au voisinage d'un point ; il s'agit d'introduire, dans le cadre des fonctions, deux notions déjà étudiées pour les suites : la négligeabilité et l'équivalence. Enfin, nous étudierons les branches infinies : asymptotes et branches paraboliques.

Objectifs

- Définir les notions de limite en un point et de continuité en un point pour les fonctions d'une variable réelle.
- Introduire les notions de négligeabilité et d'équivalence entre fonctions au voisinage d'un point.
- Étudier les branches infinies de la courbe représentative d'une fonction.

Prérequis

- Généralités sur les suites réelles.
- Étude asymptotique des suites.

14.1 Limite et continuité en un point

14.1.1 Voisinage. Adhérence

Définition – Voisinage d'un point

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage de x** tout intervalle de la forme $[x-\alpha, x+\alpha]$ où $\alpha > 0$.
On appelle **voisinage de $+\infty$** (resp. $-\infty$) tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A]$) où $A \in \mathbb{R}$.

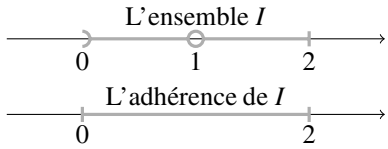
Définition – Adhérence

Soit I un intervalle privé éventuellement d'un nombre fini de points.
On appelle **adhérence** de I dans $\mathbb{R}$, et on note $\overline{I}$, l'ensemble des éléments de I, des extrémités de I dans $\overline{\mathbb{R}}$ et des points éventuellement retirés.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

1. Si $I = \mathbb{R}^*$ alors $\overline{I} = \overline{\mathbb{R}}$.
2. Si $I =]0, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$ alors $\overline{I} = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
3. Si $I =]0, 1[\cup]1, 2]$ alors $\overline{I} = [0, 2]$.



Remarques

1. Ne pas confondre l'adhérence de I et le complémentaire de I, bien qu'on puisse les noter de la même façon, mais pas dans le même contexte.
2. Si f est une fonction définie sur I, alors l'adhérence de I est l'ensemble des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ en lesquels f est susceptible d'admettre une limite.
3. La notion d'adhérence est hors-programmme. Les exercices n'y feront donc jamais appel, mais elle permet de simplifier notablement l'exposé du cours.

Dans toute la suite du cours, I désignera un intervalle privé éventuellement d'un nombre fini de points et $\overline{I}$ son adhérence.

14.1.2 Limite en un point

Définition – Limite d'une fonction en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f **admet ℓ pour limite en** x_0 lorsque, pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de x_0 tel que, pour tout $x \in W \cap I$, $f(x) \in V$.

Exemples

1. Lorsque $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, la définition s'écrit également : f admet ℓ pour limite en x_0 lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

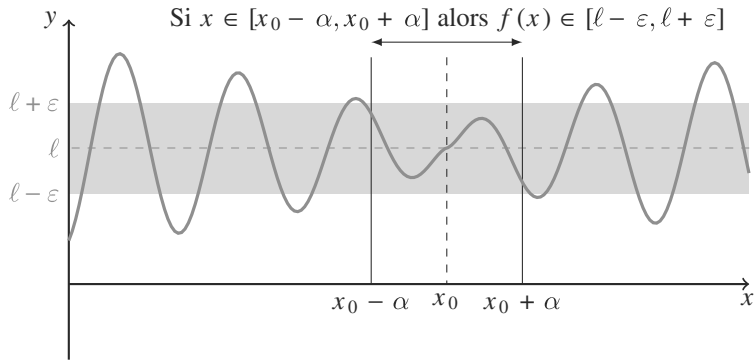


Illustration de : f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Lorsque $x_0 = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$, la définition s'écrit également : f admet ℓ pour limite en $+\infty$ lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I \cap [A, +\infty[$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

3. Lorsque $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$, la définition s'écrit également : f admet $-\infty$ pour limite en x_0 lorsque, pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \leqslant B$.
4. Lorsque $x_0 = -\infty$ et $\ell = +\infty$, la définition s'écrit également : f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque, pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I \cap]-\infty, A]$, $f(x) \geqslant B$.

Théorème – Unicité de la limite

• Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$. Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 alors cette limite est unique. On note $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

• Si de plus $x_0 \in I$ alors la limite de f en x_0 est nécessairement $f(x_0)$.

Démonstration

• On se place dans le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$, la démonstration étant analogue dans le cas où $x_0 = \pm\infty$.

Supposons que f admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' en x_0. Comme $\ell \neq \ell'$, on peut trouver un voisinage V de ℓ et un voisinage V' de ℓ' tels que $V \cap V' = \emptyset$.

Par définition de la limite, il existe d'une part $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ f(x) \in V$$

et d'autre part $\alpha' > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha', x_0 + \alpha'],\ f(x) \in V'.$$

En posant $\beta = \min(\alpha, \alpha')$, on a alors : $\forall x \in I \cap [x_0 - \beta, x_0 + \beta],\ f(x) \in V \cap V'$.

Comme $I \cap [x_0 - \beta, x_0 + \beta] \neq \emptyset$, cette dernière proposition est absurde car $V \cap V' = \emptyset$.

Par conséquent, si f admet une limite en x_0, celle-ci est unique.

• Supposons maintenant que f admette une limite ℓ en x_0 et que $x_0 \in I$. Montrons par l'absurde que $\ell = f(x_0)$.

On suppose que $\ell \neq f(x_0)$, il existe donc un voisinage V de ℓ tel que $f(x_0) \notin V$.

Par définition de la limite, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ f(x) \in V$.

Or $x_0 \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, donc $f(x_0) \in V$: absurde. Donc $\ell = f(x_0)$. ■

Remarques

1. Lorsque $x_0 \in \mathbb{R}$, on peut toujours se ramener à une limite en 0 à l'aide de l'équivalence suivante :
$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow\ f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \ell.$$
2. Comme pour les suites, la définition de la limite est assez délicate à utiliser. Pour montrer qu'une fonction admet une limite en un point et pour déterminer cette limite, on utilisera le plus souvent les limites connues (fonctions usuelles, formes indéterminées classiques) et les opérations sur les limites (opérations algébriques, composition) ou les théorèmes d'encadrement et de comparaison. Ces résultats sont présentés dans la suite du cours.

14.1.3 Continuité en un point

Définition – Continuité en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, on dit que f est **continue en** x_0 lorsque f admet une limite en x_0 (cette limite sera nécessairement $f(x_0)$).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – La notion de continuité en x_0 n'est pas définie lorsque $x_0 \in \overline{I} \setminus I$. Lorsque x_0 est un nombre réel dans $\overline{I} \setminus I$, on introduira dans la suite du cours la notion de prolongement par continuité.

Théorème – Continuité des fonctions usuelles
Les fonctions polynomiales et rationnelles, la valeur absolue, les fonctions trigonométriques, le logarithme, l'exponentielle et les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction sinus est continue en x_0 autrement dit $\sin(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \sin(x_0)$.

14.1.4 Développement limité à l'ordre 0

Remarque – Nous verrons dans le chapitre sur la dérivabilité la notion de développement limité à l'ordre 1, puis dans un chapitre spécifique la notion de développement limité à tout ordre.

Définition – Développement limité à l'ordre 0

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** 0 **en** x_0, en abrégé $\mathrm{DL}_0(x_0)$, lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

(i) $\forall x \in I,\ f(x) = \ell + \varepsilon(x)$,

(ii) $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Proposition – *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.*
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet ℓ pour limite en x_0,

(ii) f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$ de la forme $f(x) = \ell + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

14.2 Limite à gauche, à droite. Prolongement par continuité

On rappelle que, dans ce chapitre, I désigne un intervalle privé éventuellement d'un nombre fini de points et $\overline{I}$ son adhérence définie page 363.

14.2.1 Limite à gauche, à droite

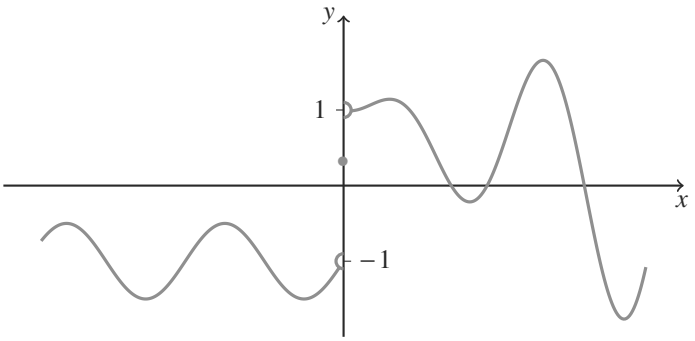
Définition – Limite à droite. Limite à gauche

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que :

• f admet ℓ pour **limite à droite** en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet ℓ pour limite en x_0. On note alors $\ell = \lim\limits_{x_0^+} f$, $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$,

• f admet ℓ pour **limite à gauche** en x_0 si la restriction de f à $I \cap]-\infty, x_0[$ admet ℓ pour limite en x_0. On note alors $\ell = \lim\limits_{x_0^-} f$, $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque – On rencontre également les notations $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ pour la limite à droite en x_0 et et $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ pour la limite à gauche en x_0.



Graphe d'une fonction admettant 1 pour limite à droite en 0 et -1 pour limite à gauche en 0.

Remarques

1. Soit $x_0 \in I$. Lorsque f admet $f(x_0)$ pour limite à droite (resp. à gauche), on dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0.
2. La notion de limite à droite (resp. à gauche) en x_0 n'a de sens que si $I \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$ (resp. $I \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset$). Si par exemple f est définie sur $]x_0, +\infty[$, les notions de limite en x_0 et de limite à droite en x_0 coïncident, et celle de limite à gauche n'a pas de sens.
3. Lorsque $x_0 \in I$, la valeur de $f(x_0)$ n'intervient ni dans l'existence ni dans la valeur de la limite à droite ou à gauche.

Théorème – Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. si $x_0 \in I$: f est continue en x_0 si et seulement si f admet $f(x_0)$ pour limite à droite et limite à gauche en x_0.
2. si $x_0 \in \overline{I} \setminus I$: f admet ℓ pour limite en x_0 si et seulement si f admet ℓ pour limite à droite et à gauche en x_0.

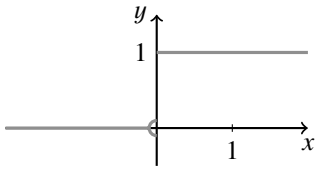
Exemples

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet $+\infty$ pour limite à droite en 0 et $-\infty$ pour limite à gauche en 0. Cette fonction n'a pas de limite en 0.
2. Soit $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$ définie par :

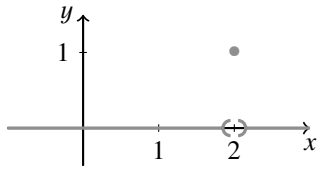
$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = 1 \text{ si } x \geqslant 0 \; ; \; \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ admet 1 pour limite à droite en 0 et 0 pour limite à gauche en 0. En particulier, cette fonction n'est pas continue en 0, elle est seulement continue à droite en 0.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



Graphe de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$



Graphe de $\mathbb{1}_{\{2\}}$

3. Soit $\mathbb{1}_{\{2\}}$ la fonction indicatrice de {2} définie par :

$$\mathbb{1}_{\{2\}}(x) = 1 \text{ si } x = 2 \; ; \; \mathbb{1}_{\{2\}}(x) = 0 \text{ si } x \neq 2.$$

$\mathbb{1}_{\{2\}}$ admet 0 pour limite à droite et à gauche en 2, mais n'est pas continue en 2 car $\mathbb{1}_{\{2\}}(2) \neq 0$.

4. Soit $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. f est continue en 1.
En effet $x - 1 \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{1-} f = \lim\limits_{1+} f = 0 = f(1)$.

14.2.2 Prolongement par continuité

Proposition - Définition – Prolongement par continuité
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un réel de $\overline{I} \setminus I$. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ au point x_0, alors on peut prolonger f en une fonction continue en x_0 en posant :

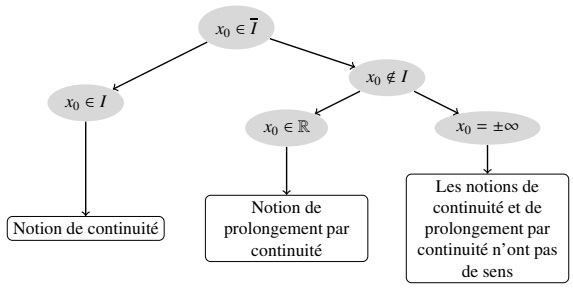
$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

On dit alors que f se prolonge par continuité en x_0 et la fonction $\hat{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en x_0.

Remarques

1. Par abus de notation, la fonction prolongée par continuité $\hat{f}$ est souvent encore notée f.
2. D'après l'unicité de la limite, si f admet un prolongement par continuité en x_0, alors celui-ci est unique.

La notion de prolongement par continuité n'a pas de sens lorsque f est déjà définie en x_0 ou lorsque $x_0 = \pm\infty$.



Par exemple, si f est définie sur $I =]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on peut étudier la continuité de f en $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et le prolongement par continuité de f en 0 et en 1.

Exemples

1. $f : \begin{cases}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln x \end{cases}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$, $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$, on a : $g(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$.
 Donc $g(x) \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 4$ et g se prolonge par continuité en 2 en posant $g(2) = 4$.
 En revanche, $g(x) \underset{x\to 1+}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\to 1-}{\longrightarrow} -\infty$, donc g ne se prolonge pas par continuité en 1.

14.3 Propriétés

On rappelle que, dans ce chapitre, I désigne un intervalle privé éventuellement d'un nombre fini de points et $\overline{I}$ son adhérence définie page 363.

14.3.1 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème – Caractérisation séquentielle de la limite
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f a pour limite ℓ en x_0,

(ii) pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I de limite x_0, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

Démonstration
On donne la démonstration dans le cas particulier où x_0 et ℓ sont des nombres réels (on écarte donc les cas où $x_0 = \pm\infty$ ou $\ell = \pm\infty$).

• Supposons que $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de I convergeant vers x_0.
Par définition de $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap I,\ |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$
Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - x_0| \leqslant \alpha$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $u_n \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap I$, d'où :
$$\forall n \geqslant n_0,\ |f(u_n)-\ell| \leqslant \varepsilon$$
On en déduit que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

• On démontre la réciproque par contraposition. On suppose que f n'admet pas ℓ pour limite en x_0 et on cherche à montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0 telle que $f(u_n)$ ne tende pas vers ℓ.
La négation de $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ s'exprime de la façon suivante : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap I$ vérifiant $|f(x)-\ell| > \varepsilon$.
Soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}$. En prenant $\alpha = \dfrac{1}{n+1}$, on obtient un élément u_n de $\left[x_0 - \dfrac{1}{n+1}, x_0 + \dfrac{1}{n+1}\right] \cap I$ tel que $|f(u_n)-\ell| > \varepsilon$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite d'éléments de I.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_0 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant x_0 + \dfrac{1}{n+1}$. On en déduit par encadrement que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$.
Enfin, $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(u_n) - \ell| > \varepsilon$ donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ, Ce qui achève de démontrer la contraposée de $(ii) \Rightarrow (i)$. ■

Corollaire – Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Remarque – La caractérisation séquentielle a deux utilités principales :
• calculer la limite d'une suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite x_0 et que f admet une limite en x_0. On utilise ici l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ qui avait été déjà énoncée dans le cours sur les suites sous le nom de théorème de composition.

• démontrer qu'une fonction n'est pas continue ou n'a pas de limite en un point x_0 en exhibant deux suites admettant x_0 pour limite, dont les images par f ont des limites différentes. On utilise ici la contraposée l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemple

Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$u_n = \frac{1}{2\pi n} \text{ et } v_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent si f avait une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en 0, on aurait $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = \sin(2\pi n) = 0$ et $f(v_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$.
Donc f n'a pas de limite en 0.

14.3.2 Opérations algébriques

Définition – Limite par valeurs supérieures/inférieures

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I} \setminus I$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f **tend vers** ℓ **en** x_0 **par valeurs supérieures** (resp. **inférieures**) lorsque :

(i) $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$,

(ii) il existe un voisinage V de x_0 tel que :
$$\forall x \in V \cap I,\ f(x) > \ell \text{ (resp. } f(x) < \ell).$$

On note alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell^+$ (resp. $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell^-$).

Exemple

$\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^-$.

Définition – Opérations algébriques sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur I, et λ un nombre réel. On définit **la somme de f et g**, **le produit de f et g** et **le produit de f par λ**, de la façon suivante :

$$f+g : \begin{cases} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x)+g(x) \end{cases} \quad fg : \begin{cases} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x)g(x) \end{cases} \quad \lambda f : \begin{cases} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \lambda f(x) \end{cases}$$

Lorsque g ne s'annule pas sur I, on définit également **le quotient de f par g** :

$$\frac{f}{g} : \begin{cases} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

Théorème – Soient f et g deux fonctions définies sur I et admettant des limites en $x_0 \in \overline{I}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les tableaux qui suivent indiquent les limites éventuelles de la somme, la différence, le produit, l'inverse ou le quotient de f et g, sauf dans certains cas notés **F.I** (forme indéterminée) où l'on ne sait pas conclure *a priori* si la fonction admet une limite ou non, et si la limite éventuelle est finie ou infinie.

Remarque – Dans le cas d'une forme indéterminée, seule une étude spécifique permet de savoir si la fonction admet une limite et de calculer la limite éventuelle. On aura souvent recours aux relations de négligeabilité et d'équivalence (cf. paragraphe 14.4) pour lever la forme indéterminée.

Limite de λf en x_0

λ \ $\lim f$	$-\infty$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	λa	$-\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0
$\lambda > 0$	$-\infty$	λa	$+\infty$

Limite éventuelle de $f+g$ en x_0

$\lim f$ \ $\lim g$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$

Limite éventuelle de $f-g$ en x_0

$\lim f$ \ $\lim g$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$a-b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Limite éventuelle de $f.g$ en x_0

$\lim f$ \ $\lim g$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
$a=0$	**F.I.**	0	0	0	**F.I.**
$a>0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Limite de $1/g$ en x_0

$\lim g$	$-\infty$	0^-	$b \in \mathbb{R}^*$	0^+	$+\infty$
$\lim 1/g$	0^-	$-\infty$	$1/b$	$+\infty$	0^+

Limite éventuelle de f/g en x_0

$\lim f$ \ $\lim g$	$-\infty$	$b<0$	0^-	0^+	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$a<0$	0^+	a/b	$+\infty$	$-\infty$	a/b	0^-
0	0	0	**F.I.**	**F.I.**	0	0
$a>0$	0^-	a/b	$-\infty$	$+\infty$	a/b	0^+
$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Démonstration

À titre d'exemple, montrons que si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} b$ où $(x_0, a, b) \in \mathbb{R}^3$ alors $f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a+b$.

Soit ε un réel strictement positif quelconque. On a $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, donc par définition de $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \quad a-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(x) \leqslant a+\frac{\varepsilon}{2}$$

De même, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0-\beta, x_0+\beta], \quad b-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant g(x) \leqslant b+\frac{\varepsilon}{2}$$

En posant $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, on obtient :

$$\forall x \in I \cap [x_0-\gamma, x_0+\gamma], \quad a-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(x) \leqslant a+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad b-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant g(x) \leqslant b+\frac{\varepsilon}{2}$$

dont on déduit par somme :

$$\forall x \in I \cap [x_0-\gamma, x_0+\gamma], \quad a+b-\varepsilon \leqslant f(x)+g(x) \leqslant a+b+\varepsilon$$

On obtient bien : $f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a+b$. ■

Corollaire – Soient f et g des fonctions définies sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
- Si f et g sont continues en x_0 alors $f+g$, λf et $f.g$ sont continues en x_0.
- Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $1/g$ et f/g sont continues en x_0.

14.3.3 Composition des limites

Théorème – Composition des limites

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, $g : J \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in \overline{I}$.
Si f a une limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 et si g a une limite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors $g \circ f$ admet b pour limite en x_0 :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a \quad \text{et} \quad g(y) \underset{y\to a}{\longrightarrow} b \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} b$$

Démonstration

À titre d'exemple montrons que si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$ où $a \in \mathbb{R}$ et si $g(y) \underset{y\to a}{\longrightarrow} -\infty$ alors $g(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Soit B un réel quelconque. Par définition de $g(y) \underset{y\to a}{\longrightarrow} -\infty$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall y \in J \cap [a-\alpha, a+\alpha], \quad g(y) \leqslant B$$

Or par définition de $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [A, +\infty[, \quad a-\alpha \leqslant f(x) \leqslant a+\alpha$$

Comme f est à valeurs dans J, on en déduit que :

$$\forall x \in I \cap [A, +\infty[, \quad g(f(x)) \leqslant B$$

On obtient bien : $g(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. ■

Corollaire – Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, $g : J \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.
Si f est continue en x_0 et si g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Exemples

1. $-x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$ donc par composition : $\exp(-x^2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\dfrac{1}{x} \underset{x\to0+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \exp = +\infty$ donc par composition : $e^{1/x} \underset{x\to0+}{\longrightarrow} +\infty$.

14.3.4 Limites et inégalités

Théorème – Compatibilité avec la relation d'ordre
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que :

(i) f et g ont des limites finies en x_0,

(ii) $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.

Alors $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$.

Démonstration
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I admettant x_0 pour limite.
On a donc $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim\limits_{x_0} f$ et $g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim\limits_{x_0} g$.
Or $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \leqslant g(u_n)$, donc le théorème de passage à la limite pour les suites donne :
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$. ■



Si on a $\forall x \in I,\ f(x) < g(x)$, alors en passant à la limite on pourra seulement affirmer que $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$.

Par exemple les fonctions $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ vérifient $\forall x > 0,\ f(x) < g(x)$ mais elles ont même limite en $+\infty$.

On retiendra donc que le passage à la limite est compatible avec la relation d'ordre et transforme les inégalités strictes en inégalités larges.

Remarque – La compatibilité avec la relation d'ordre ne permet pas de montrer l'existence d'une limite (l'existence des limites fait partie des hypothèses et non de la conclusion) ; en revanche, les deux résultats suivants montrent l'existence d'une limite.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème – Existence d'une limite par encadrement
Soient f, g et h trois fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que :

(i) f et g ont une même limite finie ℓ en x_0,

(ii) $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$,

alors h admet ℓ pour limite en x_0.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Montrons que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$.

• Pour tout $x > 0$, on a donc : $1 - x < f(x) \leqslant 1$. Or $1 - x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc par encadrement, on en déduit que $f(x) \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} 1$.

• Pour tout $x < 0$, on obtient : $1 \leqslant f(x) < 1 - x$. Donc par encadrement, il vient : $f(x) \underset{x\to 0-}{\longrightarrow} 1$.

f admet donc 1 pour limite à droite et à gauche en 0. f n'étant pas définie en 0, on en déduit que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Remarque – Lorsque l'on souhaite montrer que $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$, il est parfois plus simple de prouver que $f(x) - \ell \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. Pour cela, on peut majorer $|f(x) - \ell|$ par une quantité de limite nulle en x_0 et utiliser le théorème d'encadrement.

Théorème – Théorème de comparaison
Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$.
• si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ et si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$ alors $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$,
• si $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$ et si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque – Ces théorèmes (encadrement et comparaison) sont les seuls, avec le théorème de la limite monotone (étudié au prochain chapitre), à pouvoir justifier l'existence théorique d'une limite. Ils sont donc très souvent utilisés.

14.4 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Le but de cette partie est d'introduire les notions de négligeabilité et d'équivalence pour les fonctions. Ces notions ont déjà été étudiées pour les suites et on retrouvera les mêmes propriétés et mises en garde dans le cadre des fonctions. Pour cette raison, on a réduit l'exposé de cette partie.

On rappelle que, dans ce chapitre, I désigne un intervalle privé éventuellement d'un nombre fini de points et $\overline{I}$ son adhérence définie page 363.

14.4.1 Fonction négligeable devant une autre

Définition – Fonction négligeable devant une autre

Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$. On dit que f **est négligeable devant** g **au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ admettant 0 pour limite en x_0 et telle que : $\forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.

On note alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ ou $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.

Méthode 1 Montrer que $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$

Pour montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre, on utilise très souvent le résultat suivant : soit $x_0 \in \overline{I}$ et soient f et g deux fonctions définies sur I telles que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$. Alors

$$f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Exemples d'application

1. $x^2 \underset{0}{=} o(x)$: en effet $\dfrac{x^2}{x} = x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
2. $x \underset{+\infty}{=} o\left(x^2\right)$: en effet $\dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

La relation de négligeabilité pour les fonctions vérifie les mêmes propriétés que celle pour les suites. Par exemple, si $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et si $g(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$. Le lecteur trouvera donc la liste des propriétés élémentaires de la relation de négligeabilité dans le chapitre portant sur l'étude asymptotique des suites.

Proposition – Composition à droite

Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$ tels que $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.

- *pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I admettant x_0 pour limite, on a :*
$$f(u_n) = o(g(u_n)),$$
- *pour toute fonction u à valeurs dans I admettant x_0 pour limite en t_0, on a :*
$$f(u(t)) \underset{t_0}{=} o(g(u(t))).$$

Exemple

Supposons que $f(x) \underset{0}{=} o(g(x))$. On a $\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = o\left(g\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
Par ailleurs $\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(\mathrm{e}^{-x}) \underset{+\infty}{=} o(g(\mathrm{e}^{-x}))$.

Théorème – Croissance comparée des fonctions usuelles

1. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$, alors $x^\alpha \underset{\pm\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha)$.

2. Soient α et β deux réels strictement positifs, alors

- **au voisinage de $+\infty$:** $(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$.
- **au voisinage de 0 :** $|\ln x|^\alpha \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

14.4.2 Fonctions équivalentes

Définition – Fonctions équivalentes

Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$. On dit que f **est équivalente à** g **au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ admettant 1 pour limite en x_0 et telle que : $\forall x \in I,\ f(x) = \alpha(x)g(x)$.
On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Méthode 2 Montrer que $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$

Pour montrer que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, on utilise souvent les résultats suivants :

- $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \underset{x_0}{=} o(f(x)) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.
- Si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$: $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$.

Exemple d'application

$\ln(x + \sqrt{x}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$. En effet $\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(\ln(x))$.

La relation d'équivalence pour les fonctions vérifie les mêmes propriétés que celle pour les suites. Par exemple, si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$. Le lecteur trouvera donc la liste des propriétés élémentaires de la relation d'équivalence dans le chapitre portant sur l'étude asymptotique des suites.
Les mises en garde restent également les mêmes : la relation d'équivalence pour les fonctions n'est pas compatible avec l'addition et, sauf exception, on ne peut pas composer à gauche une relation d'équivalence (c'est-à-dire : si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, on n'aura pas en général $\varphi(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \varphi(g(x))$).

Proposition – Composition à droite
Soient f et g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$ tels que $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

- *pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I admettant x_0 pour limite, on a :*
$$f(u_n) \sim g(u_n),$$
- *pour toute fonction u à valeurs dans I admettant x_0 pour limite en t_0, on a :*
$$f(u(t)) \underset{t_0}{\sim} g(u(t)).$$

Exemple

Supposons que $f(x) \underset{1}{\sim} g(x)$. On a $e^{1/n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $f(e^{1/n}) \sim g(e^{1/n})$.
En outre, $e^x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $f(e^x) \underset{0}{\sim} g(e^x)$.

Théorème – Équivalents usuels
Au voisinage de 0 :

- $\sin x \underset{0}{\sim} x$,
- $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$,
- $\tan x \underset{0}{\sim} x$,
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.

Polynômes : soit $P(x) = a_q x^q + \cdots + a_p x^p$ avec $q \leqslant p$, $a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$ alors :

$$P(x) \underset{0}{\sim} a_q x^q \quad \text{et} \quad P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_p x^p.$$

Démonstration
Pour les polynômes, les équivalents s'obtiennent par exemple en montrant que le quotient tend vers 1.
Pour les équivalents usuels au voisinage de 0, à l'exception de $1 - \cos(x)$, on peut faire intervenir des dérivées.
Ainsi $\forall x \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x}$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \exp'(0) = 1$. On obtient $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

Pour $1 - \cos(x)$, on utilise les formules trigonométriques : $1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
Or $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ et $\dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc par composition à droite : $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.
Puis $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{4}$. On en déduit enfin que $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. ■

Exemples

1. On a : $2x + 3x^2 - 7x^3 + 5x^4 \underset{0}{\sim} 2x$, et : $2x + 3x^2 - 7x^3 + 5x^4 \underset{+\infty}{\sim} 5x^4$.
2. Déterminons un équivalent de $\ln(x)$ au voisinage de 1.
 On a : $\forall x > 0,\ \ln(x) = \ln(1 + x - 1)$. Or $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et $x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ donc par composition à droite : $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$.

14.5 Branches infinies des courbes

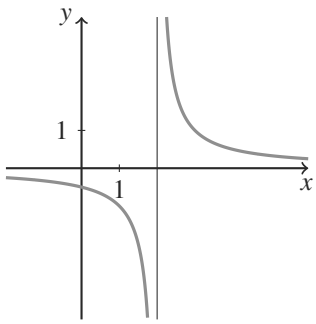
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et C_f la courbe représentative de f.

Définition – Asymptote en $x_0 \in \mathbb{R}$
On suppose que f admet $\pm\infty$ pour limite en x_0. On dit alors que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote à C_f en x_0**.

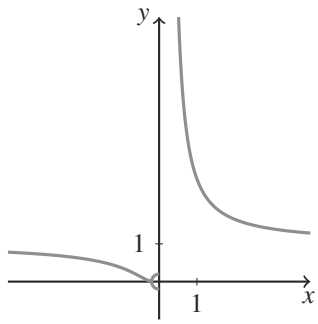
Exemples

1. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, possède une asymptote d'équation $x = 2$.
2. g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \mathrm{e}^{1/x}$, admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote à droite de 0, mais pas à gauche.
 En effet $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $g(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$ donc $g(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



Graphe de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$



Graphe de $g : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}$

Définition – Asymptote en $\pm\infty$

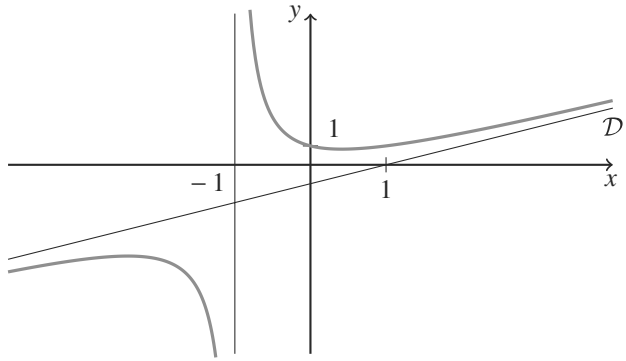
On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$. S'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) - ax - b$ tende vers 0 en $+\infty$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote à C_f en $+\infty$**.
On définit de même une **asymptote à C_f en $-\infty$**.

Remarques

1. En particulier, si $\lim\limits_{+\infty} f = b$ où $b \in \mathbb{R}$ alors la droite $y = b$ est asymptote à C_f en $+\infty$.
2. La position de C_f par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $f(x) - ax - b$ (positif : au-dessus ; négatif : en dessous).

Exemple

On définit f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.
Alors $\forall x \neq -1,\ f(x) = \dfrac{x^2-1+2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$.
Or $\dfrac{2}{x+1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et $-\infty$. C_f est au-dessus de son asymptote en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.
Par ailleurs la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à C_f en -1.



Graphe de $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

Définition – Branche parabolique en $\pm\infty$

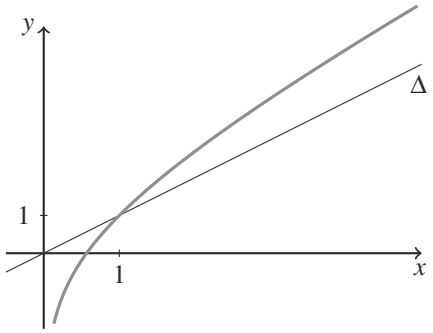
On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$ et que f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ on dit que C_f présente une **branche parabolique de direction verticale**,
2. si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ on dit que C_f présente une **branche parabolique de direction horizontale**,
3. si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on dit que C_f présente une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même les branches paraboliques au voisinage de $-\infty$.

Exemples

1. Les courbes représentatives de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ présentent au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction verticale.
2. Les courbes représentatives de $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln x$ présentent au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction horizontale.
3. La courbe représentative de $x \mapsto x + \ln x$ présente au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite Δ d'équation $y = x$.

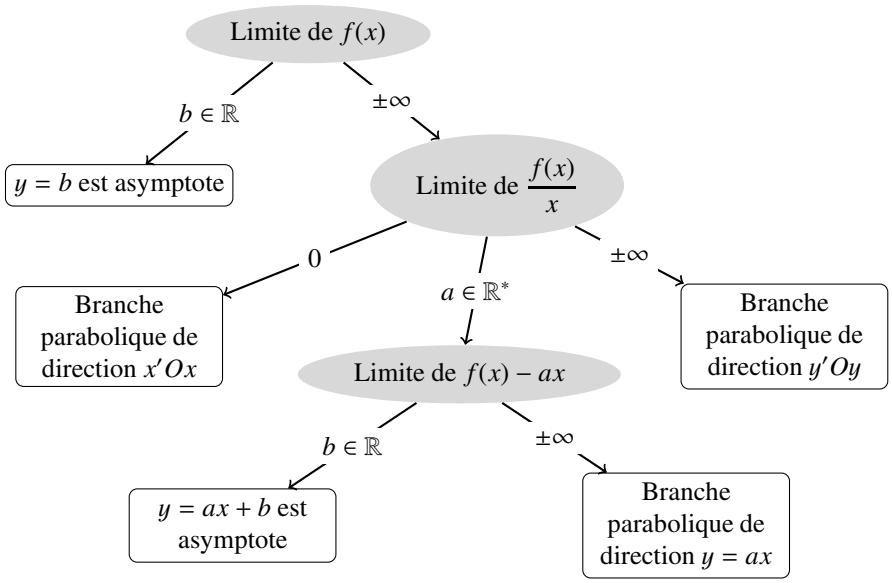


Graphe de $x \mapsto x + \ln(x)$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Méthode 3 Recherche pratique des branches infinies

On peut déterminer de façon systématique l'éventuelle branche infinie de f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) en étudiant différentes limites en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).



Exemple d'application

Étudions les branches infinies de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2} - x$.
Remarquons d'abord que le discriminant de $X^2 - 2X + 2$ est négatif. Par conséquent $X^2 - 2X + 2$ est du signe du coefficient constant, qui est 2, donc positif. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

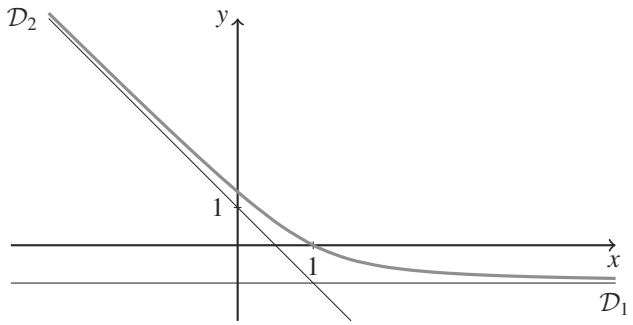
Par ailleurs : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x = |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x$.

• Étude au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = x\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1\right)$.

On a $\sqrt{1+u} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}u$ et $-\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$. Ainsi $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -1 + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} -1$.
On en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, donc que la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = -1$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$.

• Étude au voisinage de $-\infty$. Pour tout $x \leqslant 0$, $f(x) = -x\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)$.

On a $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ensuite $\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -2$ et enfin : $f(x) + 2x = -x\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1\right)$.
Une recherche d'équivalent strictement analogue à celle menée au voisinage de $+\infty$ donne : $f(x) + 2x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $-\infty$.



Graphe de $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2} - x$.

Synthèse

Savoirs

- théorèmes permettant de montrer qu'une fonction admet une limite en un point et de déterminer cette limite : opérations algébriques, composition, théorème d'encadrement, étude des limites à droite et à gauche, théorème de comparaison,
- comparaison des fonctions usuelles (croissance comparée),
- équivalents usuels.

Savoir-faire

- montrer qu'une fonction admet une limite en un point et déterminer cette limite,
- montrer qu'une fonction est continue en un point,
- montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre,
- montrer que deux fonctions sont équivalentes,
- déterminer un équivalent simple d'une fonction à l'aide des équivalents usuels,
- étudier les branches infinies de la courbe représentative d'une fonction.

Mots-clés

- Limite d'une fonction en un point,
- continuité d'une fonction en un point,
- limite à droite/à gauche,
- prolongement par continuité,
- négligeabilité,
- croissance comparée,
- équivalence,
- asymptote,
- branche parabolique.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

14.1 Si f est une fonction définie sur $]0, 1[\cup]1, 2[\cup]3, +\infty[$, en quels points peut-on étudier :
a) l'existence d'une limite,
b) la continuité de f,
c) un prolongement par continuité ?

14.2 Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les limites à gauche et à droite de f en x_0, pour que f soit prolongeable par continuité en x_0.

14.3 **Recherche d'exemples**

a) Donner un exemple de fonction qui admet la même limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ à gauche et à droite en 0, mais qui n'est pas prolongeable par continuité en 0.

b) Trouver une fonction f telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ mais que x ne soit pas négligeable devant $\exp(f(x))$ au voisinage de $+\infty$.

c) Donner un exemple de fonction f telle que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et que la courbe de f n'admette ni asymptote, ni branche parabolique au voisinage de $+\infty$.

d) Trouver une fonction f telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais que $\dfrac{1}{f}$ n'ait pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

14.4 **Vrai ou faux ?**

a) La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = \sin(x)$ si $x < 0$ est continue en 0.

b) $f : x \mapsto 2x + 3 + \ln(x)$ présente une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$.

c) On a $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$; on en déduit par composition à droite que : $\sin(\ln(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

d) Pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a :
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n.$$

14.5 **QCM**

Chaque question admet au moins une bonne réponse.

1) Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ alors :
a) f et g ont même limite éventuelle en $+\infty$,
b) $f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
c) $f(x^2) \underset{+\infty}{\sim} g(x^2)$.

2) On définit f par : $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
On sait que $x\ln x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ donc :
a) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$,
b) $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 0$,
c) f n'est pas continue en 0.

3) La fonction $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$:
a) est continue en 0,
b) est prolongeable par continuité en 0,
c) n'admet pas de limite en 0.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$:
a) f est continue en 0,
b) f est continue à droite en 0,
c) on ne peut pas conclure.

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 384.

■ **Recherche d'équivalents**

14.6 ◎

Trouver un équivalent simple en x_0 :
a) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ en $x_0 = 0$,
b) $(x^2 - 3x + 4)\mathrm{e}^{1/x}$ en $x_0 = +\infty$,
c) $\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ en $x_0 = +\infty$,
d) $\exp(\cos(x) - 1) - 1$ en $x_0 = 0$.

14.7

Trouver un équivalent simple en x_0 :
a) $x\sqrt{x+1} - x$ en $x_0 = 0$,
b) $\ln\left(1 + \sqrt{\ln(1+x)}\right)$ en $x_0 = 0$,
c) $\tan(x) - \sin(x)$ en $x_0 = 0$,
d) $2(x-1)^2 + 3(x-1)$ en $x_0 = 1$.

14.8 ◎

Trouver un équivalent simple en x_0 :
a) $\exp(x^2) - \cos(x)$ en $x_0 = 0$,
b) $\ln(2\sin x)$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$,
c) $(x^3 + x)^{\frac{1}{3}} - (x^3 - x)^{\frac{1}{3}}$ en $x_0 = +\infty$,
d) $\sin(x^2 + x)\ln(\tan(x))$ en $x_0 = 0$.

■ Limite en un point

14.9 ◎

Pour chaque des fonctions suivantes, déterminer la limite éventuelle en x_0 :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$; $x_0 = 0$.

b) $g(x) = 2x + \dfrac{\sqrt{9x^2}}{x}$; $x_0 = 0$.

c) $h(x) = x^a \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$; limite à droite en 0 en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

d) $k(x) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$; $x_0 = 1$.

14.10 ◎

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer à l'aide des croissances comparées la limite en x_0 :

a) $f(x) = x - \ln(x)$; $x_0 = +\infty$.

b) $g(x) = (x^3 + 2x^2 + 2x + 1)(\ln(1+x))^2$; $x_0 = -1$.

c) $u(x) = x\exp(-x^2)$; $x_0 = +\infty$.

d) $v(x) = x\exp(-x\ln(x^2))$; $x_0 = +\infty$.

14.11

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer à l'aide d'équivalents la limite en x_0 :

a) $f(x) = (x+1)\sin\left(\dfrac{2x}{x^2+3}\right)$; $x_0 = +\infty$,

b) $g(x) = \dfrac{\sin(2x) - \sin(5x)}{\sin(6x)}$; $x_0 = 0$,

c) $h(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}} - \sqrt[3]{x}$; $x_0 = +\infty$,

d) $k(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^x$; $x_0 = +\infty$.

■ Continuité en un point

14.12

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est continue en x_0 :

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$,

b) $g(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1, 0[\end{cases}$ en $x_0 = 0$,

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (\sin x)\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$,

d) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\exp\left(-\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$.

14.13

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et étudier tous les éventuels prolongements par continuité :

a) $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$,

c) $h(x) = x^{\frac{x}{x-1}}$,

d) $k(x) = (1 - x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

14.14

On veut déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, continues en 1 et vérifiant l'équation :

$$(\bigstar)\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\Big(\frac{1}{2}(1+x)\Big).$$

1) Soit f une fonction continue en 1 et vérifiant ($\bigstar$).
Soit x un réel quelconque. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n).$$

1.a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

1.b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = f(x)$ et en déduire la valeur de $f(x)$.

2) En déduire l'ensemble des fonctions continues en 1 et vérifiant ($\bigstar$).

14.15 ◎

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. On pose $h = \max(f, g)$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I,\ h(x) = \max\left(f(x), g(x)\right)$$

On suppose que f et g sont continues en x_0. Montrer que h est continue en x_0.

■ Branches infinies

14.16

Étudier les limites et les branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction :

$$f\ :\ x \mapsto \frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

14.17

Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier les limites et branches infinies éventuelles aux bornes de l'ensemble de définition, de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln(x)}$$

14.18 ◎

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x^2+x+2}$.

a) Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, on a :

$$f(x) = x + 1 - \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote (D) aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$. On précisera la position relative de la courbe par rapport à (D) aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

14.19

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Déterminer les limites et branches infinies en -1, $+\infty$ et $-\infty$.

Exercices d'approfondissement

14.20 ◎

On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, continues en 0 et vérifiant l'équation :

$$(\bigstar)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) On suppose que f est continue en 0 et vérifie $(\bigstar)$.

1.a) En remarquant que $0+0=0$, montrer que $f(0)=0$, puis que f est impaire.

1.b) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$; puis étendre ce résultat au cas où $n \in \mathbb{Z}$.

1.c) Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, en calculant $f\left(q\dfrac{p}{q}\right)$ de deux façons, montrer que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q} f(1)$.

1.d) Montrer que f est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.e) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.

2) Déterminer l'ensemble des fonctions continues en 0 et vérifiant $(\bigstar)$.

Indications

14.6

a) Se ramener à la forme $e^u - 1$.

b) Quelle est la limite de $e^{1/x}$ quand $x \to +\infty$?

c) On commencera par utiliser l'équivalent usuel de $\sin(u)$ au voisinage de 0.

d) On commencera par utiliser l'équivalent usuel de $e^u - 1$ au voisinage de 0.

14.8

a) Une première étape consiste à écrire que :

$$\exp(x^2) - \cos(x) = \exp(x^2) - 1 + 1 - \cos(x).$$

On connaît des équivalents de $\exp(x^2) - 1$ et de $1 - \cos(x)$, mais l'équivalence n'est pas compatible avec l'addition. On peut surmonter cette difficulté en se ramenant à des limites, en l'occurrence en étudiant la limite en 0 de $\dfrac{\exp(x^2) - 1 + 1 - \cos(x)}{x^2}$.

b) Utiliser la définition de la dérivée en $\frac{\pi}{6}$ de la fonction $x \mapsto \ln(2\sin x)$.

c) On peut s'inspirer du **a)**.

d) On démontrera que $\ln(\tan(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

14.9

a) Introduire la quantité conjuguée de : $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.

b) Attention : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|$.

c) Utiliser le théorème d'encadrement ou le théorème de comparaison, selon la valeur de a.

d) Faire intervenir la définition de la dérivée en 1 de la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

14.10

b) On peut poser $u = 1 + x$ pour se ramener à une limite en 0.

d) Comparer avec xe^{-x}.

14.15 On prendra garde au fait que si deux fonctions coïncident en un point, la continuité de l'une en ce point n'implique pas la continuité de l'autre.

Il faut ici revenir à la définition de la limite : pour tout $\varepsilon > 0$, on doit trouver $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0-\alpha, x_0+\alpha],\ h(x_0)-\varepsilon \leqslant h(x) \leqslant h(x_0)+\varepsilon$$

14.18

a) Montrer que $f(x) - x - 1 \underset{\pm\infty}{\sim} -\dfrac{4}{x}$.

14.20

1.a) Pour montrer que f est impaire, on s'intéressera à $f(x - x)$.

1.b) Pour l'extension au cas où $n \in \mathbb{Z}$, utiliser le fait que f est impaire.

1.c) Remarquer que $f(p) = f(p \times 1)$ et utiliser la question **1.b)**.

1.d) Montrer que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ revient à montrer que $f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x_0)$.

1.e) Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

14.1

On peut étudier :
a) l'existence d'une limite de f en tout point de l'ensemble $[0,2] \cup [3,+\infty[\cup\{+\infty\}$,
b) la continuité de f en tout $x \in]0,1[\cup]1,2[\cup]3,+\infty[$,
c) un prolongement par continuité de f en 0, en 1, en 2 et en 3.

14.2

f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si f admet la **même** limite **finie** à gauche et à droite en x_0.

14.3

a) La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ admet $+\infty$ pour limite à gauche et à droite en 0, mais elle n'est pas prolongeable par continuité en 0 car cette limite commune est infinie.
b) Prenons : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x)$. On a bien $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ mais x n'est pas négligeable devant $\exp(f(x)) = x$ au voisinage de $+\infty$.
c) Cherchons f telle que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et que $f(x) - x$ n'ait pas de limite quand $x \to +\infty$. Prenons par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(x)$.
On a : $\forall x>0,\ \left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc par encadrement $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, on a bien $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Mais $f(x) - x = \sin(x)$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$, donc la courbe de f n'admet ni asymptote, ni branche parabolique au voisinage de $+\infty$.
d) Considérons la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{N}^* \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si } x \notin \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc on a bien $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $n + \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, or :

$$\frac{1}{f(n)} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\text{et } \frac{1}{f(n+\frac{1}{2})} = -(n+\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Ces deux limites étant différentes, on en déduit, d'après le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, que $\dfrac{1}{f}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

14.4

a) **FAUX :** $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \sin(x) = 0$ or $f(0) = \mathrm{e}^0 \neq 0$.

b) **VRAI :** $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ et $f(x) - 2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) **FAUX :** il n'est pas possible d'appliquer la composition à droite car $\ln(x)$ ne tend pas 0 quand $x \to 0$.

d) **FAUX :** il manque l'hypothèse $a_n \neq 0$.

14.5

1) Réponses **a)** et **c)**.
Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ alors f et g ont même limite éventuelle en $+\infty$, et par ailleurs : $f(x^2) \underset{+\infty}{\sim} g(x^2)$. Pour obtenir ce dernier résultat, on remarque que $x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et on applique la composition à droite.
La réponse b est fausse (prendre $f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$).
2) Réponses **b)** et **c)**.
$\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 0$ car $\forall x > 0,\ f(x) = x\ln(x)$ et $x\ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.
f n'est pas continue en 0 car $f(0) \neq \lim\limits_{x\to0+} f(x)$.
La réponse a est fausse car f n'étant pas continue en 0, elle n'a pas de limite en 0.
3) Réponse **b)**.
La fonction $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ est prolongeable par continuité en 0. En effet, elle n'est pas définie en 0 et $-\frac{1}{x^2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\infty$ donc par composition $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.
La réponse a est fausse car la fonction n'est pas définie en 0 ; la réponse c est fausse puisqu'on vient de montrer que la fonction a une limite en 0.
4) Réponse **c)**.
Considérons par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{2\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin(2n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = f(0)$ mais $f\left(\dfrac{1}{n+\frac{1}{4}}\right) = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ donc f n'est pas continue en 0, ni même continue à droite en 0.

14.6

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x} - 1)$.
Or $2x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{e}^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ donc $\mathrm{e}^{2x} - 1 \underset{0}{\sim} 2x$.
Par ailleurs $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ donc $\mathrm{e}^{-x} \underset{0}{\sim} 1$.
Donc $\boxed{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \underset{0}{\sim} 2x}$.

b) D'une part $x^2 - 3x + 4 \underset{+\infty}{\sim} x^2$. D'autre part $1/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par composition des limites $\mathrm{e}^{1/x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où $\mathrm{e}^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} 1$.
Donc $\boxed{(x^2 - 3x + 4)\mathrm{e}^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} x^2}$.

c) $\frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ donc $\sin(\frac{1}{x+1}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x+1}$.
Mais $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ donc $\boxed{\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$.

d) On a $\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{e}^u - 1 \underset{0}{\sim} u$.
Donc $\exp(\cos(x) - 1) - 1 \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1$.

Or $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$.

Donc $\boxed{\exp(\cos(x) - 1) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2}$.

14.7

a) Pour tout $x \geqslant -1$, on a :

$$x\sqrt{x+1} - x = x(\sqrt{1+x} - 1)$$

Or $\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x$.

Donc $\boxed{x\sqrt{x+1} - x \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2}$.

b) $\sqrt{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$.

Donc $\ln\left(1 + \sqrt{\ln(1+x)}\right) \underset{0}{\sim} \sqrt{\ln(1+x)}$.

Or $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et on peut composer les équivalents par la racine carrée.

Donc $\boxed{\ln\left(1 + \sqrt{\ln(1+x)}\right) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}}$.

c) Pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a :

$$\tan(x) - \sin(x) = \tan(x)(1 - \cos(x))$$

Or $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ et $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$.

Donc $\boxed{\tan(x) - \sin(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^3}$.

d) On a $x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et $2u^2 + 3u \underset{0}{\sim} 3u$.

Donc $\boxed{2(x-1)^2 + 3(x-1) \underset{1}{\sim} 3(x-1)}$.

14.8

a) Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$(1) : \exp(x^2) - \cos(x) = x^2\left(\frac{\exp(x^2) - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\right)$$

Or $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ donc $\exp(x^2) - 1 \underset{0}{\sim} x^2$. D'où :

$$(2) : \frac{\exp(x^2) - 1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Par ailleurs, $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ donc :

$$(3) : \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

De (2) et (3), on déduit :

$$\frac{\exp(x^2) - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

Avec (1), il vient enfin :

$$\boxed{\exp(x^2) - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{3}{2}x^2}$$

b) Posons : $\forall x \in]0, \pi[,\ f(x) = \ln(2\sin x)$.

f est dérivable sur $]0, \pi[$ et $\forall x \in]0, \pi[,\ f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

En particulier, on a :

$$\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}} \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{\longrightarrow} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

On en déduit que $f(x) - f(\frac{\pi}{6}) \underset{\frac{\pi}{6}}{\sim} \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6})$. Or $f(\frac{\pi}{6}) = 0$. Donc

$$\boxed{\ln(2\sin x) \underset{\frac{\pi}{6}}{\sim} \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

c) Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}(1) :\ & (x^3 + x)^{\frac{1}{3}} - (x^3 - x)^{\frac{1}{3}} \\ &= x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} - x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{x}\left(x^2\left((1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}} - 1\right) - x^2\left((1 - \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}} - 1\right)\right)\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(1+u)^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}u$.

Par conséquent, on a : $(1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3x^2}$, d'où :

$$(2) :\ x^2\left((1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

De même, on obtient :

$$(3) :\ x^2\left((1 - \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$

De (2) et (3), on déduit :

$$x^2\left((1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}} - 1\right) - x^2\left((1 - \frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$

Avec (1), il vient enfin :

$$\boxed{(x^3 + x)^{\frac{1}{3}} - (x^3 - x)^{\frac{1}{3}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3x}}$$

d) D'une part $x^2 + x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ donc :

$$\sin(x^2 + x) \underset{0}{\sim} x^2 + x \underset{0}{\sim} x$$

D'autre part, $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, mais rien ne permet d'en déduire directement que $\ln(\tan(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

Or on a : $\ln(\tan(x)) - \ln(x) = \ln\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)$. Mais $\dfrac{\tan(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\ln(\tan(x)) - \ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Comme $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, on en déduit que :

$$\ln(\tan(x)) - \ln(x) \underset{0}{=} o(\ln(x)) \text{ i.e. } \ln(\tan(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\sin(x^2 + x)\ln(\tan(x)) \underset{0}{\sim} x\ln(x)}$$

14.9

a) Pour tout $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin(x)} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})\sin(x)} \\ &= \frac{1 + x - (1-x)}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})\sin(x)} \\ &= \frac{2x}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})\sin(x)}\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Or $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$ et $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ par conséquent $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1}$.

b) $\forall x \neq 0,\ g(x) = 2x + \dfrac{3|x|}{x}$.
Ainsi $\forall x > 0,\ g(x) = 2x + 3$ donc $g(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 3$.
Mais $\forall x < 0,\ g(x) = 2x - 3$ donc $g(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -3$.
Les limites de g à droite et à gauche en 0 étant distinctes, on en déduit : $\boxed{g \text{ n'admet pas de limite en } 0}$.

c) $\forall x > 0,\ \dfrac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Donc : $\forall x > 0,\ x^{a-1} - x^a < h(x) \leqslant x^{a-1}$.
• **si $a > 1$:** alors $x^{a-1} - x^a \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $x^{a-1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement : $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
• **si $a = 1$:** alors $x^{a-1} - x^a = 1 - x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $x^{a-1} = 1$ donc par encadrement : $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.
• **si $a < 1$:** alors $x^{a-1} - x^a = x^{a-1}(1-x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc par comparaison : $\boxed{h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty}$.

d) Soit $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$. En particulier :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \varphi'(1) = -\frac{\pi}{2}$$

Comme $\varphi(1) = 0$, il vient : $\boxed{k(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\dfrac{\pi}{2}}$.

Remarque : une autre méthode consiste à écrire :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)\\ &\underset{1}{\sim} -\frac{\pi}{2}(x-1)\end{aligned}$$

En effet $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ et $\dfrac{\pi}{2}(x-1) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.

14.10

a) On a $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ par croissance comparée, donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$, puis : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

b) Posons $u = 1 + x$, donc $u \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}g(x) &= ((u-1)^3 + 2(u-1)^2 + 2(u-1) + 1)(\ln u)^2\\ &= (u^3 - u^2 + u)(\ln u)^2\end{aligned}$$

Or par croissance comparée, pour tout $k > 0$, $u^k(\ln u)^2 \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{g(x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0}$.

c) $\forall x \geqslant 0,\ u(x) = (x^2)^{\frac{1}{2}}\exp(-x^2)$. Or $x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par croissance comparée $t^{\frac{1}{2}}\exp(-t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par composition des limites : $\boxed{u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

d) Pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$, on a $\ln(x^2) \geqslant 1$ et donc $x\ln(x^2) \geqslant x$. On en déduit que :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2}},\ 0 \leqslant v(x) \leqslant x\exp(-x)$$

Or par croissance comparée, $x\exp(-x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement : $\boxed{v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

14.11

a) On a $\dfrac{2x}{x^2+3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ donc :

$$\sin\left(\frac{2x}{x^2+3}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{x^2+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$$

Par conséquent : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} (x+1)\dfrac{2}{x} \underset{+\infty}{\sim} 2$.
Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2}$.

b) On a $\sin(6x) \underset{0}{\sim} 6x$ donc :

$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{6}\left(\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\sin(5x)}{x}\right)$$

Comme $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$ on a $\dfrac{\sin(2x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$ et de même $\dfrac{\sin(5x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 5$.
D'où : $\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}(2-5) = -\frac{1}{2}}$.

c) Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$h(x) = \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}{x}} - 1\right)$$

Or $\sqrt[3]{x} \underset{+\infty}{=} o(x)$ donc $x + \sqrt[3]{x} \underset{+\infty}{\sim} x$ puis $\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{x}$.
Ainsi $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, or $\sqrt[3]{1+u} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}u$. Il vient alors :

$$h(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{x} \times \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

Donc $\boxed{h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

d) Pour tout $x > 1$, on a :

$$k(x) = \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\right)$$

Or on a :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}$$

Comme $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, il vient :

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln(x)}$$

Donc $x\ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$. Or $\dfrac{1}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par composition de limites, $\boxed{k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1}$.

14.12

a) $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \sqrt{x}$, or $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, donc $\lim\limits_{0^+} f = f(0) = 0$.
Par ailleurs, $x^2 - x \underset{0}{\sim} -x$ donc $f(x) \underset{0^-}{\sim} -x$. D'où $\lim\limits_{0^-} f = 0$.
$\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{0^-} f = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

b) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. D'où $\lim\limits_{0^-} g = 1 \neq g(0)$.
Donc $\boxed{g \text{ n'est pas continue en } 0}$.
Remarque : En revanche, g est continue à droite en 0 car $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = g(0)$.

c) D'une part $\sqrt{-x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$ et $1 - \cos(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}u^2$, donc $1 - \cos(\sqrt{-x}) \underset{0^-}{\sim} \dfrac{1}{2}(\sqrt{-x})^2$. D'où $h(x) \underset{0^-}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{-x}$. Ainsi $\lim\limits_{0^-} h = 0$.
D'autre part, $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $h(x) \underset{0^+}{\sim} x\ln(x)$. Mais $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{0^+} h = 0$.
$\lim\limits_{0^+} h = \lim\limits_{0^-} h = h(0)$ donc : $\boxed{h \text{ est continue en } 0}$.

d) $-\dfrac{1}{x-1} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $-ue^u \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc par composition des limites, $k(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty$. Donc : $\boxed{k \text{ n'est pas continue en } 1}$.
Remarque : En revanche, k est continue à droite en 1. En effet, $-\dfrac{1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $-ue^u \underset{-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par composition de limites, $k(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0 = k(0)$.

14.13

a) f est définie sur $\mathbb{R}^*$, on étudie donc l'éventuel prolongement par continuité de f en 0. On a $\forall u \in \mathbb{R},\ |\sin(u)| \leqslant 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| \leqslant |x|$. Par encadrement, on en déduit que f admet 0 pour limite finie en 0. Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

b) $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ donc g est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$: on étudie l'éventuel prolongement par continuité de g en -3 et en 1.
• *Étude en* -3 *:* on a $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$ donc $\forall x \in \mathcal{D},\ g(x) = \dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$. D'où $g(x) \underset{x\to -3}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ et g est prolongeable par continuité en -3 en posant $g(-3) = \dfrac{1}{2}$.
• *Étude en* 1 *:* $x^2 + 4x + 3 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 8$ et $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ admet 0^+ pour limite en 1^+. Donc $g(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ et g n'est pas prolongeable par continuité en 1.

c) $x^{\frac{x}{x-1}} = \exp\left(\dfrac{x}{x-1}\ln(x)\right)$ donc h est définie sur $\mathcal{D} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. On étudie l'éventuel prolongement par continuité de h en 0 et en 1.
• *Étude en* 0 *:* $\dfrac{x}{x-1}\ln(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ or $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc par composition de limites, $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Ainsi h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$.
• *Étude en* 1 *:* $x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ donc :
$$\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) \underset{1}{\sim} x - 1.$$
Donc $\frac{x}{x-1}\ln(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$ et par composition de limites, $h(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} e$.
Ainsi h est prolongeable par continuité en 1 en posant $h(1) = e$.

d) Étudions le signe de $\dfrac{1+x}{1-x}$:

x	-1		1	
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$		$+$	0 $-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$	0	$+$	$\|\|$ $-$

Donc k est définie sur $]-1,1[$. On étudie son éventuel prolongement par continuité en -1 et en 1.
• *Étude en* 1 *:* pour tout $x \in]-1,1[$, on a :
$$k(x) = (1-x)^2\ln(1+x) - (1+x)(1-x)\ln(1-x)$$
Or $(1-x)^2\ln(1+x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$; de plus $(1-x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et $u\ln(u) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc par composition de limites $(1-x)\ln(1-x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Donc $k(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et k se prolonge par continuité en 1 en posant $k(1) = 0$.
• *Étude en* 1 *:* pour tout $x \in]-1,1[$, on a :
$$k(-x) = (1-x^2)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -(1-x^2)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
donc k est impaire. D'où $\lim\limits_{-1} k = -\lim\limits_{1} k = 0$. Donc k se prolonge par continuité en -1 en posant $k(-1) = 0$.

14.14

1.a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Soit λ vérifiant $\lambda = \frac{1}{2}(1+\lambda)$, c'est-à-dire $\lambda = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n) \\ \lambda \quad\ = \frac{1}{2}(1+\lambda) \end{cases}$$
d'où par soustraction : $u_{n+1} - \lambda = \dfrac{1}{2}(u_n - \lambda)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - \lambda = \frac{1}{2^n}(u_0 - \lambda)$ puis :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + \frac{1}{2^n}(x-1)$$
Comme $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

1.b) f vérifiant (★), on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_{n+1}) = f\Big(\frac{1}{2}(1+u_n)\Big) = f(u_n)$$
Donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Or $u_0 = x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(x)$.
Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et f est continue en 1 donc $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$. Donc $f(x) = f(1)$ et cela quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2) Si f est continue en 1 et vérifie (★) alors, d'après ce qui précède, f est constante. Réciproquement, si f est constante alors f est continue en 1 et vérifie trivialement (★). Donc l'ensemble des fonctions continues en 1 et vérifiant (★) est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

14.15

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par continuité de f en x_0, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0-\beta, x_0+\beta],\ f(x_0)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)+\varepsilon$$

et par continuité de g en x_0, il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0-\gamma, x_0+\gamma],\ g(x_0)-\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant g(x_0)+\varepsilon$$

Posons $\alpha = \min(\beta, \gamma)$. On a : $\alpha > 0$.

Pour tout $x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, on a :

$$\begin{cases} f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon \leqslant h(x_0) + \varepsilon \\ g(x) \leqslant g(x_0) + \varepsilon \leqslant h(x_0) + \varepsilon \end{cases}$$

On en déduit que :

$$(1)\ :\ h(x) = \max\left(f(x), g(x)\right) \leqslant h(x_0) + \varepsilon$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} f(x_0) \leqslant f(x) + \varepsilon \leqslant h(x) + \varepsilon \\ g(x_0) \leqslant g(x) + \varepsilon \leqslant h(x) + \varepsilon \end{cases}$$

On en déduit que :

$$(2)\ :\ h(x_0) = \max\left(f(x_0), g(x_0)\right) \leqslant h(x) + \varepsilon$$

De (1) et (2), on déduit :

$$\forall x \in I \cap [x_0-\alpha, x_0+\alpha],\ h(x_0)-\varepsilon \leqslant h(x) \leqslant h(x_0)+\varepsilon$$

Donc h est continue en x_0.

14.16

• On a $x \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right)$ et $\mathrm{e}^x \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$. Par conséquent $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x$. On en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la courbe de f présente une branche parabolique de direction verticale au voisinage de $+\infty$.

• On a $\mathrm{e}^x \underset{-\infty}{=} o(x)$ et $\mathrm{e}^{2x} \underset{-\infty}{=} o(x)$, par conséquent $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{x}{-x} = -1$. Par conséquent la courbe de f admet une asymptote d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.

14.17

• *Ensemble de définition :* $x \mapsto x\ln(x+1)$ est définie sur $]-1, +\infty[$; $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 1. Donc f est définie sur $\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

• *Étude en* 0 *:* $(x+1)\ln(1+x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\infty$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. f admettant une limite finie en 0, la question de la branche infinie ne se pose pas.

• *Étude en* 1 *:* $(x+1)\ln(x+1) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 2\ln(2) > 0$; par ailleurs ln admet 0^+ (resp. 0^-) pour limite à droite (resp. à gauche) en 1. Donc $f(x) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} -\infty$. f n'admet pas de limite en 1, mais sa courbe admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote au voisinage de 1.

• *Étude en* $+\infty$ *:* Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x) + (x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = x + 1 + \frac{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}$$

On a $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ donc :

$$(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} (x+1)\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

Comme $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que :

$$\frac{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $f(x) = x + 1 + o(1)$: on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la courbe de f admet la droite d'équation $y = x + 1$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

14.18

a) Remarquons que le discriminant de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$ est strictement négatif, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on obtient après réduction au même dénominateur :

$$f(x) - x - 1 = -\frac{4x+1}{x^2+x+2}$$

Or $4x + 1 \underset{\pm\infty}{\sim} 4x$ et $x^2 + x + 2 \underset{\pm\infty}{\sim} x^2$ donc :

$$f(x) - x - 1 \underset{\pm\infty}{\sim} -\frac{4}{x}$$

Ainsi aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, on a :

$$f(x) - x - 1 = -\frac{4}{x} + o\left(-\frac{4}{x}\right) = -\frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Il vient bien :

$$f(x) = x + 1 - \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) D'après ce qui précède, on a :

$$f(x) - (x+1) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc la courbe de f admet la droite (D) d'équation $y = x + 1$ pour asymptote aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

Par ailleurs, $f(x) - (x+1) \underset{\pm\infty}{\sim} -\dfrac{4}{x}$ donc $f(x) - (x+1)$ est du signe de $-\dfrac{4}{x}$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

Donc la courbe de f est en dessous (resp. au-dessus) de (D) au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$).

14.19

a) Déterminons le signe de $\dfrac{(x-1)^3}{x+1}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-1)^3}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc f est définie sur $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.

b) • *Étude en* -1 *:* $(x-1)^3 \underset{x\to-1}{\longrightarrow} -8$ et par ailleurs $\dfrac{1}{x+1} \underset{x\to-1^-}{\longrightarrow} -\infty$. f n'étant pas définie à droite de -1, on en déduit que $f(x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} +\infty$ et donc que la courbe de f admet la droite d'équation $x = -1$ pour asymptote au voisinage de -1.

• *Étude en* $+\infty$ *:* $(x-1)^3 \underset{+\infty}{\sim} x^3$ et $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^2}$. Comme $\forall x \geqslant 0,\ \sqrt{x^2} = x$, on en déduit que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$. Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Déterminons l'éventuelle asymptote : de $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$, on déduit que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Puis pour $x \geqslant 1$, en tenant compte de $x+1 = \sqrt{(x+1)^2}$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} - x \\ &= \frac{\frac{(x-1)^3}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} + x} \\ &= \frac{-4x^2+3x-1}{\sqrt{(x-1)^3(x+1)} + x(x+1)} \\ &= \frac{x^2\left(-4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{(1-\frac{1}{x})^3(1+\frac{1}{x})} + x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{-4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(1-\frac{1}{x})^3(1+\frac{1}{x})} + 1 + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Donc $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -2$. Donc la courbe de f admet la droite d'équation $y = x-2$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

• *Étude en $-\infty$:* en suivant le raisonnement précédent et en remarquant que $\forall x \leqslant 0,\ \sqrt{x^2} = -x$, on obtient $f(x) \underset{-\infty}{\sim} -x$ et donc $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Déterminons l'éventuelle asymptote : cette fois, on a $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$. Des calculs analogues aux précédents donnent pour $x < -1$ (attention dans ce cas $x+1 = -\sqrt{(x+1)^2}$) :

$$f(x) + x = \frac{-4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{-\sqrt{(1-\frac{1}{x})^3(1+\frac{1}{x})} - 1 - \frac{1}{x}}$$

Donc $f(x)+x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2$ et la courbe de f admet la droite d'équation $y = -x+2$ pour asymptote au voisinage de $-\infty$.

Remarque : Lorsque la courbe d'une fonction admet des asymptotes au voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, il n'y a aucun lien *a priori* entre les équations des deux asymptotes.

14.20

1.a) f vérifiant (★), on a :

$$f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

Or $0+0=0$ donc $f(0+0) = f(0)$ et $f(0) = 2f(0)$. Par conséquent $f(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$$

donc $f(-x) = -f(x)$ et f est impaire.

1.b) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

• Initialisation : $f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$ donc la propriété est vraie au rang initial.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $f(nx) = nf(x)$. Alors :

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) = f(nx) + f(x) \\ &= nf(x) + f(x) = (n+1)f(x) \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$.

On veut étendre ce résultat au cas où $n \in \mathbb{Z}$: il reste à étudier le cas où n est un entier strictement négatif. Il s'écrit alors $n = -m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On sait que f est impaire et que $f(mx) = mf(x)$ donc :

$$f(nx) = f(-mx) = -f(mx) = -mf(x) = nf(x)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x)$.

1.c) D'après **1.b)**, on a d'une part :

$$f\Big(q\frac{p}{q}\Big) = qf\Big(\frac{p}{q}\Big)$$

et d'autre part :

$$f\Big(q\frac{p}{q}\Big) = f(p) = f(p\times 1) = pf(1)$$

q étant non nul, on en déduit : $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}f(1)$.

1.d) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a d'après (★) :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f(h)$$

Or f est continue en 0 donc $f(h) \underset{h\to0}{\longrightarrow} f(0) = 0$. Ainsi $f(x_0+h) \underset{h\to0}{\longrightarrow} f(x_0)$ donc f est continue en x_0, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.e) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Les rationnels étant de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, on a d'après la question **1.c)** :

$$f(u_n) = u_n f(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xf(1)$$

Or d'après **1.d)** f est continue en x, donc :

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Par unicité de la limite, il vient : $f(x) = xf(1)$.

2) D'après les questions précédentes, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en 0 vérifiant (★) alors f est une fonction linéaire (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$).

Réciproquement, si f est linéaire, elle est continue en 0 et vérifie trivialement (★).

Donc l'ensemble des fonctions cherché est l'ensemble des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Étude globale des fonctions

CHAPITRE 15

Plan

15.1 Rappels et compléments sur quelques propriétés globales des fonctions 392
15.2 Fonctions monotones 395
15.3 Fonctions continues sur un intervalle 397
15.4 Théorème de la bijection 400
Synthèse 403
Tests et exercices 404
Corrigés des exercices 408

Introduction

Le chapitre précédent étudiait les propriétés d'une fonction au voisinage d'un point. On s'intéresse désormais à des propriétés globales d'une fonction sur un intervalle. De telles propriétés mettent en jeu les valeurs de la fonction sur l'ensemble de l'intervalle.

Les principales propriétés globales abordées dans ce chapitre sont la monotonie et la continuité sur un intervalle. Elles interviennent dans les hypothèses de plusieurs grands théorèmes d'analyse. Parmi eux, le résultat le plus utilisé en ECS est le théorème de la bijection.

Le théorème de la bijection permet notamment de justifier sous certaines hypothèses sur f l'existence et l'unicité de la solution d'une équation de la forme $f(x) = a$. Il intervient également dans l'étude des fonctions réciproques et, à la fin de ce chapitre, il nous permettra d'introduire une nouvelle fonction usuelle : la fonction arc tangente.

Prérequis

- Généralités sur les suites.
- Étude locale des fonctions.

Objectifs

- Définir deux propriétés globales d'une fonction : la monotonie et la continuité sur un intervalle.
- Énoncer les grands théorèmes liés à ces propriétés globales, notamment le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

15.1 Rappels et compléments sur quelques propriétés globales des fonctions

15.1.1 Signe d'une fonction sur un ensemble

Définition – Fonction positive/négative sur un ensemble

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est **positive (resp. négative) sur** $\mathcal{D}$ lorsque f est définie sur $\mathcal{D}$ et que : $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geqslant 0$ (resp. $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leqslant 0$).

Attention, une fonction peut n'être ni positive, ni négative sur un ensemble donné. Par exemple, la fonction sinus n'est ni positive, ni négative sur $[-\pi, \pi]$: on dit qu'elle n'a pas de signe constant sur cet intervalle.

Exemples

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction sinus est négative sur $[-\pi, 0]$.

Définition – Fonction non nulle. Fonction ne s'annulant pas

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$.
- On dit que f est **non nulle sur** $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $x \in \mathcal{D}$ tel que $f(x) \neq 0$.
- On dit que f **ne s'annule pas sur** $\mathcal{D}$ lorsque, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \neq 0$.

Exemples

1. La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction cosinus est non nulle sur $[0, \pi]$ mais elle s'annule sur cet intervalle car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

15.1.2 Image d'un ensemble par une fonction

Définition – Image d'un ensemble par une fonction

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On appelle **image de** $\mathcal{D}$ **par** f, et on note $f(\mathcal{D})$, l'ensemble des réels de la forme $f(x)$ où $x \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire :

$$f(\mathcal{D}) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathcal{D},\ y = f(x)\}.$$

Exemples

1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. On a $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.
 En effet si $y \in f(\mathbb{R})$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^2$ donc $y \in [0, +\infty[$. Réciproquement, si $y \in [0, +\infty[$ alors $y = (\sqrt{y})^2$ donc $y \in f(\mathbb{R})$.
2. On a $\exp(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$.
 En effet si $y \in \exp(]0, +\infty[)$ alors il existe $x \in]0, +\infty[$ tel que $y = e^x$. $x > 0$ et exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\exp(x) > \exp(0) = 1$, donc $y \in]1, +\infty[$. Réciproquement, si $y \in]1, +\infty[$ alors $y = e^{\ln(y)}$; or $y > 1$ et ln est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ln(y) > \ln(1) = 0$, donc $\ln(y) \in]0, +\infty[$, donc $y \in \exp(]0, +\infty[)$.

15.1.3 Propriétés permettant de réduire le domaine d'étude

Remarque – Le graphe d'une fonction paire (resp. impaire) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par rapport à l'origine).

Définition – Fonction paire. Fonction impaire

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dite **paire** (resp. **impaire**) lorsque, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Exemples

1. Les fonctions cosinus et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ sont paires.
2. Les fonctions sinus et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ sont impaires.

Proposition – *Si f est une fonction impaire définie en 0 alors $f(0) = 0$.*

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Définition – Fonction périodique

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $T > 0$. Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dite **périodique de période** T lorsque :

(i) l'ensemble $\mathcal{D}$ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x + T \in \mathcal{D}$,

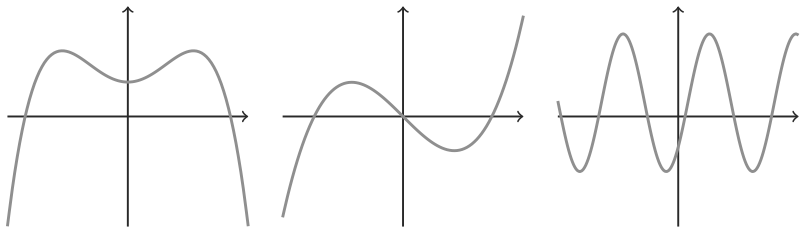
(ii) pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f(x + T) = f(x)$.

Une fonction f est dite **périodique** lorsqu'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.

Proposition – *Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est périodique de période T, alors pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $x + nT \in \mathcal{D}$ et $f(x + nT) = f(x)$.*

Exemples

1. Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
2. La fonction tangente est périodique de période π.



Fonction paire — Fonction impaire — Fonction périodique

15.1.4 Bornes d'une fonction

Dans toute la suite du cours, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition – Fonction majorée. Fonction minorée. Fonction bornée

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite :

- **majorée sur** I lorqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$.
- **minorée sur** I lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$.
- **bornée sur** I lorsqu'elle est minorée et majorée sur I.



M et *m* doivent être indépendants de *x*. Par exemple, une fonction *f* vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant x$, n'est pas nécessairement majorée.

Exemple

La fonction exponentielle est minorée sur $\mathbb{R}$ car : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant 0$.
En revanche, elle n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$ car $\exp(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et on ne peut donc pas trouver un réel M tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \leqslant M$.

Proposition – *f est bornée si et seulement $|f|$ est majorée.*

Définition – Bornes d'une fonction sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

• Si la fonction f est majorée sur I, l'ensemble $f(I)$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il possède donc une borne supérieure appelée **borne supérieure de** f **sur** I et notée $\sup_I f$.

• Si la fonction f est minorée sur I, l'ensemble $f(I)$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Il possède donc une borne inférieure appelée **borne inférieure de f sur I** et notée $\inf_I f$.

Exemple

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ admet 0 pour borne inférieure sur $\mathbb{R}_+^*$: on note donc $\inf_{]0,+\infty[} f = 0$. En revanche, f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle n'admet donc pas de borne supérieure sur cet intervalle.

15.2 Fonctions monotones

15.2.1 Définition

Définition – Monotonie d'une fonction

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite :

- **croissante sur** I lorsque : $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$,
- **strictement croissante sur** I lorsque : $\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
- **décroissante sur** I lorsque : $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$,
- **strictement décroissante** sur I lorsque : $\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- **monotone sur** I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
- **strictement monotone sur** I lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Remarques

1. Une fonction croissante est une fonction qui préserve les inégalités, et une fonction décroissante une fonction qui renverse les inégalités.
2. Une fonction peut être à la fois croissante et décroissante : elle sera alors constante.
3. Une fonction peut être ni croissante ni décroissante. La fonction sinus, par exemple, n'est ni croissante sur $\mathbb{R}$, ni décroissante sur $\mathbb{R}$
4. Une fonction strictement monotone est injective.

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Pour une fonction, le signe de $f(x+1) - f(x)$ ne donnera **jamais** l'éventuelle monotonie. Par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(2\pi x)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) = 1 + \cos(2\pi x + 2\pi) - \cos(2\pi x) = 1 > 0$$

pourtant $f(0) = 1$ et $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ donc f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples

1. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}$. Mais elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2. La fonction cosinus est strictement croissante sur $[-\pi, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Proposition – *Si f est strictement croissante sur I, alors pour tout $(x, y) \in I^2$:*

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y) \quad \text{et} \quad x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

On a un résultat analogue si f est strictement décroissante.

Démonstration

Montrons par exemple que $x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

- Si $x \leqslant y$, alors f étant strictement croissante, elle est en particulier croissante, donc on a $f(x) \leqslant f(y)$.
- La réciproque s'obtient par contraposée : si $x > y$ alors f étant strictement croissante, on a $f(x) > f(y)$. ■



La proposition précédente est fausse si on suppose seulement *f* croissante sur *I*. Par exemple, si *f* est constante (donc croissante) sur $\mathbb{R}$, on a $f(2) \leqslant f(1)$ bien que $2 > 1$.

15.2.2 Théorème de la limite monotone

Théorème – Théorème de la limite monotone

Soit f une fonction croissante sur $I =]a, b[$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

- Si f est majorée sur I, alors f admet une limite finie en b ; sinon $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si f est minorée sur I, alors f admet une limite finie en a ; sinon $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.
- En tout $x_0 \in]a, b[$, f admet une limite finie à gauche et à droite, et on a : $\lim\limits_{x_0-} f \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x_0+} f$.

On a des résultats analogues si f est décroissante sur $]a, b[$.

Démonstration

- Étudions le cas où f est majorée sur $]a, b[$. Les cas où f est non majorée, minorée ou non minorée se démontreraient de façon analogue.

 f étant majorée sur $]a, b[$, elle admet sur cet intervalle une borne supérieure, que l'on note ℓ. On a $\ell \in \mathbb{R}$, et on va montrer que $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$.

 Soit $\varepsilon > 0$. On a $\ell - \varepsilon < \ell$, or par définition, ℓ est le plus petit des majorants de $f(]a, b[)$ donc $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $f(]a, b[)$.

 Il existe donc $x_0 \in]a, b[$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_0)$. La croissance de f permet alors d'affirmer que : $\forall x \in [x_0, b[,\ \ell - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x)$.

 Enfin, ℓ étant un majorant de f, on a : $\forall x \in [x_0, b[,\ f(x) \leqslant \ell < \ell + \varepsilon$.

 Ainsi : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que : $\forall x \in [x_0, b[,\ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

 Par conséquent : $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$.
- Montrons maintenant que f admet une limite finie à gauche en tout $x_0 \in]a, b[$ (l'existence de la limite à droite est analogue).

 On note g la restriction de f à $]a, x_0[$. g est croissante sur $]a, x_0[$ et elle est majorée par $f(x_0)$ sur cet intervalle. En appliquant à g ce qu'on a démontré dans le premier point, on en déduit que g admet une limite finie en x_0, ce qui signifie que f admet une limite finie à gauche en x_0. Enfin, $\forall x \in]a, x_0[,\ f(x) \leqslant f(x_0)$, donc en passant à la limite quand $x \to x_0^-$, il vient : $\lim\limits_{x_0^-} f \leqslant f(x_0)$. ■

15.3 Fonctions continues sur un intervalle

15.3.1 Définition. Propriétés élémentaires

Définition – Fonction continue sur un intervalle

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **continue sur** I lorsqu'elle est continue en tout point de I.

Les résultats suivants sont des conséquences directes des théorèmes sur la continuité en un point présentés dans le chapitre « Étude locale des fonctions ».

Théorème – Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $f + g$ et λf sont continues sur I.
- Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.

Théorème – Composition

Soit $J \subset \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset J$, et si g est une fonction continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème – Continuité des fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales et rationnelles, la valeur absolue, les fonctions trigonométriques, le logarithme, l'exponentielle et les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple

$x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, +\infty[$. $x \mapsto \sqrt{x}$ est également continue sur $[0, +\infty[$. Donc $x \mapsto \mathrm{e}^x + 2\sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Méthode 1 Rédaction type pour les composées

On adoptera la rédaction suivante : f est continue sur I à valeurs dans J, g est continue sur J, donc $g \circ f$ est continue sur I.
On adaptera ce modèle au cas où la composition fait intervenir plus de deux fonctions.

Exemples d'application

1. Montrons que $f : x \mapsto \exp(\tan x)$ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
 $x \mapsto \tan x$ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Or $y \mapsto \exp(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
2. Montrons que $g : x \mapsto \sqrt{-\ln(1-x^2)}$ est continue sur $]-1, 1[$.
 $x \mapsto 1 - x^2$ est continue sur $]-1, 1[$ à valeurs dans $]0, 1]$,
 $y \mapsto -\ln(y)$ est continue sur $]0, 1]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$,
 $z \mapsto \sqrt{z}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
 Donc g est bien continue sur $]-1, 1[$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

La continuité de la composée $g \circ f$ fait intervenir des intervalles *a priori* différents. On a en effet besoin de la continuité de g sur l'ensemble d'arrivée de f, et non sur l'ensemble de départ de f. Ainsi la phrase « $g \circ f$ est continue sur I car composée de fonctions continues sur I » n'est juste que si $f(I) \subset I$.

Méthode 2 Continuité d'une fonction définie par morceaux

Pour démontrer la continuité d'une fonction définie par morceaux :

– on utilisera les théorèmes généraux sur chaque intervalle ouvert où la formule définissant la fonction est la même,

– on fera une étude particulière en chaque point de raccord en étudiant les limites à droite et à gauche.

Exemple d'application

Démontrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

- La fonction sin est continue sur $]-\infty, 0[$ donc f est continue sur $]-\infty, 0[$.
- La fonction $x \mapsto 1 - \cos(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc f est continue sur $]0, +\infty[$.
- Il reste à mener l'étude en 0 (point de raccord des deux formules définissant f).

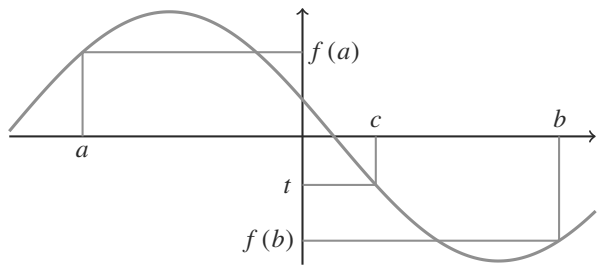
Par continuité du sinus en 0, on a $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$. Par ailleurs, par continuité du cosinus en 0, on a $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^+} f = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.

15.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème – Théorème des valeurs intermédiaires
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors pour tout réel t entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = t$.



Remarques

1. En général c n'est pas unique.
2. Plus généralement, le théorème des valeurs intermédiaires affirme que si f est continue sur I, alors toute valeur intermédiaire entre deux valeurs prises par f sur I est elle-même une valeur prise par f sur I.

Démonstration

On se place par exemple dans le cas où $f(a) < f(b)$. Soit $t \in [f(a), f(b)]$.

➜ On va construire par dichotomie deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ a_n \in [a,b],\ b_n \in [a,b] \text{ et } f(a_n) \leqslant t \leqslant f(b_n).$$

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a construit a_n et b_n vérifiant $\mathcal{P}(n)$ et on va construire a_{n+1} et b_{n+1} vérifiant $\mathcal{P}(n+1)$. On pose $c_n = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$. On a $c_n \in [a,b]$.

 (i) si $f(c_n) \leqslant t$, on pose : $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$,

 (ii) si $f(c_n) > t$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Dans les deux cas, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

➜ Ainsi construites par dichotomie, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (cf. chapitre « Généralités sur les suites réelles », page 287). Elles convergent donc vers une même limite que l'on notera c.

D'une part, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant a_n \leqslant b$. En passant à la limite, il vient : $a \leqslant c \leqslant b$.

D'autre part, f est continue sur $[a,b]$, donc f est continue en c.

D'où : $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$ et $f(b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$. Or $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) \leqslant t \leqslant f(b_n)$, donc en passant à la limite, on obtient : $f(c) \leqslant t \leqslant f(c)$ c'est-à-dire $f(c) = t$. ■

Exemple

La fonction sinus est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et on a : $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $t \in [-1,1]$, il existe donc $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin(\theta) = t$.

15.3.3 Image d'un segment par une fonction continue

Définition – Segment

On appelle **segment** tout intervalle de la forme $[a,b]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Définition – Fonction atteignant ses bornes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- Si f est majorée sur I et s'il existe $x_M \in I$ tel que $f(x_M) = \sup\limits_I f$, on dit que f **atteint sa borne supérieure sur** I ou encore que f admet un **maximum sur** I. On note alors $\max\limits_I f = \sup\limits_I f = f(x_M)$.
- Si f est minorée sur I et s'il existe $x_m \in I$ tel que $f(x_m) = \inf\limits_I f$, on dit que f **atteint sa borne inférieure sur** I ou encore que f admet un **minimum sur** I. On note alors $\min\limits_I f = \inf\limits_I f = f(x_m)$.

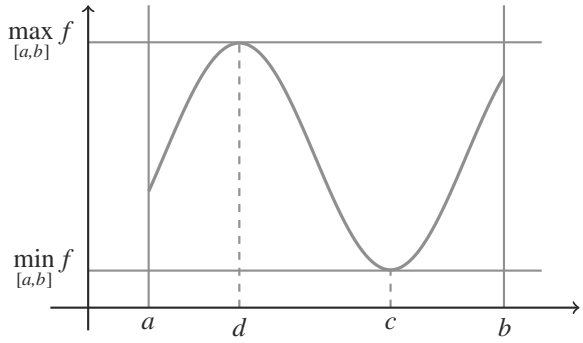
© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Soit $f : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{x}$. Alors f admet 1 pour borne supérieure et 0 pour borne inférieure sur $[1, +\infty[$. Elle atteint sa borne supérieure : $f(1) = \max_{[1,+\infty[} f$, mais elle n'atteint pas sa borne inférieure car : $\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) \neq 0$. En particulier, f est minorée mais n'admet pas de minimum.

Théorème – Image d'un segment par une fonction continue

Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ alors $f([a, b])$ est un segment.
En particulier f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes, autrement dit il existe $c \in [a, b]$ et $d \in [a, b]$ tels que : $f(c) = \min_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max_{[a,b]} f$.



Remarque – $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas majorée : le théorème ne peut pas être appliqué lorsque l'intervalle d'étude n'est pas un segment.

15.4 Théorème de la bijection

Théorème – Théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, où $f(I)$ est déterminé grâce au tableau ci-dessous,
- la bijection réciproque est elle-même continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f,
- dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de la bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes (la droite d'équation $y = x$).

f \ I	$[a, b]$	$[a, b[$	$]a, b]$	$]a, b[$
strictement croissante	$[f(a), f(b)]$	$[f(a), \lim_{b} f[$	$]\lim_{a} f, f(b)]$	$]\lim_{a} f, \lim_{b} f[$
strictement décroissante	$[f(b), f(a)]$	$]\lim_{b} f, f(a)]$	$[f(b), \lim_{a} f[$	$]\lim_{b} f, \lim_{a} f[$

Tableau donnant $J = f(I)$
lorsque f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I.

Remarque – Le théorème de la bijection permet de dresser le tableau de variation de f^{-1}. Par exemple, si f est continue et strictement décroissante sur $[a, b[$, elle réalise une bijection de $[a, b[$ sur $]\alpha, \beta] =]\lim\limits_{b} f, f(a)]$.

f^{-1} est strictement décroissante sur $]\alpha, \beta]$, et on a $\lim\limits_{\alpha} f^{-1} = b$ et $f^{-1}(\beta) = a$.

x	a	b
f	β ↘	α

x	α	β
f^{-1}	b ↘	a

Méthode 3 Rédaction type pour le théorème de la bijection

Par exemple, pour une fonction strictement croissante sur $[a, b[$, on adoptera la rédaction suivante : f est continue et strictement croissante sur $[a, b[$, $f(a) = \alpha$ et $\lim\limits_{b} f = \beta$, donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[a, b[$ sur $[\alpha, \beta[$.
On adaptera ce modèle aux diverses situations.

Exemples d'application

1. Montrons qu'il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\alpha - \ln(\alpha) = 2$.
Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par : $\forall x \in]0, 1[,\ f(x) = x - \ln(x)$.
f est dérivable sur $]0, 1[$ et : $\forall x \in]0, 1[,\ f'(x) = \frac{x-1}{x} < 0$.
f est donc continue et strictement décroissante sur $]0, 1[$, de plus $\lim\limits_{0} f = +\infty$ et $\lim\limits_{1} f = 1$. D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$.
Or $2 \in]1, +\infty[$ donc il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 2$ c'est-à-dire $\alpha - \ln(\alpha) = 2$.

2. *Un exemple de suite définie implicitement.*
On définit f sur $]0, 1]$ par : $\forall x \in]0, 1],\ f(x) = \dfrac{1}{x}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$, et on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie implicitement par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_n) = \dfrac{1}{3n}$.

• **Existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
f est dérivable sur $]0, 1]$ et : $\forall x \in]0, 1[,\ f'(x) = x^{-3}(1 - x)\mathrm{e}^{-1/x} > 0$.
Par ailleurs, on a $u\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{x} \underset{x\to0+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. Donc :
f est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, $\lim\limits_{0} f = 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$.
D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $]0, \mathrm{e}^{-1}]$.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{3n} \in]0, \mathrm{e}^{-1}]$, donc il existe un unique $u_n \in]0, 1]$ tel que $f(u_n) = \frac{1}{3n}$, qui est $u_n = f^{-1}(\frac{1}{3n})$.

• **Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est strictement croissante sur $]0, \mathrm{e}^{-1}]$ et admet pour tableau de variation :

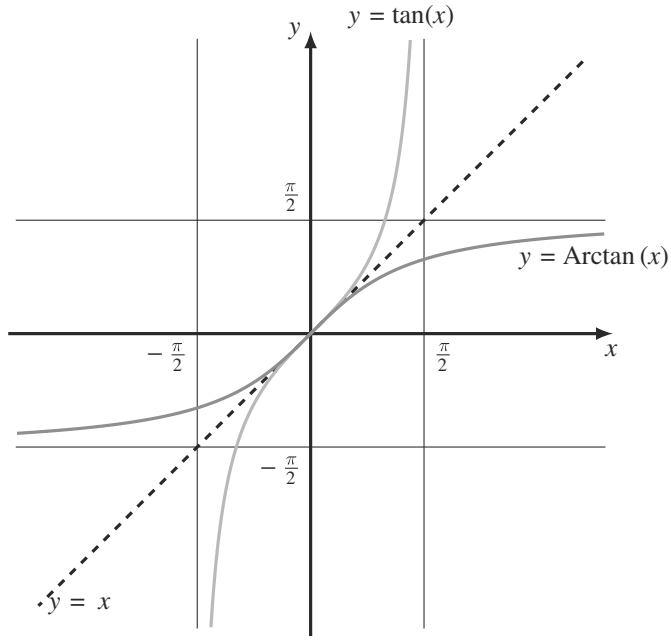
x	0	e^{-1}
f^{-1}	0 ↗	1

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3(n+1)} < \frac{1}{3n}$ donc $f^{-1}(\frac{1}{3(n+1)}) < f^{-1}(\frac{1}{3n})$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
Enfin, $\lim_0 f^{-1} = 0$ et $\frac{1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n = f^{-1}(\frac{1}{3n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

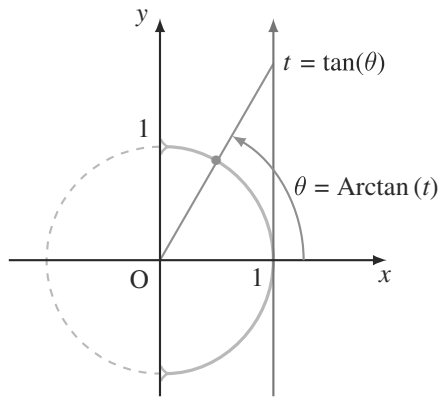
Théorème – Fonction arc tangente
La fonction tangente réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est appelée arc tangente et notée Arctan . Elle est impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et admet pour limites :

$$\lim_{-\infty} \text{Arctan} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} \text{Arctan} = \frac{\pi}{2}.$$



Remarque – Par définition d'une bijection, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\text{Arctan}\,(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{Arctan}\,(\tan(x)) = x.$$



Démonstration

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en $\pi/2$ (resp. $-\pi/2$).

D'après le théorème de la bijection, la fonction tangente réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction réciproque Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a : $\lim\limits_{-\infty}\text{Arctan} = -\pi/2$ et $\lim\limits_{+\infty}\text{Arctan} = \pi/2$.

La tangente étant impaire, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ -\tan(\text{Arctan}\,(x)) = \tan(-\text{Arctan}\,(x))$, c'est-à-dire $-x = \tan(-\text{Arctan}\,(x))$. En composant par Arctan, il vient alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}\,(-x) = -\text{Arctan}\,(x)$. Donc Arctan est impaire. ■

Synthèse

Savoirs

- théorème des valeurs intermédiaires,
- théorème de la limite monotone pour les fonctions,
- image d'un segment par une fonction continue,
- théorème de la bijection.

Savoir-faire

- montrer qu'une fonction composée est continue,
- utiliser le théorème de la bijection pour étudier une fonction réciproque.

Mots-clés

- Fonction paire/impaire/périodique,
- fonction majorée/minorée/bornée,
- monotonie d'une fonction,
- fonction continue sur un intervalle,
- fonction Arctan.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

15.1 Parmi les théorèmes suivants : limite monotone, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment et théorème de la bijection, quels sont ceux dont les hypothèses exigent :
a) la continuité de la fonction,
b) la monotonie de la fonction,
c) la stricte monotonie de la fonction ?

15.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle est la propriété de la fonction f qui permet de justifier l'équivalence suivante ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \ \Leftrightarrow\ f(x) \leqslant f(y)$$

15.3 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur I. Sur quel ensemble a-t-on besoin de la continuité de g pour obtenir la continuité de $g \circ f$ sur I ?

15.4 Recherche d'exemples

a) Donner un exemple d'une fonction définie sur un segment et non bornée.

b) Trouver une fonction f continue et croissante sur $[0, 1]$ mais non bijective de $[0, 1]$ sur $f([0, 1])$.

c) Donner un exemple d'une fonction bornée sur un intervalle I mais n'admettant ni maximum, ni minimum sur cet intervalle.

d) Trouver une fonction f continue sur $[0, +\infty[$ qui ne soit ni majorée, ni minorée sur cet intervalle.

15.5 Vrai ou faux ?

a) Si f est bornée sur $[0, +\infty[$ alors f admet une limite en $+\infty$.

b) Toute fonction bijective est continue.

c) Si f est continue sur $]0, 1]$ alors elle est bornée sur tout intervalle $[a, 1]$ où $a \in]0, 1]$.

d) L'égalité $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ est vraie pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

15.6 QCM

Chaque question admet au moins une bonne réponse.

1) Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe :
a) au plus un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \max_{[a,b]} f$,
b) un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \max_{[a,b]} f$,
c) au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \max_{[a,b]} f$.

2) $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est bijective de $[0, +\infty[$ sur :
a) $[0, 1]$,
b) $]0, 1]$,
c) $[0, 1[$.

3) Si $f : [0, +\infty[$ est strictement croissante, alors :
a) f tend vers $+\infty$ en $+\infty$,
b) f n'est pas majorée,
c) f est minorée.

4) Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors :
a) $f([a, b])$ est un segment,
b) $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert,
c) $f([a, +\infty[)$ est une demi-droite.

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 406.

■ Fonctions monotones

15.7 ◎

Préciser le domaine de définition et dresser les tableaux de variations des fonctions définies par les formules suivantes (aucun calcul de dérivée n'est indispensable, ni souhaité) :

a) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{-x} - 1)$,

b) $g(x) = \exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$,

c) $h(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

■ Continuité sur un intervalle et théorème des valeurs intermédiaires

15.8

Montrer que les formules suivantes définissent des fonctions continues sur leur ensemble de définition (que l'on déterminera) :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1 + \cos(x)}{x^2 + x - 2}$,

b) $g(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{3 + 2x - x^2}\right)$,

c) $h(x) = (x^2 + x + 1)^{\ln(x)}$,

d) $k(x) = \cos\left[x\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)\right]$.

15.9 ◎

Montrer que les formules suivantes définissent des fonctions continues sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\cos(x))}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} -\mathrm{Arctan}\,(\ln(1-x)) & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 1 \\ \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln(x^2+x-1) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

15.10 ◎

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

15.11

Un marathonien parcourt une distance de 12km en une heure. Sa vitesse n'est pas supposée constante.

On note $f : [0,1] \to [0,12]$ la fonction telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t)$ soit la distance déjà parcourue à l'instant t. On supposera f continue sur $[0,1]$.

a) À l'aide de la fonction $t \mapsto f(t+\frac{1}{2}) - f(t)$ définie sur $[0,\frac{1}{2}]$, montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure durant lequel le marathonien parcourt exactement 6km.

b) Montrer qu'il existe un intervalle de 20mn pendant lequel le marathonien parcourt exactement 4km.

■ **Image d'un segment par une fonction continue**

15.12

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

15.13 ◎

a) Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ admettant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.

b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant $+\infty$ pour limite en $-\infty$ et en $+\infty$.

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

15.14 ◎

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue sur $[0,1]$ et telle que :

$$\forall\, x \in]0,1]\ f(x) < x.$$

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Soit $a \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $k < 1$ tel que $\forall\, x \in [a,1]\ f(x) \leqslant kx$.

c) Existe-t-il $k < 1$ tel que $\forall\, x \in [0,1]\ f(x) \leqslant kx$?

■ **Théorème de la bijection**

15.15 ◎

a) Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle à préciser.

On note Arcsin *la bijection réciproque.*

b) Donner le tableau de variation de Arcsin ainsi que l'allure de sa courbe représentative.

c) Que valent Arcsin (0), Arcsin $(\frac{1}{2})$ et Arcsin $(\frac{\sqrt{3}}{2})$?

d) En utilisant l'équivalent usuel $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$, montrer que $\mathrm{Arcsin}\,(x) \underset{0}{\sim} x$.

15.16 ◎

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Déterminer f^{-1}.

15.17

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels tels que :

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$$

Discuter en fonction de m le nombre de solutions de l'équation :

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = m.$$

15.18 ◎

On pose : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x\ln x$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, il existe un unique réel $u(t) \in]0,+\infty[$ tel que $f(u(t)) = \dfrac{1}{t}$.

b) Montrer que la fonction u ainsi définie, est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Donner le tableau de variation de u.

■ **Suites définies implicitement**

15.19

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x - x$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = n$ admet deux solutions distinctes. On note a_n la solution positive.

c) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

15.20

On pose : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = x(x + \sqrt{1 + x^2})$.

a) Dresser le tableau de variation de f et montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $u_n \in [0, +\infty[$ tel que $u_n(u_n + \sqrt{1 + u_n^2}) = \mathrm{e}^n$.

c) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercices d'approfondissement

15.21 Oral HEC 2006 ◎

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_n(x) = x^n + x - 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$ (on définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$).

b) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel que l'on précisera.

d) Montrer qu'à partir d'un certain rang $1 - x_n \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.

15.22 D'après oral ESCP 2008

Soit f une fonction définie et continue sur $[-1, 1]$.

a) Soit $u \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction h_u définie sur $[-1, 1]$ par : $\forall x \in [-1, 1],\ h_u(x) = f(x) + ux$, est bornée et atteint ses bornes.

Soient M la fonction qui à tout réel u associe le maximum de la fonction h_u sur $[-1, 1]$ et $E(u)$ l'ensemble des éléments de $[-1, 1]$ en lesquels h_u atteint son maximum $M(u)$.

b) Déterminer la fonction M et l'ensemble $E(u)$ lorsque $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$.

On revient au cas général.

c) Soient u et v réels, $x \in E(u)$ et $y \in E(v)$. Montrer que l'on a : $(v - u)x \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v - u)y$.

En déduire que : $\left|M(v) - M(u)\right| \leqslant |v - u|$.

d) En déduire que M est continue sur $\mathbb{R}$.

Indications

15.7

c) On peut remarquer que :

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

15.9 Toutes les fonctions de l'exercice sont définies par morceaux.

En chaque point de jonction (0 pour f et g, 1 pour h, 0 et 1 pour k), il faut mener une étude particulière, le plus souvent en déterminant les limites à droite et à gauche.

En dehors de ces points, on utilisera les théorèmes généraux (opérations algébriques et composition).

15.10 Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \in [a, b] \mapsto f(x) - x$.

15.13

a) À l'aide de la définition de la limite, montrer que f est bornée sur un voisinage $[A, +\infty[$ de $+\infty$, puis montrer que f est bornée sur $[0, A]$.

b) Montrer qu'il existe un voisinage $[A, +\infty[$ de $+\infty$ et un voisinage $]-\infty, B]$ de $-\infty$ tels que :

$$\forall x \in]-\infty, B] \cup [A, +\infty[,\ f(x) \geqslant f(0) + 1$$

Montrer ensuite que f admet un minimum sur $[B, A]$ et conclure.

15.14

a) On pourra montrer dans un premier temps que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

b) Montrer que la fonction $g : x \in [a, 1] \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet un maximum sur $[a, 1]$.

c) Chercher une fonction f vérifiant les hypothèses et telle que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

15.15

d) On pourra utiliser le fait que $\mathrm{Arcsin}\,(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (à justifier) et la composition à droite pour les équivalents.

15.16

b) Pour exprimer f^{-1} on résoudra l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x afin d'exprimer x en fonction de y.

15.18 On introduira une fonction g bijective construite à partir de f et telle que :

$$\forall t > 0,\ u(t) = g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right).$$

15.21

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1}(x_n) < P_{n+1}(x_{n+1})$$

c) Montrer dans un premier temps que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in]0, 1]$ puis, en raisonnant par l'absurde, prouver que $\ell = 1$.

d) S'inspirer de **b)**. On pourra utiliser l'inégalité :

$$\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leqslant u$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

15.1

a) Théorèmes dont les hypothèses exigent la continuité de la fonction : théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment et théorème de la bijection.
b) Théorème dont les hypothèses exigent la monotonie de la fonction : limite monotone.
c) Théorème dont les hypothèses exigent la stricte monotonie de la fonction : théorème de la bijection.

15.2

Cette équivalence est justifiée lorsque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

15.3

f étant continue sur I, on a besoin de la continuité de g sur $f(I)$ pour obtenir la continuité de $g \circ f$ sur I.

15.4

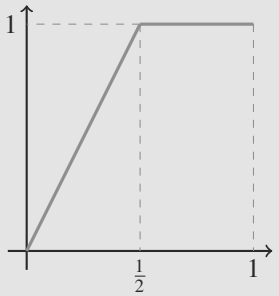
a) La fonction f définie par la relation suivante sur le segment $[0, 1]$ n'est pas bornée sur $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En effet, $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

b) La fonction f définie par la relation suivante est continue et croissante sur $[0, 1]$ mais non bijective de $[0, 1]$ sur $f([0, 1])$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



En effet $f(\frac{1}{2}) = f(1)$, donc f n'est pas injective.

c) La fonction $f : x \in]0, 1[\mapsto x$ est bornée sur $I =]0, 1[$ mais n'admet ni maximum, ni minimum sur I. En effet, f admet 1 pour borne supérieure sur I et 0 pour borne inférieure sur I, mais elle n'atteint aucune de ces deux bornes.

d) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par la relation : $f(x) = x\cos(x)$.
On a $f(2n\pi) = 2n\pi \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc f n'est pas majorée sur $[0, +\infty[$.
Par ailleurs, $f((2n + 1)\pi) = -(2n + 1)\pi \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc f n'est pas minorée sur $[0, +\infty[$.

15.5

a) **FAUX :** par exemple la fonction $x \in [0, +\infty[\mapsto \sin(x)$ est bornée sur $[0, +\infty[$ mais n'admet pas de limite en $+\infty$.

b) **FAUX :** la fonction f définie par la relation suivante est bijective de $[0, 2]$ sur $[0, 1] \cup]2, 3]$ mais n'est pas continue en 1 :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 + x & \text{si } x \in]1, 2] \end{cases}$$

En effet $\lim\limits_{1^+} f = 2 \neq f(1)$.

c) **VRAI :** soit $a \in]0, 1]$, f étant continue sur $]0, 1]$, elle est *a fortiori* continue sur le segment $[a, 1]$ et donc bornée sur ce segment.

d) **FAUX :** par exemple

$$\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \text{Arctan}\,(1) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$$

$\text{Arctan}\,(\tan(x))$ est l'unique $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = \tan(x)$, donc l'égalité $\text{Arctan}\,(\tan(x)) = x$ est vraie uniquement pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (En revanche, on a toujours $\text{Arctan}\,(\tan(x)) = x + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ qui dépend de x).

15.6

1) Réponse **c)**.
f est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle est notamment majorée sur $[a, b]$ et elle atteint sa borne supérieure en **au moins** un point. Ce point n'est pas nécessairement unique : par exemple, la fonction cosinus atteint son maximum sur $[0, 2\pi]$ en 0 et en 2π.

2) Réponse **b)**.
$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Donc, d'après le théorème de la bijection, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$.

3) Réponse **c)**.
Si f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, alors elle est minorée par $f(0)$ sur $[0, +\infty[$ (c'est également vraie si elle est seulement croissante).
Les réponses a et b sont fausses : par exemple $x \in [0, +\infty[\mapsto 1 - \dfrac{1}{1 + x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle admet 1 pour limite en $+\infty$ et elle est majorée par 1 sur $[0, +\infty[$.

4) Réponse **a)**.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment, donc $f([a, b])$ est un segment.
La réponse b est fausse : on a par exemple :

$$\cos(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]0, 1].$$

La réponse c est fausse : par exemple :

$$\cos([0, +\infty[) = [-1, 1].$$

15.7

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\mathrm{e}^{-x} - 1 > 0 \iff x < 0$. Donc f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[$.

• **Variations de f :** Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f^2$, on a :

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow -x > -y \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^{-x} > \mathrm{e}^{-y} \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^{-x} - 1 > \mathrm{e}^{-y} - 1 \\ &\Rightarrow \ln(\mathrm{e}^{-x} - 1) > \ln(\mathrm{e}^{-y} - 1) \end{aligned}$$

La seconde implication se justifie par la croissance stricte de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, et la quatrième par celle de ln sur $]0, +\infty[$.

On obtient donc que f est strictement décroissante sur $\mathcal{D}_f$.

• **Limites aux bornes :**

$\mathrm{e}^{-x} - 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{-x} - 1) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par ailleurs, $\mathrm{e}^{-x} - 1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0^+$ donc $f(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$.

x	$-\infty$		0
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

b) g est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• **Variations de g :** pour tous x et y dans $]1, +\infty[$

$$\begin{aligned} 1 < x < y &\Rightarrow 0 > 1 - x > 1 - y \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-y} \\ &\Rightarrow \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) < \exp\left(\frac{1}{1-y}\right) \end{aligned}$$

La dernière implication se justifie par la stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

On obtient donc que g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. On obtient par un raisonnement analogue que g est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$. **Attention :** en aucun cas, on ne peut en déduire que g est strictement croissante sur $\mathcal{D}_g$.

• **Limites aux bornes :** $\frac{1}{1-x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $g(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par ailleurs, $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$ donc $g(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Enfin, $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} -\infty$ donc $g(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	1	↗	$+\infty$ \| 0	↗	1

Remarque – On constate que g n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) Le signe de $\frac{x+1}{x-1}$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$	$-$		0	$+$			$+$
$x-1$	$-$			$-$	0		$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$		0	$-$	‖		$+$

Donc h est définie sur $\mathcal{D}_h =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

• **Variations de h :** pour tout $x \in \mathcal{D}_h$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

Pour tous x et y dans $]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} 1 < x < y &\Rightarrow 0 < x - 1 < y - 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{y-1} < \frac{1}{x-1} \\ &\Rightarrow 1 + \frac{2}{y-1} < 1 + \frac{2}{x-1} \\ &\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{2}{y-1}\right) < \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \end{aligned}$$

La dernière implication se justifie par la stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$.

On obtient donc que h est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. On obtient par un raisonnement analogue que h est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$.



En aucun cas, on ne peut en déduire que h est strictement décroissante sur $\mathcal{D}_h$.

• **Limites aux bornes :** $1 + \frac{2}{x-1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $h(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, $\frac{x+1}{x-1} \underset{x\to -1^-}{\longrightarrow} 0^+$ donc $h(x) \underset{x\to -1^-}{\longrightarrow} -\infty$.

Enfin, $1 + \frac{2}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $h(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h(x)$	0	↘	$-\infty$ \|		$+\infty$	↘	0

Remarque – On constate que h n'est pas strictement décroissante sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

15.8

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ donc f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

La fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - 1$ et la fonction cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathcal{D}_f$. De plus la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 + x - 2$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$. Donc par somme puis quotient, f est continue sur $\mathcal{D}_f$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ donc $3 + 2x - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3$. Ainsi, g est définie sur $\mathcal{D}_g = [-1, 3]$.

$x \mapsto 3 + 2x - x^2$ est continue sur $\mathcal{D}_g$ car polynomiale et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

$y \mapsto \sqrt{y}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Arctan est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc par composée, g est continue sur $\mathcal{D}_g$.

c) $(x^2 + x + 1)^{\ln(x)} = \exp(\ln(x)\ln(x^2 + x + 1))$. Le discriminant de l'équation $x^2 + x + 1$ est $\Delta = -3$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 > 0$. Ainsi h est définie sur $\mathcal{D}_h =]0, +\infty[$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$x \mapsto x^2+x+1$ est continue sur $\mathcal{D}_h$ car polynomiale et à valeurs dans $]0,+\infty[$.
Or ln est continue sur $]0,+\infty[$, donc par composée, $x \mapsto \ln(x^2+x+1)$ est continue sur $\mathcal{D}_h$.
Par produit, $x \mapsto \ln(x)\ln(x^2+x+1)$ est continue sur $\mathcal{D}_h$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Or exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composée, h est continue sur $\mathcal{D}_h$.

d) $\ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ donc k est définie sur $\mathcal{D}_k = [1,+\infty[$.
ln est continue sur $\mathcal{D}_k$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Or $y \mapsto \sqrt{y}+1$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc par composée $x \mapsto \sqrt{\ln x}+1$ est continue sur $\mathcal{D}_k$.
Ensuite, par produit, $x \mapsto x(\sqrt{\ln x}+1)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Or cos est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composée, k est continue sur $\mathcal{D}_k$.

15.9

a) • $x \mapsto 1+x$ est continue sur $]-\infty,0[$ donc f est continue sur $]-\infty,0[$.
• exp est continue sur $]0,+\infty[$ donc f est continue sur $]0,+\infty[$.
• Il reste à mener l'étude en 0 car c'est le point de raccord des deux formules définissant f : $1+x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $f(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1$ et $e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$. Donc $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^+} f = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) • $x \mapsto \dfrac{2(1-\cos(x))}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi g est continue sur $\mathbb{R}^*$.
• Par ailleurs, $1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$ donc $\dfrac{2(1-\cos(x))}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = g(0)$, ce qui assure la continuité de g en 0.
Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$.
Remarque : g est le prolongement par continuité de la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{2(1-\cos(x))}{x^2}$ en 0.

c) • $x \mapsto 1-x$ est continue sur $]-\infty,1[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$; ln est continue sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; Arctan est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, h est continue sur $]-\infty,1[$.
• La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est continue sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; Arctan est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, h est continue sur $]1,+\infty[$.
• Étude en 1 : $\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty$ et $-\text{Arctan}(y) \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc par composition de limites, $h(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.
$\dfrac{1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\text{Arctan}(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc par composition de limites, $h(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi $\lim\limits_{1^-} h = \lim\limits_{1^+} h = \dfrac{\pi}{2} = h(1)$ donc h est continue en 1.
Finalement, h est continue sur $\mathbb{R}$.

d) • sin est continue sur $]-\infty,0[$ donc k est continue sur $]-\infty,0[$.
• $x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$ est continue sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; exp est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, k est continue sur $]0,1[$.
• $x \mapsto x^2+x-1$ est continue sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$ (en effet $\forall x > 1,\ x^2+x-1 > x^2 > 1$) ; ln est continue sur $]1,+\infty[$. Donc par composée, k est continue sur $]1,+\infty[$.
• Étude en 0 : $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $k(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$.
$\dfrac{1}{x(x-1)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $k(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
$\lim\limits_{0^-} k = \lim\limits_{0^+} k = 0 = k(0)$ donc k est continue en 0.
• Étude en 1 : $\dfrac{1}{x(x-1)} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $k(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.
$x^2+x-1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$ et $\ln(y) \underset{y\to 1}{\longrightarrow} 0$ donc $k(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$.
$\lim\limits_{1^-} k = \lim\limits_{1^+} k = 0 = k(1)$ donc k est continue en 1.
Finalement, k est continue sur $\mathbb{R}$.

15.10

Soit $g : x \in [a,b] \mapsto f(x)-x$. Il s'agit de montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c)=0$.
f est continue sur $[a,b]$ donc g l'est également.
On a $a \leqslant f(a) \leqslant b$ donc $0 \leqslant g(a) \leqslant b-a$.
De plus $a \leqslant f(b) \leqslant b$ donc $a-b \leqslant g(b) \leqslant 0$.
Ainsi 0 est entre $g(a)$ et $g(b)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $g(c)=0$ c'est-à-dire $f(c)=c$.

15.11

a) Soit $g : t \in [0,\frac{1}{2}] \mapsto f(t+\frac{1}{2})-f(t)$. g est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$ car f est continue sur $[0,1]$.
On a $g(0)+g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})-f(0)+f(1)-f(\frac{1}{2}) = f(1)-f(0) = 12-0 = 12$. Ainsi le milieu du segment d'extrémités $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ est 6, donc 6 est entre $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [0,\frac{1}{2}]$ tel que $g(c)=6$ c'est-à-dire $f(c+\frac{1}{2})-f(c)=6$. Cela signifie que la distance parcourue pendant l'intervalle d'une demi-heure $[c,c+\frac{1}{2}]$ est exactement de 6km.

b) Soit $h : t \in [0,\frac{2}{3}] \mapsto f(t+\frac{1}{3})-f(t)$. h est continue sur $[0,\frac{2}{3}]$ car f est continue sur $[0,1]$.
On a $h(0)+h(\frac{1}{3})+h(\frac{2}{3}) = f(1)-f(0) = 12$. Par conséquent, il est impossible que les trois réels $h(0)$, $h(\frac{1}{3})$ et $h(\frac{2}{3})$ soient tous strictement supérieurs à 4 ou tous strictement inférieurs à 4. Donc 4 est entre deux de ces réels : on peut supposer sans perte de généralité que 4 est entre $h(0)$ et $h(\frac{1}{3})$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $c \in [0,\frac{1}{3}]$ tel que $h(c)=4$ c'est-à-dire $f(c+\frac{1}{3})-f(c)=4$. Cela signifie que la distance parcourue pendant l'intervalle de 20mn $[c,c+\frac{1}{3}]$ est exactement de 4km.

15.12

f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall y \in \mathbb{R},\ m \leqslant f(y) \leqslant M$.

• Montrons que $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :
$$m \leqslant f(g(x)) \leqslant M.$$
Donc $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

• Montrons que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
g est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est en particulier continue sur le segment $[m, M]$. Par conséquent, g est bornée sur $[m, M]$ c'est-à-dire : il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall x \in [m, M],\ \lambda \leqslant g(x) \leqslant \mu.$$
Or $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \in [m, M]$ donc :
$$\forall y \in \mathbb{R},\ \lambda \leqslant g(f(y)) \leqslant \mu.$$
Donc $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

15.13

a) Soit ℓ la limite finie de f en $+\infty$. Par définition de la limite, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall x \in [A, +\infty[,\ \ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$$
Ainsi f est bornée sur $[A, +\infty[$.
Par ailleurs, f est continue sur $[0, +\infty[$ donc notamment sur le segment $[0, A]$. Par conséquent, f est également bornée sur $[0, A]$.
En conclusion, f est bornée sur $[0, +\infty[$.

b) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par définition de la limite appliquée avec le réel $f(0) + 1$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in [A, +\infty[,\ f(x) \geqslant f(0) + 1$$
Nécessairement, on a $0 \notin [A, +\infty[$ donc $A > 0$.

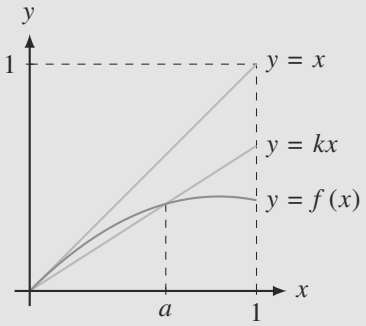
De même, de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on déduit qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in]-\infty, B],\ f(x) \geqslant f(0) + 1$$
Nécessairement, on a $0 \notin]-\infty, B]$ donc $B < 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur le segment $[B, A]$. Ainsi f est bornée sur $[B, A]$ et elle y atteint ses bornes. Il existe donc $c \in [B, A]$ tel que :
$$\forall x \in [B, A],\ f(x) \geqslant f(c)$$
Comme $0 \in [B, A]$, on a : $f(0) \geqslant f(c)$, d'où :
$$\forall x \in]-\infty, B] \cup [A, +\infty[,\ f(x) \geqslant f(0) + 1 \geqslant f(c)$$
Finalement, il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant f(c)$. Donc f admet $f(c)$ pour minimum sur $\mathbb{R}$.

15.14

a) f étant à valeurs dans $[0, 1]$, on a grâce à l'hypothèse :
$$\forall x \in]0, 1],\ 0 \leqslant f(x) < x$$
On en déduit par encadrement que : $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$. Or f est continue sur $[0, 1]$ donc en 0, d'où :
$$f(0) = \lim_{0^+} f = 0.$$

b) f est continue sur $[0, 1]$ donc sur $[a, 1]$ et comme $a > 0$, on a : $\forall x \in [a, 1],\ x \neq 0$. Donc la fonction $g : x \in [a, 1] \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est continue sur le segment $[a, 1]$.
Ainsi g est bornée sur $[a, 1]$ et elle y atteint ses bornes.
En particulier il existe $c \in [a, 1]$ tel que :
$$(\bigstar) :\ \forall x \in [a, 1],\ g(x) \leqslant g(c)$$
Or l'hypothèse faite sur f donne $f(c) < c$, et comme $c > 0$, il vient : $g(c) < 1$. En notant $k = g(c)$, ($\bigstar$) devient :
$$\forall x \in [a, 1],\ \frac{f(x)}{x} \leqslant k$$
Tout élément de $[a, 1]$ étant positif, il vient :
$$\forall x \in [a, 1],\ f(x) \leqslant kx.$$



c) Considérons la fonction :
$$f : x \in [0, 1] \mapsto \sin(x) \in [0, 1]$$
La fonction $\varphi : x \in [0, 1] \mapsto x - f(x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall x \in]0, 1],\ \varphi'(x) = 1 - \cos(x) > 0$. Donc φ est strictement croissante sur $[0, 1]$. Donc :
$$\forall x \in]0, 1], \varphi(0) < \varphi(x)$$
Ce qui donne :
$$\forall x \in]0, 1], f(x) < x$$
Ainsi f vérifie les hypothèses de l'énoncé.
S'il existait $k < 1$ tel que $f(x) \leqslant kx$ pour tout $x \in [0, 1]$, on aurait :
$$\forall x \in]0, 1],\ \frac{\sin(x)}{x} \leqslant k$$
Or $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ donc par passage à la limite, on aurait $1 \leqslant k < 1$: absurde.
Conclusion : en général, il n'existe pas $k < 1$ tel que $\forall x \in [0, 1]$ $f(x) \leqslant kx$.

15.15

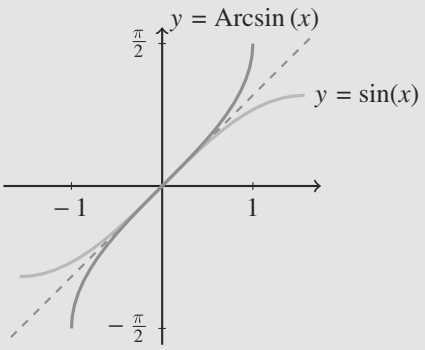
a) La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. D'après le théorème de la bijection, la fonction sinus réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$ (autrement dit la fonction $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ est bijective).

b) Le théorème de la bijection nous indique également que Arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et que sa courbe est obtenue à partir de celle de la restriction de sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par symétrie par rapport à la première bissectrice des axes.
Tableau de variation :

x	-1		1
Arcsin (x)	$-\pi/2$	↗	$\pi/2$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Courbe représentative :



c) $\text{Arcsin}\,(0)$ est par définition l'unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = 0$. Donc $\text{Arcsin}\,(0) = 0$.
Ensuite $\text{Arcsin}\,(\frac{1}{2})$ est l'unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$. Donc $\text{Arcsin}\,(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.
Enfin $\text{Arcsin}\,(\frac{\sqrt{3}}{2})$ est l'unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\text{Arcsin}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

d) On sait que $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$. Or d'après le théorème de la bijection Arcsin est continue sur $[-1, 1]$, donc :

$$\text{Arcsin}\,(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \text{Arcsin}\,(0) = 0$$

Donc par composition à droite pour les équivalents :

$$\sin(\text{Arcsin}\,(x)) \underset{0}{\sim} \text{Arcsin}\,(x)$$

Mais $\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\text{Arcsin}\,(x)) = x$ d'où :

$$x \underset{0}{\sim} \text{Arcsin}\,(x)$$

15.16

a) Notons d'abord que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

Par ailleurs, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{-\infty}{\sim} -\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} = -1$ donc $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$.
Finalement, on a : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{-\infty} f = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$, donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &\Leftrightarrow y(e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x} \\ &\Leftrightarrow y(e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1 \\ &\Leftrightarrow (1 - y)e^{2x} = 1 + y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \quad \text{car } y \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \end{aligned}$$

On remarquera que $\dfrac{1 + y}{1 - y} > 0$ car $y \in]-1, 1[$.
On obtient : $\forall y \in]-1, 1[,\ f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + y}{1 - y}\right)$.

15.17

On pose $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et on définit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}$$

f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - a_k)^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur **chaque intervalle** où elle est définie.
Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		a_1		$a_2 \ldots a_n$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$\ldots$		$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\ldots$	$\searrow$	$+\infty$
		$-\infty$		$-\infty$			0

Les différentes limites s'obtiennent en remarquant que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $x \mapsto \dfrac{1}{x - a_k}$ a pour limite 0 en $\pm\infty$, $-\infty$ en a_k^-, $+\infty$ en a_k^+ et a une limite finie en a_j pour $j \neq k$.

Ainsi f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, a_1[$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{a_1^-} f = -\infty$ donc d'après le théorème de la bijection f induit une bijection de $]-\infty, a_1[$ sur $]-\infty, 0[$.
De même, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, f induit une bijection de $]a_{k-1}, a_k[$ sur $]-\infty, +\infty[$.
Enfin, f induit une bijection de $]a_n, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

Soit $m \in \mathbb{R}$. De ce qui précède, on déduit que :
• si $m > 0$: alors l'équation $f(x) = m$ admet une et une seule solution dans chacun des intervalles $]a_{k-1}, a_k[$ pour $k \in [\![2, n]\!]$ et dans $]a_n, +\infty[$, et aucune solution dans $]-\infty, a_1[$. Donc si $m > 0$, l'équation $f(x) = m$ admet exactement n solutions distinctes.

• si $m = 0$: alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans chacun des intervalles $]a_{k-1}, a_k[$ pour $k \in [\![2, n]\!]$, et aucune solution dans $]-\infty, a_1[$ et $]a_n, +\infty[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement $n - 1$ solutions distinctes.

• si $m < 0$: alors l'équation $f(x) = m$ admet une et une seule solution dans chacun des intervalles $]a_{k-1}, a_k[$ pour $k \in [\![2, n]\!]$ et dans $]-\infty, a_1[$ et aucune solution dans $]a_n, +\infty[$. Donc si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ admet exactement n solutions distinctes.

15.18

a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \ln(x) + 1$$

f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et s'annule en e^{-1}, on en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $[e^{-1},+\infty[$, $f(e^{-1}) = -e^{-1}$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc d'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de $[e^{-1},+\infty[$ sur $[-e^{-1},+\infty[$.

Or pour tout $t > 0$, on a $\dfrac{1}{t} \in]0,+\infty[\subset [-e^{-1},+\infty[$, donc il existe unique réel dans $[e^{-1},+\infty[$, que nous noterons $u(t)$, tel que $f(u(t)) = \dfrac{1}{t}$.

f prenant des valeurs négatives sur $]0,e^{-1}[$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{t}$ n'a pas de solution dans $]0,e^{-1}[$.

Par conséquent, pour tout $t > 0$, il existe un unique $u(t) \in]0,+\infty[$ tel que $f(u(t)) = \dfrac{1}{t}$.

b) Notons g la bijection de $[e^{-1},+\infty[$ sur $[-e^{-1},+\infty[$ induite par f. On a :

$$\forall t > 0, u(t) = g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$$

Or d'après le théorème de la bijection, g^{-1} est continue sur $[-e^{-1},+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$, on en déduit par composition que u est continue sur $]0,+\infty[$.

c) • D'après le théorème de la bijection, g^{-1} est strictement monotone sur $[-e^{-1},+\infty[$, de même sens de variations que f sur $[e^{-1},+\infty[$. Donc g^{-1} est strictement croissante sur $[-e^{-1},+\infty[$.

Pour tout $(s,t) \in]0,+\infty[^2$ tel que $s < t$, on a : $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{s}$, donc $g^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right) < g^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)$, c'est-à-dire $u(t) < u(s)$. Par conséquent, u est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

• On a $\dfrac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, or $g^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition de limites : $u(t) = g^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Par ailleurs, $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or g^{-1} étant continue sur $[-e^{-1},+\infty[$, il vient : $u(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} g^{-1}(0)$. Comme $f(1) = 0$, on a : $g^{-1}(0) = 1$.

On peut alors donner le tableau de variation de u :

t	0		$+\infty$
$u(t)$	‖ $+\infty$	↘	1

15.19

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1$$

f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0 : on en déduit le signe de $f'(x)$.

Par ailleurs, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $f(0) = 1$, donc d'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

Or, pour tout $n \geqslant 2$, on a $n \in [1,+\infty[$, donc il existe un unique $a_n \in [0,+\infty[$ tel que $f(a_n) = n$. Comme $f(0) = 1$, on a $a_n \in]0,+\infty[$.

De même, f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$, $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $f(0) = 1$, donc f réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur $[1,+\infty[$.

Donc pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $b_n \in]-\infty,0]$ tel que $f(b_n) = n$. Comme $f(0) = 1$, on a $b_n \in]-\infty,0[$ et donc $b_n \neq a_n$.

On a donc démontré que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = n$ admet deux solutions distinctes : a_n et b_n.

c) Notons g la bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ induite par f. D'après le théorème de la bijection, g^{-1} est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Le tableau de variation de g^{-1} est :

x	1		$+\infty$
$g^{-1}(x)$	0	↗	$+\infty$

Pour tout $n \geqslant 2$, on a $a_n = g^{-1}(n)$. De $n < n+1$, on déduit que :

$$\forall n \geqslant 2,\ a_n = g^{-1}(n) < g^{-1}(n+1) = a_{n+1}$$

et la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

Enfin, de $\lim\limits_{+\infty} g^{-1} = +\infty$, on déduit : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

15.20

a) $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$, or $y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$. Ainsi f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = x + \sqrt{1 + x^2} + x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$
$$\geqslant \sqrt{1 + x^2} > 0$$

D'où le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$

f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^n \in [0, +\infty[$. Or f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, donc il existe un unique $u_n \in [0, +\infty[$ tel que $f(u_n) = e^n$, c'est-à-dire :

$$u_n(u_n + \sqrt{1 + u_n^2}) = e^n$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = f^{-1}(e^n)$. Or d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De $e^n < e^{n+1}$, on déduit donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = f^{-1}(e^n) < f^{-1}(e^{n+1}) = u_{n+1}$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Enfin, $e^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$ par conséquent $u_n = f^{-1}(e^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

15.21

a) P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, 1[$, et $\forall x \in]0, 1[$, $P_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.
Ainsi P_n est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$, $\lim\limits_{0} P_n = -1$ et $\lim\limits_{1} P_n = 1$. D'après le théorème de la bijection, P_n réalise donc une bijection de $]0, 1[$ sur $]-1, 1[$.
Or $0 \in]-1, 1[$, donc il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1$$

Or $x_n \in]0, 1[$, donc $x_n^{n+1} = x_n.x_n^n < x_n^n$ et :

$$P_{n+1}(x_n) < x_n^n + x_n - 1$$

Mais $x_n^n + x_n - 1 = P_n(x_n) = 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$ donc :

$$P_{n+1}(x_n) < P_{n+1}(x_{n+1})$$

Or x_n et x_{n+1} sont deux éléments de $]0, 1[$ et P_{n+1} est strictement croissante sur $]0, 1[$, donc $x_n < x_{n+1}$. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1, donc d'après le théorème de limite monotone, elle converge. Soit ℓ sa limite.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < 1$ donc par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc $x_0 \leqslant \ell$, donc $\ell \in]0, 1]$.
Supposons que $\ell \in]0, 1[$. Par définition de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a : $(\bigstar)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n + x_n - 1 = 0$.
Or $x_n^n = \exp(n \ln(x_n))$ et $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell) < 0$ donc $n \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'où $x_n^n + x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - 1$, mais $\ell - 1 < 0$, ce qui contredit $(\bigstar)$.
Donc $\ell = 1$, c'est-à-dire $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
d) Il s'agit de montrer que pour n assez grand :

$$1 - \frac{\ln(n)}{n} \leqslant x_n$$

À cette fin, on va montrer qu'à partir d'un certain rang :

$$P_n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) \leqslant P_n(x_n)$$

On a :

$$P_n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) = \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)^n - \frac{\ln(n)}{n}$$

Pour tout $n \geqslant 2$, on a $1 - \frac{\ln(n)}{n} < 1$ et comme $1 - \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on peut affirmer qu'à partir d'un certain rang on a :

$$1 - \frac{\ln(n)}{n} \in]0, 1[$$

Alors :

$$\begin{aligned} &P_n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)\right) - \frac{\ln(n)}{n} \\ &\leqslant \exp(-\ln(n)) - \frac{\ln(n)}{n} = \frac{1 - \ln(n)}{n} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

(On a utilisé l'inégalité : $\forall u > -1$, $\ln(1 + u) \leqslant u$, qui se démontre par exemple en étudiant les variations puis le signe de la fonction $u \mapsto u - \ln(1 + u)$.)
On a donc démontré que pour n assez grand, $1 - \frac{\ln(n)}{n}$ et x_n sont deux éléments de $]0, 1[$ tels que :

$$P_n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) \leqslant P_n(x_n)$$

Or P_n est strictement croissante sur $]0, 1[$ donc à partir d'un certain rang :

$$1 - \frac{\ln(n)}{n} \leqslant x_n \text{ d'où } 1 - x_n \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$

15.22

a) f est continue sur $[-1, 1]$ et la fonction $x \mapsto ux$ l'est également. Donc h_u est continue sur le segment $[-1, 1]$ et par conséquent h_u est bornée sur $[-1, 1]$ et atteint ses bornes.

b) Cas particulier où $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.
Alors : $\forall x \in [-1, 1]$, $h_u(x) = ux - \frac{1}{2}x^2$.

Étudions la fonction $\varphi_u : x \in \mathbb{R} \mapsto ux - \frac{1}{2}x^2$ (h_u est la restriction de φ_u à $[-1, 1]$).
φ_u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_u'(x) = u - x$.
Tableau de variations de φ_u :

x	$-\infty$		u		$+\infty$
$\varphi_u'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_u(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}u^2$	↘	$-\infty$

h_u est la restriction de φ_u à $[-1, 1]$. Plusieurs cas se présentent :

• Si $u \geqslant 1$: alors h_u est strictement croissante sur $[-1, 1]$, donc elle atteint son maximum en 1 et seulement en ce point. D'où $E(u) = \{1\}$ et $M(u) = h_u(1) = u - \dfrac{1}{2}$.

• Si $-1 < u < 1$: alors h_u est strictement croissante sur $[-1, u]$ et strictement décroissante sur $[u, 1]$, donc elle atteint son maximum en u et seulement en ce point. D'où $E(u) = \{u\}$ et $M(u) = h_u(u) = \dfrac{1}{2}u^2$.

• Si $u \leqslant -1$: alors h_u est strictement décroissante sur $[-1, 1]$, donc elle atteint son maximum en -1 et seulement en ce point. D'où $E(u) = \{-1\}$ et $M(u) = h_u(-1) = -u - \dfrac{1}{2}$.

c) • Montrons $(v - u)x \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v - u)y$.

$y \in E(v)$ donc $M(v) = h_v(y) = f(y) + vy$ et :

$$\forall t \in [-1, 1],\ h_v(t) \leqslant M(v)$$

En particulier en prenant $t = x$:

$$(1)\ :\ f(x) + vx \leqslant M(v)$$

De même $M(u) = h_u(x) = f(x) + ux$ et :

$$(2)\ :\ f(y) + uy \leqslant M(u)$$

En soustrayant $f(x) + ux = M(u)$ de part et d'autre dans (1), il vient :

$$(v - u)x \leqslant M(v) - M(u)$$

En soustrayant $f(y) + vy = M(v)$ de part et d'autre dans (2), il vient $(u - v)y \leqslant M(u) - M(v)$ d'où

$$M(v) - M(u) \leqslant (v - u)y$$

On a bien $(v - u)x \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v - u)y$.

• Montrons que $\left|M(v) - M(u)\right| \leqslant |v - u|$.
On a $|y| \leqslant 1$ donc :

$$(v - u)y \leqslant |(v - u)y| \leqslant |v - u|$$

Par ailleurs $|x| \leqslant 1$ donc :

$$(v - u)x \geqslant -|(v - u)x| \geqslant -|v - u|$$

D'après ce qui précède, on a alors :

$$-|v - u| \leqslant M(v) - M(u) \leqslant |v - u|$$

D'où : $\left|M(v) - M(u)\right| \leqslant |v - u|$.

d) Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. On a :

$$\forall v \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \left|M(v) - M(u)\right| \leqslant |v - u|$$

Or $|v - u| \underset{v \to u}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement :

$$M(v) \underset{v \to u}{\longrightarrow} M(u)$$

Donc M est continue en u. C'est vrai pour tout $u \in \mathbb{R}$, donc M est continue sur $\mathbb{R}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Dérivation

CHAPITRE 16

Plan

16.1 Conception locale de la dérivée 416
16.2 Propriétés globales de la dérivée 421
16.3 Dérivées successives 428
16.4 Fonctions convexes 430
Synthèse 433
Tests et exercices 434
Corrigés des exercices 438

Introduction

Nous poursuivons ici l'étude des fonctions en introduisant la fonction dérivée. Cela sera l'occasion de faire des comparaisons affines, de positionner la courbe par rapport à ses tangentes, ses cordes, de donner des relations entre les cordes et les tangentes. Même si les résultats sont donnés sous forme analytique, l'interprétation géométrique reste bien présente.

Dans ce chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

Objectifs

- Introduire la dérivabilité d'une fonction en un point, puis sur un intervalle
- Théorème des acroissements finis
- Existence et calcul des dérivées successives
- Convexité

Prérequis

- Étude locale et globale des fonctions

16.1 Conception locale de la dérivée

16.1.1 Dérivée en un point

Définition – Dérivée en un point

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est dérivable en x_0 lorsque la fonction dite « taux d'accroissement en x_0 » $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite **finie** en x_0.
Cette limite est appelée **dérivée en** x_0 ; on la note $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

En pratique, on pose $h = x - x_0$ pour ramener le travail sur la limite en 0 :

Proposition – *Avec les notations de la définition, f est dérivable en x_0 si et seulement si $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite **finie** en 0 qui est notée $f'(x_0)$.*

Exemples

1. Si f est constante sur I, alors f est dérivable en tout $x_0 \in I$ et $f'(x_0) = 0$.
 En effet, $\forall x_0 \in I$, $\forall x \in I$ avec $x \neq x_0$, alors $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{0}{x-x_0} = 0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f : x \mapsto x^n$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.
 En effet, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq x_0$, on a $\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} nx_0^{n-1}$.
3. La fonction racine carrée est dérivable en tout $x_0 > 0$ et $\sqrt{x_0}' = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
 En effet, $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $h \in [-x_0, +\infty[$, alors $\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Définition – Développement limité à l'ordre 1

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 lorsqu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{R})^2$ tel que : $f(x) \underset{x_0}{=} a + b(x - x_0) + o(x - x_0)$.

Proposition – *f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si l'une des situations suivantes est vérifiée :*
(i) f est définie et dérivable en x_0
(ii) f est prolongeable par continuité en x_0 et son prolongement y est dérivable.
Le cas échant, si $f(x) \underset{x_0}{=} a + b(x - x_0) + o(x - x_0)$ alors $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

Exemple

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - (x - 1) + \sin(x - 1)^2$ alors $f(x) \underset{1}{=} 2 - (x - 1) + o(x - 1)$ donc f est dérivable en 1 avec $f(1) = 2$ et $f'(1) = -1$.

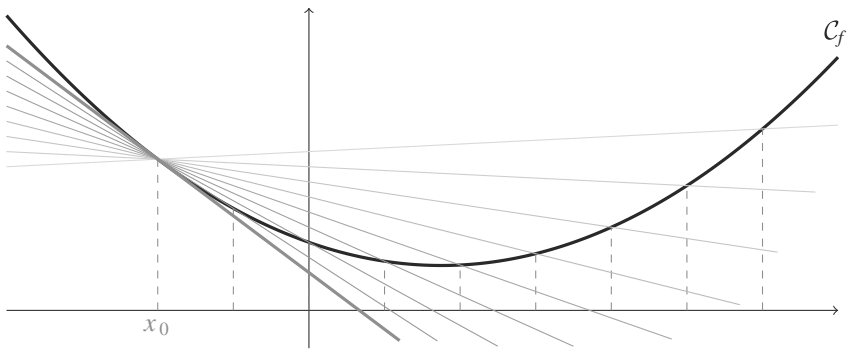
La réciproque est fausse ! Une fonction peut être continue en x_0 sans être dérivable en x_0 (par exemple la fonction racine carrée en 0).

Corollaire – Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Définition – Approximation affine. Tangente

Si f est dérivable en x_0, la fonction $x \mapsto f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ est appelée **approximation affine** de f au voisinage de x_0.
La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est appelée **tangente** en $(x_0, f(x_0))$ à $\mathcal{C}_f$.

Remarque – La tangente en x_0 est la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Elle peut être interprétée comme une limite de cordes de $\mathcal{C}_f$ car pour $x \neq x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le coefficent directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$.



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Définition – Tangente verticale

Lorsque $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en x_0, on dit que C_f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme **tangente verticale** en x_0

Exemple

La fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.

16.1.2 Dérivée à droite, à gauche

Définition – Dérivée à droite, à gauche

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est **dérivable à droite** en x_0 lorsque la restriction de f à $[x_0, +\infty[\cap \mathcal{D}$ est dérivable en x_0 ; en particulier, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite **finie** à droite en x_0 ;
on note $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, appelé **nombre dérivé à droite**.
On définit de même la dérivabilité à gauche en x_0, et le cas échéant,
on note $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, appelé **nombre dérivé à gauche**

Définition – Demi-tangente à droite, à gauche

Si f est dérivable à droite en x_0, on dit que C_f admet la demi-droite $y = f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$ comme **demi-tangente à droite** en x_0.
Si f est dérivable à gauche en x_0, on dit que C_f admet la demi-droite $y = f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$ comme **demi-tangente à gauche** en x_0.

Exemple

Considérons $g : x \mapsto |x|$ en 0. Si $x > 0$, $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 1$. De même, g est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.

Proposition – *On suppose que f est définie sur un ensemble contenant un intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Exemples

1. La fonction valeur absolue n'est dérivable à l'origine (la dérivée à droite en 0 n'est pas égale à la dérivée à gauche en 0).
2. Déterminons $a \in \mathbb{R}$, tel que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sin(ax) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ soit dérivable en 0 :
 • Pour $x < 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$.
 • Pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin(ax)}{x} \underset{0^+}{\sim} a$, donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = a$.
 Enfin f est dérivable en 0 si et seulement si $a = 1$.

16.1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème – Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et dérivables en $x_0 \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :
• $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables en x_0 et :

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0),\ (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

• Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en x_0 et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)},\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Démonstration
Démontrons par exemple la formule du produit : pour tout $x \in I\backslash\{x_0\}$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$

Or g est dérivable en x_0 donc d'une part $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} g'(x_0)$ et d'autre part, g est continue en x_0 donc $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$. De même, on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$. Les opérations sur les limites donnent :

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Ainsi fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ■

Corollaire – Un polynôme est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et une fraction rationnelle est dérivable en tout point de son domaine de définition.

Exemple

La fonction tan est dérivable sur son domaine de définition.
En effet, pour tout $x_0 \in \mathcal{D}_{\tan}$, sin et cos sont dérivables en x_0 de nombre dérivé respectif $\cos(x_0)$ et $-\sin(x_0)$. De plus $\cos(x_0) \neq 0$, donc tan est dérivable en x_0, en tant que quotient, et $\tan'(x_0) = \frac{\cos(x_0)^2+\sin(x_0)^2}{\cos(x_0)^2} = 1 + \tan(x_0)^2 = \frac{1}{\cos(x_0)^2} > 0$.

Théorème – Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$ et g en $t_0 = f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Exemple

Soit u dérivable en 2. Comme sin est dérivable en $u(2)$, alors $\sin \circ u$ est dérivable en 2 et $\sin(u(2))' = u'(2)\cos(u(2))$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème – Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I (elle réalise une bijection de I sur $f(I)$). On note f^{-1} sa fonction réciproque définie sur $f(I)$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ de dérivée :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration

Pour $y \in f(I)\backslash\{y_0\}$, f étant bijective, on note $x = f^{-1}(y)$. La dérivabilité de f en x_0 et la continuité de f^{-1} en y_0 (qui se traduit par $x \to x_0$ si $y \to y_0$) donne par composition de limite :

$$\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. ■

Remarque – Si f est une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} admet une tangente verticale en $y_0 = f(x_0)$.

Exemple

On définit la fonction Arctan : $\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ comme la bijection réciproque de la restriction de tan à $]-\pi/2, \pi/2[$. Or en tout $x_0 \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan'(x_0) = 1 + \tan(x_0)^2 \geqslant 1$ donc Arctan est dérivable en tout $y_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\text{Arctan}'(y_0) = \frac{1}{1 + \tan(\text{Arctan}\,(y_0))^2} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

16.1.4 Fonction dérivée

Définition – Fonction dérivée

On dit alors que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si f est dérivable en tout $x_0 \in I$, et on appelle **fonction dérivée** de f, notée f' ou $\frac{df}{dx}$, la fonction

$$f' : \begin{cases} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f'(x) \end{cases}.$$

Les résultats obtenus pour la dérivée en un point s'étendent aux intervalles :

Théorème

- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.
- Si f et g sont dérivables sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables sur I et :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}, \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

• Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable sur J et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

• Si $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone et dérivable (donc continue) sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1}, sa fonction réciproque définie sur $f(I)$, est dérivable sur $f(I)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Remarque – Si vous avez oublié l'expression de $\left(f^{-1}\right)'$, pensez à dériver $f \circ f^{-1}$:

$$\forall x \in f(I) \quad f(f^{-1}(x)) = x \quad \Rightarrow \quad \forall x \in f(I) \quad f'(f^{-1}(x)) \times \left(f^{-1}\right)'(x) = 1$$

La réciproque du premier point est fausse : si f est continue sur I alors on ne peut rien dire sur sa dérivabilité. Gardons en tête que la valeur absolue est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Exemple

Considérons la fonction exp ; elle est dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus elle vérifie $\exp' = \exp$ et $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, donc $\exp'$ ne s'annule pas.
On note ln sa bijection réciproque, alors ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Dérivées usuelles : les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de défintion à l'exception de $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ où une étude spécidique en 0 est parfois nécessaire. Pour le deuxième tableau, on considère la fonction u dérivable est les compositions bien définies.

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{Arctan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(u(x))$	$u'(x)f'(u(x))$
$u(x)^\alpha$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$
$\ln \lvert u(x) \rvert$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\tan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$\text{Arctan}\,(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

16.2 Propriétés globales de la dérivée

Dans toute cette partie, a et b désignent des réels tels que $a < b$.

16.2.1 Extremum local. Théorème de Rolle

Définition – Extremum local

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un **maximum local** [resp. **minimum local**] en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ [resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$].

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On dit que f admet un **extremum local** en x_0 s'il admet un maximum ou un minimum local en x_0.

Remarques

1. Si les inégalités sont vraies pour tout $x \in I$, on parle de maximum ou minimum global sur I. Tout extremum global est un extremum local, mais la réciproque est fausse.
2. Une condition suffisante d'existence d'extremum est $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$ avec : un maximum si $f''(x_0) < 0$ et un minimum sinon.

Exemple

La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x$ définie sur $\mathbb{R}$ admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1 mais aucun extremum global.

Théorème – Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0 et si x_0 n'est pas une borne de I, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration

Supposons que f admette un maximum local en $x_0 \in I$: soit $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \subset I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Comme f dérivable en x_0 alors :

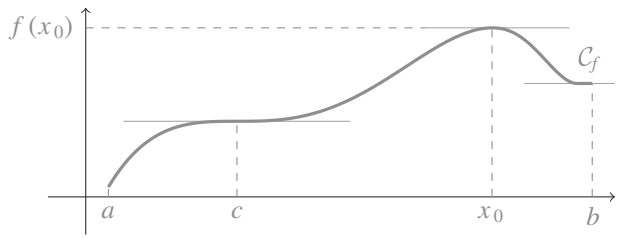
- f est dérivable à droite en x_0 donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} f'_d(x_0)$.

De plus, pour tout $x \in [x_0; x_0 + \alpha]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ et $x \geqslant x_0$, donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Par compatibilité avec la realtion d'ordre, $f'_d(x_0) \leqslant 0$.

- De même, f est dérivable à gauche en x_0 et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} f'_g(x_0) \leqslant 0$.
- $f'_d(x_0) = f'(x_0) = f'_g(x_0)$ donc $0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$, d'où $f'(x_0) = 0$. ■

Remarques

1. Si x_0 est une borne de I, on ne peut pas conclure. Dans l'exemple ci-dessous, f admet en a et b deux minima locaux mais $f'(a) \neq 0$ et $f'(b) = 0$.
2. La réciproque du théorème est fausse : si $f'(x_0) = 0$, on n'a pas nécessairement x_0 extremum local. Dans l'exemple ci-dessous, $f'(c) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en c. Nous avons aussi le contre exemple de la fonction $x \mapsto x^3$: sa dérivée s'annule en 0 sans que 0 soit un extremum local.



Théorème – Théorème de Rolle

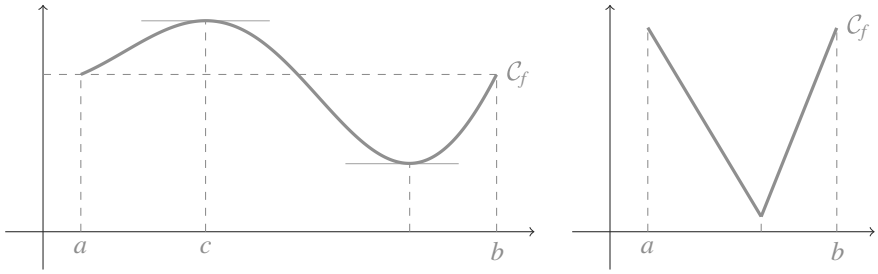
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

f est continue sur le segment $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un segment c'est-à-dire qu'il existe $r, s \in [a, b]$ tel que $f([a, b]) = [f(r), f(s)]$.
Trois cas sont à détailler :
• Si $f(r) = f(s) = f(a)$ alors f est constante et $f' = 0$ sur $[a, b]$, donc $c = \frac{a+b}{2}$ convient.
• Si $f(s) > f(a)$ alors $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant f(s)$. f admet un maximum local en s et s ne peut pas être une borne de $[a, b]$ (car $f(x) > f(a) = f(b)$) donc $f'(s) = 0 : c = s$ convient.
• Si $f(r) < f(a)$ alors $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant f(r)$. f admet un minimum local en r et s n'est pas une borne de $[a, b]$, donc $f'(r) = 0 : c = r$ convient. ■

Remarques

1. Le réel c n'est pas unique comme le montre le premier dessin.
2. L'hypothèse de dérivation est essentielle. Le second dessin propose le graphe d'une application continue mais non dérivable au point réalisant le minimum. De plus, en dehors de ce point, f' est clairement non nulle ; ainsi, l'existence d'un minimum ne donne pas que la dérivée s'annule si celle-ci n'est pas définie sur tout l'intervalle.



Exemples

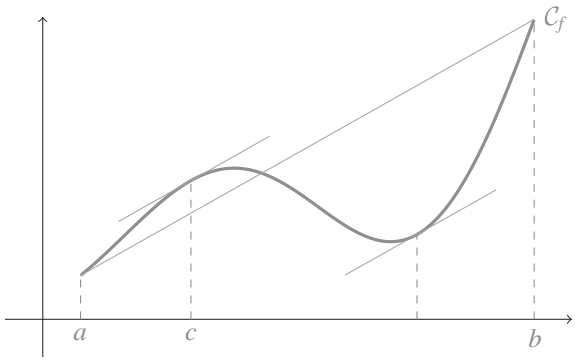
1. $x \mapsto (x-1)(x-2)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle s'annule en 1 et 2. Le théorème de Rolle nous permet de dire que sa dérivée s'annule sur $]1, 2[$.
2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. Le théorème de Rolle nous permet de dire que sin s'annule entre deux zéros de cos et vice-versa.

16.2.2 Accroissements finis

Théorème – Égalité des accroissements finis
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



Remarque – Ce résultat peut se formuler ainsi : à toute corde, il est possible d'associer une tangente qui lui est parallèle. En effet $f'(c)$ est le coefficient de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en c et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est celui de la corde à $\mathcal{C}_f$ passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Démonstration

Etudions la différence entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la corde associé sur $[a, b]$:

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) \end{aligned}$$

On obtient $g(a) = g(b) = 0$, g continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (car combinaison linéaire d'applications qui le sont). Le théorème de Rolle donne qu'il existe $c \in]a, b[$; $g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ c'est-à-dire : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Théorème – Inégalité des accroissements finis

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$.

- Si $a < b$ et s'il existe m et $M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in]a, b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors :
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$
- S'il existe $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$, alors :
$$\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant k|b-a|.$$

Exemples

1. Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.
En effet, pour $x > 0$, la fonction ln est dérivable (donc continue) sur $[x, x+1]$, ainsi le théorème des accroissements finis dit qu'il existe $t \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{(x+1)-x} = \ln'(t) = \frac{1}{t}$.
Or si $0 < x < t < x+1$ alors, $0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{x}$ d'où le résultat.
On remarque que cette configuration est similaire à la différence de deux termes consécutifs d'une suite définie explicitement (Ici $u_n = \ln(n)$) :
$u_{n+1} - u_n = \frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}$ est un taux d'accroissement !
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, sin est dérivable sur $[0, x]$. De plus $\sin(0) = 0$ et $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$. Ainsi la formule de l'inégalité des acrroissements finis donne $|\sin(x) - \sin(0)| \leqslant |x - 0|$.
Le résultat s'étend sur $\mathbb{R}_-$ car sin est impaire.

La méthode suivante constitue une application importante de la formule de l'inégalité des accroissements finis : faire le lien avec le chapitre 12.

Méthode 1 Convergence d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

• Situation :

On considère un intervalle I, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont dans I.

• Hypothèses :

f possède un point fixe $\ell \in I$, f est dérivable sur I et il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que $|f'| \leqslant \alpha$.

• On en déduit une majoration de type géométrique de $|u_n - \ell|$:

la formule de l'inégalité des accroissements finis donne pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \alpha|u_n - \ell|$$

Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha^n|u_0 - \ell|$.

• D'où la suite converge :

$\alpha \in [0, 1[$, donc $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\alpha^n|u_0 - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple d'application

Reprenons l'exemple du chapitre 12 page 330 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, \sqrt{2}]$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$. f possède un seul point fixe $\in [0, \sqrt{2}]$.

De plus, f est dérivable sur $[0, \sqrt{2}]$ et $|f'(x)| = \left|\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \alpha$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - 1| \leqslant \alpha|u_n - 1|$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - 1| \leqslant \alpha^{n-1}|u_1 - 1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha \approx 0.65$.

Le théorème d'encadrement donne que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

16.2.3 Applications

Caractérisation des fonctions constantes

Théorème – Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, alors :
f est constante sur $I \Leftrightarrow f$ est dérivable sur I de dérivée nulle.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x_0 \in I$, $\forall x \in I\backslash\{x_0\}$, on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ f est dérivable sur l'**intervalle** I, et $|f'| \leq 0$ sur I. D'après la formule de l'inégalité des accroissements finis, on a $\forall (x, y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leqslant 0|x - y| = 0$ donc $f(x) = f(y)$. La fonction f est constante sur I. ■

La notion d'intervalle est essentielle : ces résultats deviennent faux sur des réunions d'intervalles. En effet, la fonction partie entière est non constante, dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et de dérivée nulle.
Garder aussi en tête l'exemple de la fonction inverse : sa dérivée est strictement négative sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

Monotonie des fonctions dérivables

Théorème – Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors :

1. f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$,
2. f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.

Démonstration

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est croissante sur I alors pour tout $x < y$ éléments de I, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geqslant 0$
Or f est dérivable en y, par compatibilité avec la relation d'ordre,

$$\lim_{x \to y^-} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'_g(y) = f'(y) \geqslant 0.$$

Pour la borne de gauche éventuelle de I, on procède de même avec $y \to x^+$.
$\boxed{\Leftarrow}$ f est dérivable sur l'**intervalle** I ; l'égalité des acrroisements finis donne pour tout x et $y \in I$, qu'il existe $t \in]x, y[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) \leqslant 0 \text{ car } x < y.$$

Ainsi, f est croissante sur I.
2. La fonction f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante donc si et seulement si $(-f)' = -f' \geqslant 0$ et donc si et seulement si $f' \leqslant 0$. ■

Proposition – *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et J une partie de I obtenue en retranchant un nombre fini de points à I.*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur J :

1. *si $\forall x \in J,\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I,*
2. *si $\forall x \in J,\ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.*

Remarques

1. f' peut s'annuler et f être strictement croissante. Exemple $x \mapsto x^3$.
2. Le plus souvent on aura $I = [a, b]$ et $J =]a, b[\backslash\{x_0\}$.
3. C'est ce résultat que l'on utilise pour dresser les tableaux de variations.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car elle y est dérivable et sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.

Prolongement d'une dérivée

Théorème – Prolongement d'une dérivée
Soient I un intervalle et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si f' admet une limite ℓ, finie, en a alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Démonstration

f est continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{a\}$, alors pour tout $x \in I\backslash\{a\}$ le théorème de l'égalité des accroissements finis donne l'existence de c_x compris entre a et x strictement tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Or $|c_x - a| \leqslant |x - a|$ donc $c_x \underset{x \to a}{\longrightarrow} a$.
Par composition des limites $f'(c_x) \to \ell$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \ell$. f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. ■

Exemple

La fonction $f : x \mapsto xe^{-\frac{1}{x}}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Elle peut être prolongée par continue en 0 par la valeur 0, notons g ce prolongement. Enfin, sa dérivée, $g' : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, tend aussi vers 0 en 0, la fonction g est donc dérivable en 0 et donc sur $[0, +\infty[$, et $g'(0) = 0$.

Remarque – Ce théorème est seulement une condition suffisante de dérivabilité en un point : si f' admet une limite finie en x_0, autrement dit, si f' est continue en x_0, alors f est dérivable en x_0. Cependant f' peut exister en x_0 sans y être continue.

Voici un contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ sinon} \end{cases}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Étudions la dérivabilité de f en 0 :

• Revenons à la définition en considérant le taux de variation : pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$, par encadrement, on a alors $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

• Considérons f' sur $\mathbb{R}^*$: $x \mapsto 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Le premier terme tend vers 0 en 0 mais le second n'a pas de limite. Ainsi, f' n'admet pas de limite finie en 0.

Méthode 2 Dérivablité d'une fonction définie par morceaux

Pour démontrer la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux :

► on utilise les théorèmes généraux sur chaque intervalle ouvert où la formule définissant la fonction est la même,

► on fait une étude particulière en chaque point de raccord :

• soit par prolongement des dérivées à gauche et à droite, si elles admettent la même limite finie,

• soit par le calcul des nombres dérivés éventuels à gauche et à droite (grâce au taux d'accroissement), et en prouvant qu'ils sont égaux.

Exemple d'application

Considérons $f : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{2(1 - e^x)}{e^x + 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Sur $\mathbb{R}_+^*$: comme les fonctions 1 (constante) et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Sur $\mathbb{R}_-^*$: par combinaison linéaire de fonctions connues et dérivables sur $\mathbb{R}_-^*$, les fonction $x \mapsto 2(1 - e^x)$ et $x \mapsto e^x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus $e^x + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-^*$; ainsi, par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

• Étude de la continuité en 0 :

On a $1 - e^x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $f(0) = 0$ donc f est continue à droite en 0.

Et $\frac{2(1 - e^x)}{e^x + 1} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0 = f(0)$ donc f est continue à gauche en 0, donc continue en 0.

• Étude de la dérivabilité en 0 : déterminons $f'_d(0)$ et $f'_g(0)$.

Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = -e^x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1$. Le théorème de prolongement donne que f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -1$.

Pour $x < 0$, $f'(x) = \frac{-2e^x(e^x + 1) - 2(1 - e^x)e^x}{(e^x + 1)^2} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} \frac{-4}{4} = -1$. Le théorème de prolongement donne que f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.

Comme $f'_d(0) = f'_g(0)$ alors f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -1$.

Conclusion, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

16.3 Dérivées successives

16.3.1 Définitions

Remarque – Donc $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

Définition – Fonction n fois dérivable sur un intervalle. Dérivée n-ième

• Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si f' est également dérivable sur I. On note f'' la dérivée de f' et on l'appelle dérivée seconde de f.
• Plus généralement, on définit par récurrence la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$. On pose $f^{(0)} = f$. Pour $n \geqslant 1$, on dit que f est n fois dérivable sur I si elle est $n-1$ dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. On note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition – Fonction n fois dérivable en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est n fois dérivable en x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit $n-1$ dérivable sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I$ et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0.

Définition – Fonctions de classe $\mathcal{D}^n$, C^n, C^∞

• On dit que f est de classe $\mathcal{D}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I.
On note $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{D}^n$ sur I.
• On dit que f est de classe C^n sur I si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I.
• On dit que f est de classe C^∞ sur I si elle admet des dérivées n-ième pour tout entier n sur I. On dit aussi que f est **indéfiniment dérivable** sur I. On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

Remarques

1. $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
2. Si $0 < p < n$ alors $C^\infty \subset C^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset C^p(I) \subset \mathcal{D}^p(I)$.
 Ces inclusions sont strictes.
 La famille $\left\{ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^k \sin \frac{1}{x} \text{ sinon} \end{cases} ; \ k \in \mathbb{N}^* \right\}$ donne successivement une fonction dans un ensemble mais pas dans le suivant :
 $x \mapsto x \sin \frac{1}{x} \in C^0(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x} \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}) \backslash C^1(\mathbb{R})$
 $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x} \in C^1(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ $x \mapsto x^4 \sin \frac{1}{x} \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}) \backslash C^2(\mathbb{R})$ etc.

Exemples

1. Les fonctions polynomiales, sinus, cosinus, exponentielle sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et la fonction logarithme népérien l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En particulier, si $f : x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{N}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{r!}{(r-n)!} x^{r-n} & \text{si } n < r \\ r! & \text{si } n = r \\ 0 & \text{si } n > r \end{cases} \text{ et } \sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } n = 4k+1 \\ -\sin x & \text{si } n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{si } n = 4k+3 \\ \sin x & \text{si } n = 4k \end{cases}$$
 On peut aussi montrer que $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha$ est dérivable n fois et $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

16.3.2 Opérations sur les dérivées successives

Théorème – Si f et $g \in \mathcal{D}^n(I)$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{D}^n(I)$ et $fg \in \mathcal{D}^n(I)$. De plus :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

et la dérivée n-ième de fg est donnée par la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g} \in \mathcal{D}^n(I)$ et $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}^n(I)$.

Corollaire – Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si f et $g \in C^n(I)$, alors $f + g$, λf, $fg \in C^n(I)$.
Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g} \in C^n(I)$.

Corollaire – $\mathcal{D}^n(I)$, $C^n(I)$ et $C^\infty(I)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Exemple

Considérons $f : x \mapsto \frac{x^2+3}{1-x}$. Les fonctions $g : x \mapsto x^2 - 3$ et $h : x \mapsto 1 - x$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, donc par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, f aussi.
Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = -1 - x + \frac{4}{1-x}$.
Une récurrence permet de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{h}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.
Ainsi $f'(x) = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $f^{(n)}(x) = \frac{4n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Théorème – Soient f de classe $\mathcal{D}^n$ sur I (resp. C^n, C^∞) et g de classe $\mathcal{D}^n$ sur J (resp. C^n, C^∞) telles que $f(I) \subset J$.
Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{D}^n$ sur I (resp. C^n, C^∞).

Méthode 3 Calcul d'une dérivée *n*-ième

Voici les méthodes courantes pour le calcul d'une dérivée n-ième :
• Opération algébrique : si la fonction peut se décomposer en combinaison linéaire ou produit de fonctions dont on connait déjà les dérivées à tout ordre, alors il peut être envisageable d'utiliser les opérations algébriques sur les dérivées successives et en particulier la formule de Leibniz.
• Récurence : calculer les premières dérivées (trois ou quatre) ; conjecturer une expression ; enfin, démontrer l'expression par récurrence.

Exemples d'application

1. Considérons $x \mapsto (x^2+1)e^x$. Comme $x \mapsto x^2 + 1$ et exp sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors leur produit l'est aussi. L'expression des dérivées k-ième des deux fonctions sont connues ; ainsi, la formule de Leibniz donne pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}((x^2+1)\exp x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2+1)^{(k)} \exp^{(n-k)}(x) \\ &= \underbrace{(x^2+1)\exp x}_{k=0} + \underbrace{2nx\exp x}_{k=1} + \underbrace{n(n-1)\exp x}_{k=2} + \underbrace{0}_{k\geqslant 3}\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $((x^2+1)\exp x)^{(n)} = (x^2+2nx+n^2-n+1)\exp x$.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on établi que $x \mapsto \exp(2x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition et

$$\exp(2x)^{(n)} = 2^n \exp(2x) \text{ et } \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$$

16.4 Fonctions convexes

16.4.1 Définition

Proposition – *Soient a et b deux réels tels que $a < b$.*

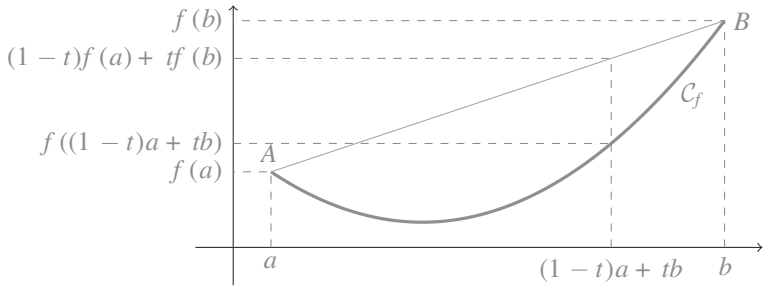
1. *$[a,b]$ est l'ensemble des réels de la forme $(1-t)a+tb = a+t(b-a)$ où t parcourt $[0,1]$.*
2. *$[a,b]$ est l'ensemble des réels de la forme $\lambda a+\mu b$ où $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$ vérifient $\lambda+\mu = 1$.*

Proposition - Définition

Si f est une fonction définie sur $[a,b]$, A le point du plan de coordonnées $(a, f(a))$ et B celui de coordonnées $(b, f(b))$ alors le point du segment $[A,B]$ ayant pour abscisse $(1-t)a+tb$ a pour ordonnée $(1-t)f(a)+tf(b)$.

La portion de C_f, la courbe représentative de f, comprise entre A et B est appelée arc de f entre a et b, et le segment $[A,B]$ est appelé corde de cet arc.

De plus l'équation de la corde est $y = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+f(a)$.



Définition – Fonction convexe. Fonction concave

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

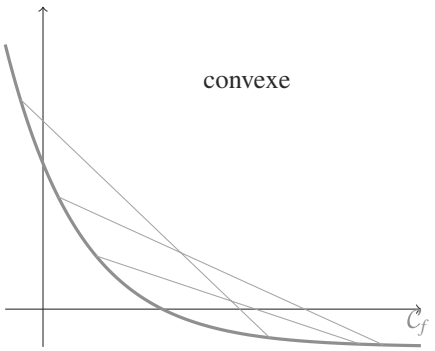
• On dit que f est **convexe** sur I lorsque :

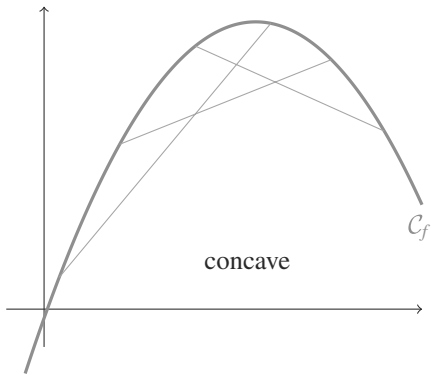
$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y).$$

Autrement dit, une fonction est convexe si tout arc de sa courbe C_f est au-dessous de sa corde.

• On dit que f est **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)x+ty) \geqslant (1-t)f(x)+tf(y).$$





Exemples

1. Toute fonction affine est à la fois convexe et concave.
2. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

16.4.2 Caractérisations

Théorème – Caratérisation des fonctions convexes de classe C^1
Soient I un intervalle et $f \in C^1(I)$. On note C_f la courbe représentative de f. Les assertions suivantes sont équivalentes :

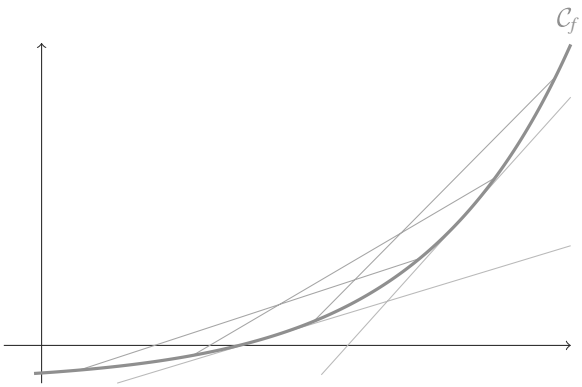
(i) f' est croissante sur I,

(ii) C_f est au-dessus de ses tangentes,
c'est-à-dire $\forall (x, x_0) \in I^2$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,

(iii) C_f est au-dessous de ses cordes,

(iv) f est convexe sur I.

La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangente et en-dessous de ses cordes, comme l'illustre la graphe ci-dessous :



Théorème – Caratérisation des fonctions convexes de classe C^2
Soient I un intervalle et $f \in C^2(I)$. Alors f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

1. exp est convexe sur $\mathbb{R}$ car $\exp'' = \exp \geqslant 0$.
 En particulier, sa courbe est au dessus de sa tangente à l'origine donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
2. ln est concave sur $]0, +\infty[$ car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0$.
 En particulier, sa courbe est en-dessous de sa tangente en 1 donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\ln x \leqslant x - 1$.
3. La fonction sinus est convexe sur les intervalles de la forme $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$ et concave sur les intervalles de la forme $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Méthode 4 Comparaison affine

Les fonctions affines sont des fonctions de référence ; dans de nombreuses situations nous sommes amenés à comparer une expression à une expression affine ou encore à positionner une courbe par rapport à une droite (par exemple une tangente).
L'étude de la convexité répond rapidement à cette problèmatique.

Exemple d'application

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

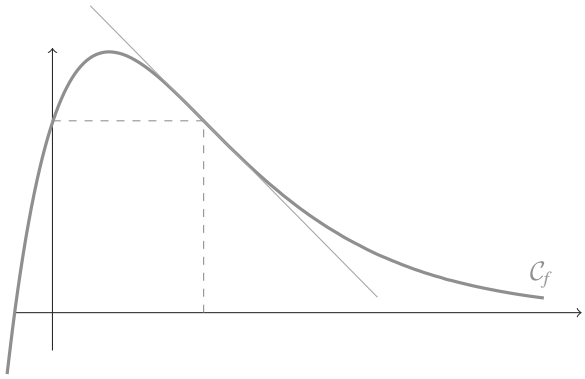
En effet, sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc au dessus de sa corde sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (d'équation $y = \dfrac{2x}{\pi}$) et en-dessous de sa tangente en 0 (d'équation $y = x$), donc $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$.

16.4.3 Point d'inflexion

Définition – Point d'inflexion

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe C_f de f lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit convexe sur $[x_0 - \alpha, x_0]$ ou sur $[x_0, x_0 + \alpha]$ et concave sur l'autre intervalle.

Remarque – En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.



Exemple

Les points d'inflexion de la courbe de sinus sont les points de coordonnées $(k\pi, 0)$.

Proposition – *Soient I un intervalle et $f \in C^2(I)$. Alors la courbe de f présente un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' s'annule et change de signe en x_0.*

Synthèse

Savoirs

- Théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis
- Formule de Leibniz
- Définition et caractérisation de la convexité

Savoir-faire

- Etablir la dérivabilité d'une application en un point : en utilisant le taux de d'accroissement ou le théorème de prolongement de la dérivée.
- Encadrement, inégalité en utilisant les accroissements finis.
- Comparaison affine en utilisant la convexité
- Calcul de dérivée n-ième : par récurrence, par la formule de Leibniz

Mots-clés

- nombre dérivé,
- taux de d'accroissement,
- Rolle,
- accroisements finis,
- dérivée n-ième,
- convexité,
- concavité.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

16.1 Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $x \mapsto \ln(\ln(x))$, puis déterminer sa dérivée.

16.2 Jusitifier l'existence des limites suivantes et les donner :
1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos(x)-1}{3x-\pi}$

16.3 QCM

1) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2g(2x) - g(x)$ avec g dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
a) $f'(x) = 4g'(2x) - g'(x)$,
b) $f'(x) = 2g'(2x) - g'(x)$,
c) $f'(x) = g'(x)$.
d) $f'(x) = 3g'(x)$.

2) Soit f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ telle que $f' \geqslant 0$. Alors :
a) f est croissante sur $]1, +\infty[$,
b) f est croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$,
c) f est croissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

16.4 Expliquer la différence entre $f^3(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

16.5 Vrai ou faux ?
a) $\mathcal{C}^2([0,1]) \subset \mathcal{D}^2([0,1])$
b) $\mathcal{D}^2([0,1]) \subset \mathcal{D}^3([0,1])$
c) Sur $\mathbb{R}^*$, on a $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} < 0$; ainsi la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
d) Si f' est décroissante alors f est concave.

16.6 Recherche de contre-exemples

Pour chacune des affirmations suivantes, montrer qu'elle est fausse en donnant un contre-exemple.
a) Si f est continue en 2, alors elle y est dérivable.
b) Une fonction convexe admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

16.7 Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $f : t \mapsto \operatorname{Arctan} t + \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}$.
Simplifier l'expression de f en considérant f'.

16.8

1) Donner la dérivée 8-ième de $x \mapsto x^{12}$.
2) Donner la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x\exp(x)$.

16.9 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit g définie par $g = f'$; de plus, on suppose qu'il existe F dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F' = f$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer en fonction des dérivées successives de f : $g^{(n)}$ et $F^{(n)}$.

16.10 Considérons l'application $g : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ qui réalise une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Quel est le domaine de définition et de dérivabilité de sa fonction réciproque ?

16.11 Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée ne s'annule pas peut-elle être périodique ?

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 437.

■ Dérivabilité

16.12

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition et déterminer leur dérivée :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \textit{(EDHEC 2007)}$$

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

$$h : x \mapsto \sin\sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

16.13 ◎

Établir l'existence et la valeur des limites suivantes :
1) f est dérivable en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(3x)-f(x)}{x}$
2) f est dérivable en $c \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{xf(c)-cf(x)}{x-c}$

16.14 ◎

Calculer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)-1}$
2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

16.15

Sans justification, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :
1) $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$.
2) $g : x \mapsto (x^3 - 3x^2 + 5x + 2)^9$
3) $h : x \mapsto \dfrac{\ln(|1+x|)}{x^2}$
4) $r : x \mapsto \sqrt[6]{\cos(x)}$
5) $s : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
6) $t : x \mapsto e^x \ln(\sin(x))$
7) $u : x \mapsto \tan(x)^x$
8) $v : x \mapsto \dfrac{3x^2+5x-4}{2x^2+3x-2}$

■ Dérivée d'une fonction réciproque

16.16

On sait que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. On note Arcsin la bijection réciproque associée.
Donner le domaine de dérivabilité de Arcsin et déterminer sa dérivée.

16.17

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
1) Montrer que f admet une bijection réciproque g définie sur un intervalle I à préciser.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée à l'aide du résultat précédent.
3) Retrouver la valeur de g' en explicitant la fonction g.

■ Théorème de Rolle - Accroissements finis

16.18

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \text{Arctan}\, x$.

16.19

Soit $a \in]0, 1[$. Montrer à l'aide des accroissements finis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{(n+1)^{1-a}} \leqslant (n+1)^a - n^a \leqslant \frac{a}{n^{1-a}}$$

En déduire l'équivalent suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-a}} \sim \frac{n^a}{a}$.

16.20

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

16.21

1) Soit f dérivable sur l'intervalle I, et $(a, b) \in I^2$. Montrer que si f s'annule en n points de $[a, b]$ alors f' s'annule en au moins $n-1$ points de $]a, b[$.
2) Soit P un polynôme de degré n ayant toute ses racines réelles. Montrer que P' a aussi toutes ses racines réelles.

16.22

Considérons la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.
1) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ, point fixe de cos sur $[0, 1]$, c'est-à-dire tel que $\cos(\ell) = \ell$.
2) Existe-t-il $\alpha \in]0, 1[$ tel que $|\cos'| \leqslant \alpha$ sur $[0, 1]$?
3) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \alpha |u_n - \ell|$.
4) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

16.23 ◎

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, à dérivée décroissante.
1) Montrer que pour tout $x > 1$,

$$f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1).$$

2) En déduire que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f' tend vers 0 en $+\infty$.
3) La réciproque est-elle vraie ?

■ Dérivées successives

16.24

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$,
$(e^x \sin(x))^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$.

16.25

1) Etablir que $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est de classe C^∞ sur $]-2, +\infty[$. Donner l'expression de sa dérivée n-ième.
2) Même question pour $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{2+x}$.
3) Même question pour $h : x \mapsto \ln(2+x)$.

16.26 ◎

Considérons sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$.
Montrer que f est de classe C^∞ et déterminer $f^{(n)}$.

16.27

Donner l'expression de la dérivée n-ième de :
1) $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$
2) $g : x \mapsto \sin^2(x)$.

16.28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a, b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-a)^n (x-b)^n$.
1) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-a)^n$; donner $g^{(k)}$.
2) Déterminer $f^{(n)}(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz,
3) Lorsque $a = b$, calculer $f^{(n)}(x)$ par une autre méthode.
4) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

■ Convexité

16.29

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) \geqslant x$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\tan(x) \leqslant x$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

16.30

Soit $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.
1) Donner le domaine de définition de f.
2) Etudier la convexité de f.
3) En déduire que pout tout $a, b \in \mathcal{D}_f$:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

16.31 ◎

Soit f une fonction bornée et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée seconde positive. Montrer que f est décroissante.

16.32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + x^2)$.
1) Est-il possible de réduire le domaine d'étude de f ?
2) Étudier les variations de f et préciser les limites aux bornes.
3) Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$. En déduire la nature de la branche infinie.
4) Étudier la convexité de f et calculer les coordonnées des points d'inflexions éventuels.
5) Tracer la courbe représentative de f en précisant les tangentes en 0 et aux points d'inflexions.

16.33 ◎

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.
1) Soient $n \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$; montrer que :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

2) Application à la comparaison de moyennes : soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictements positifs.
Démontrer les inégalités $m_h \leqslant m_g \leqslant m_a \leqslant m_q$ avec :

$$m_a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad m_q = \sqrt{\frac{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}{n}}$$

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, \quad m_g = (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

(m_a : moyenne arithmétique, m_q : moyenne quadratique, m_h : moyenne harmonique, m_g : moyenne géométrique)

Exercices d'approfondissement

16.34 d'après EML 2007 S

On considère l'application

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2) On considère l'application

$$A : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

2.a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.
2.b) Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.
On admettra que $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
2.c) Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et préciser $f'(0)$.
2.d) Dresser le tableau de variation de A. En déduire que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
2.e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) On considère l'application

$$B : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)$$

3.a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

3.b) Dresser le tableau de variation de B.
En déduire que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
4) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

16.35 d'après Ecricome 2004 S

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.
1) Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2) Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3) Justifier que pour tout $x \in J$:

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \text{ et } \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

4) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

16.36 d'après EDHEC 2001 S ◎

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ des fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On note E l'ensemble des fonctions φ de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(\star)$ suivante :

$$(\star)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x).$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - uv'$ est une fonction constante.
3) Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par

$$f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

3.a) Vérifier que f est élément de E.
3.b) Soit g la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$$

Montrer que g est élément de E.
On admettra que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$ *est dérivable de dérivée* $x \mapsto \frac{1}{f^2(x)}$.
4.a) Soit h une solution de $(\star)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f, que h est combinaison linéaire de f et de g.
4.b) Montrer finalement que (f, g) est une base de E.

16.37 Extrait EML 2011 S

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!},$$

$$L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto e^x f_n^{(n)}(x),$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.
1) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.
2) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k$$

3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
4) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$$

5) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$

6) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}f_n(x)$$

7) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$$

8) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$$

Indications

16.13 Mettre en évidence des taux d'accroissement.

16.14 Mettre en évidence des taux d'accroissement.

16.23 L'expression $f(x+1) - f(x)$ peut être vue comme un taux d'accroissement : $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$. Utiliser l'égalité des accroissements finis.

16.26 Utiliser la formule de Leibniz.

16.31 Raisonner par l'absurde en supposant f non décroissante. Grâce à l'égalité des accroissements finis, établir l'existence d'une tangente à coefficent directeur strictement positif. La convexité de f permet de montre que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

16.33
1) Procéder par récurrence.
2) La convexité de exp donne $m_g \leqslant m_a$; celle de $x \mapsto x^2$ donne $m_a^2 \leqslant m_q^2$. Enfin $m_h \leqslant m_g$ obtenu par changement de variable $y_i = \frac{1}{x_i}$ dans $\frac{1}{m_a} \leqslant \frac{1}{m_g}$.

16.36
4.a) $u'v - uv'$ doit vous rappeler une formule connue.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

16.1 ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ln est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $x > 1$, $\ln(\ln(x))' = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

16.2 L'existence de la limite vient de la dérivabilité de la fonction en un point. La valeur de la limite est donnée par le nombre dérivé en ce point.

1) tan est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{x} = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

2) cos est dérivable en $\frac{\pi}{3}$:

$$\frac{2\cos(x)-1}{3x-\pi} = \frac{2}{3}\frac{\cos(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}\frac{\cos(x)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$
$$\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{3}]{} \frac{2}{3}\cos'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

16.3

1) Réponse **a)**.

2) Réponses **a)** et **c)**. La monotonie d'une fonction s'étudie sur un intervalle et non sur une réunion d'intervalle.

16.4 Les notations ont une signification relative au domaine d'étude. Ici, en analyse, les applications sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi :

- l'exposant traduit l'ordre de la puissance : $f^3(x) = f(x) \times f(x) \times f(x)$
- l'exposant entre parathèses traduit l'ordre de dérivation : $f^{(3)}(x) = f'''(x)$

Remarque – En algèbre linéaire, les applications manipulent des vecteurs (pas de produit entre vecteurs, a priori), l'exposant traduit l'ordre de composition : $f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$.

16.5

a) Vrai. Une fonction admettant une dérivé seconde continue est au moins deux fois dérivable.

b) Faux. Une fonction deux fois dérivable n'est pas forcément trois fois dérivable.

c) Faux. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Un contre exemple est : $-2 < 2$, pourtant $\dfrac{1}{-2} < \dfrac{1}{2}$.

d) Vrai si on est sur un intervalle. La notion n'a pas de sens si on n'est pas sur un intervalle. C'est une des caractérisations des applications dérivables concaves.

16.6

a) Considérer $f : x \mapsto |x-2|$. Continue sur $\mathbb{R}$ donc en 2 et non dérivable en 2 car $f'_g(2) = -1 \neq 1 = f'_d(2)$.

b) Considérer une application constante ou $-\ln$ ou $x \mapsto e^{-x}$.

16.7 Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{1}{t}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par composition, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $t \neq 0$, $f'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} + \left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} = 0$.

Or $f(1) = 2\text{Arctan}\,(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

La caractérisation des fonctions constante sur un intervalle donne $f_{|\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{\pi}{2}$ et $f_{|\mathbb{R}_-^*} = -\dfrac{\pi}{2}$.

16.8

1) $x \mapsto \frac{12!}{4!}x^4$.

2) Comme $g : x \mapsto x$ et exp sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la formule de Leibniz donne pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\exp^{(n-k)}(x) = (x+n)\exp(x)$$

car $g^{(k)} = 0$ si $k \geq 2$.

16.9

On a $g^{(n)} = (f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ et $F^{(n)} = (F')^{(n-1)} = f^{(n-1)}$.

16.10 g est un polynôme donc défini et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3(x-1)^2 \geqslant 0$. Ainsi g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de la bijection donne que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} g, \lim_{+\infty} g[= \mathbb{R}$.

Enfin, le théorème de dérivavilité de la fonction réciproque dit que g^{-1} est dérivable en $y \in \mathbb{R}$, avec $y = g(x)$ si $g'(x) \neq 0$.

Ici, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $g(1) = -1$ donc g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Remarque – g^{-1} a une tangente verticale en -1.

16.11 La réponse est non. Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ alors f' est continue sur $\mathbb{R}$. Ne s'annulant pas, f' est de signe fixe (contraposée du théorème des valeurs intermédiaires) donc f est strictement monotone.

En particulier, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$.

Remarque – On peut utiliser le théorème de Rolle : si T est une période de f, alors pour tout x, $f(x) = f(x+T)$, donc comme f est C^1 sur $\mathbb{R}$, le théorème de Rolle s'applique et donne que pour tout réel x, il existe $c_x \in]x, x+T[$ avec $f'(x_x) = 0$.

16.12

► Étude de f :

- Sur $\mathbb{R}_+^*$: ln est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x$ aussi. Par somme $x \mapsto x - \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Une étude rapide de $x \mapsto x - \ln(x)$ donne que pour tout $x > 0$, $x - \ln(x) > 0$, donc $x \mapsto x - \ln(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Par quotient f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Étude en 0 : considérons le **taux d'accroissement**,

$$\frac{\frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} - (-1)}{x} = \frac{1}{x-\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi f est dérivable (à droite) en 0 et $f'(0) = 0$.
• Expression de f' : pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-\ln(x)) - \ln(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln(x))^2} = \frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}$$

Donc $f' \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

► Étude de g :
• Sur $\mathbb{R}^*$: exp est dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto -x$ et $x \mapsto -2x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, donc par composition $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-2x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$. De plus la fonction 1 (constante) et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$; alors, respectivement par produit et par somme, les fonctions $x \mapsto x^2e^{-x}$ et $\mapsto 1 - e^{-2x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$, on a $1 - e^{-2x} \neq 0$, donc par quotient, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
• Étude en 0 : Montrons que g admet un **développement limité d'ordre 1** en 0.

$$\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \text{ donc } \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} \underset{0}{=} \frac{x}{2} + o(x)$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} = 0 = g(0)$ donc $g(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2} + o(x)$. Ainsi g admet un $DL_1(0)$, donc g est dérivable (donc continue) en 0 et $g'(0) = \frac{1}{2}$.
• L'expressions de g' sur $\mathbb{R}^*$: pour $x \neq 0$,

$$g'(x) = \frac{e^{-x}(2x-x^2)(1-e^{-2x}) - x^2e^{-x}2e^{-2x}}{(1-e^{-2x})^2}$$

Donc $g' : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-x}(2x-x^2)-e^{-3x}(2x+x^2)}{(1-e^{-2x})^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

► Étude de h :
• Recherche du domaine définition (de continuité et de dérivabilité) :
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie, continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. sin est définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$. Par composition, $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On ne peut encore rien dire sur la dérivabilité de h en 0 !
• Expression de la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$: pour $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cos(\sqrt{x}) - 1\right)$$

• Étude de la dérivabilité en 0^+ : mettons en place le **théorème de prolongement de la dérivée**.
Les équivalents usuels donnent :

$$h'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}\right) \underset{0^+}{\sim} -\frac{\sqrt{x}}{4} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, le théorème de prolongement de la dérivée donne que h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$. Donc h est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+$ et

$$h' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cos(\sqrt{x}) - 1\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

16.13

1) La dérivablité de f en 0 donne $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$. Ainsi,

$$\frac{f(3x)-f(x)}{x} = \frac{f(3x)-f(0)+f(0)-f(x)}{x} = 3\frac{f(3x)-f(0)}{3x-0} - \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Par composition et somme de limites finies,

$$\frac{f(3x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 3f'(0) - f'(0) = 2f'(0)$$

2) Posons $g : x \mapsto xf(c) - cf(x)$.
Par opération algébrique, g est aussi dérivable en c et $g'(c) = f(c) - cf'(c)$. On a :

$$\frac{xf(c)-cf(x)}{x-c} = \frac{g(x)-g(c)}{x-c} \underset{x\to c}{\longrightarrow} g'(c) = f(c) - cf'(c)$$

16.14

1) Soit x au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)-1} = \frac{\frac{\cos(x)-0}{x-\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}}{\frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos(x)-0}{x-\frac{\pi}{2}}}$$

Comme sin et cos sont dérivable en $\frac{\pi}{2}$ alors :

$$\frac{1-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)-1} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})} = 1$$

2) Soit x au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ tel que $x \neq \frac{\pi}{4}$:

$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-0}$$

Comme $x \mapsto \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et sin y est continue :

$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} = -1$$

16.15

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$ et
$f' : x \mapsto \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
2) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$g' : x \mapsto 9(3x^2-6x+5)(x^3-3x^2+5x+2)^8$
3) h est définir et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et
$h' : x \mapsto \dfrac{x-2(1+x)\ln(|1+x|)}{x^3(1+x)}$ (en utilisant $\ln|u|' = \dfrac{u'}{u}$)

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

4) r est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ et dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$:

$r' : x \mapsto -\frac{1}{6}\sin(x)\cos(x)^{-\frac{5}{6}}$

5) s est définie et dérivable sur $]e,+\infty[$ et

$s' : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$

6) t est définie et dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,(2k+1)\pi[$,

$t' : x \mapsto e^x\left(\ln(\sin(x))+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$

7) u est définie et dérivable sur

$\{x\in\mathbb{R};\tan(x)>0\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}[$,

$u' : x \mapsto \tan(x)^x\left(\ln(\tan(x))+x\frac{(1+\tan^2(x))}{\tan(x)}\right)$

en utilisant que $\tan(x)^x = e^{x\ln(\tan(x))}$.

8) v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,\frac{1}{2}\}$ et

$v' : x \mapsto -\frac{x^2-4x-2}{(2x^2+3x-2)^2}$

16.16 sin est dérivable sur $[-\pi/2,\pi/2]$. Le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque donne que Arcsin est dérivable sur $[-1,1]\backslash\{\sin(x);x\in[-\pi/2,\pi/2]$ et $\sin'(x)=0\}$.

Pour $x\in[-\pi/2,\pi/2]$,

$\sin'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-\pi/2,\pi/2\}$.

Donc Arcsin est dérivable sur

$\sin\left(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right)=]-1,1[$.

• Expression de Arcsin′ : soit $x\in]-1,1[$,

$$\text{Arcsin}'(x)=\frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))}=\frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))}$$

Comme $\cos(t)^2=1-\sin^2(t)$, alors

$\cos(t)=\sqrt{1-\sin^2(t)}$ ou $\cos(t)=-\sqrt{1-\sin^2(t)}$.

Déterminons le signe : $x\in]-1,1[$ donc $\text{Arcsin}(x)\in]-\pi/2,\pi/2[$, et donc $\cos(\text{Arcsin}(x))>0$. Ainsi :

$$\text{Arcsin}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\text{Arcsin}(x))}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

16.17

1) Les fonctions $x\mapsto e^x-e^{-x}$ et $x\mapsto e^x+e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$; de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x+e^{-x}\neq 0$, donc, par quotient, f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.

Pour $x\in\mathbb{R}$,

$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}>0$.

De plus $f(x)=\frac{e^x}{e^x}\times\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et de même, $f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\times\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-1$

Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le théorème de la bijection donne que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=]-1,1[=I$.

2) Pour $x\in\mathbb{R}$,

$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=1-(f(x))^2$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-(f(x))^2$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' ne s'annule pas, le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque donne que g est dérivable sur I. Pour $x\in I$:

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{1-f(g(x))^2}=\frac{1}{1-x^2}$.

3) Recherche de l'expression de g :

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in I$:

$$\begin{aligned}
y=f(x) &\Leftrightarrow (e^x+e^{-x})y=e^x-e^{-x}\\
&\Leftrightarrow e^x(y-1)=-(1+y)e^{-x}\\
&\quad\text{multiplication par } e^x>0\\
&\Leftrightarrow e^{2x}(y-1)=-(1+y)\\
&\quad\text{division par } y-1\neq 0 \text{ avec } y\neq 1\\
&\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}\\
&\quad\text{composition par ln car si } y\in I,\ \frac{1+y}{1-y}>0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $g : x\in]-1,1[\mapsto\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$ (car $1+x>0$ et $1-x>0$ pour $x\in I$).

On sait déjà que g est dérivable : pour $x\in I$,

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x^2}$$

16.18 Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier si $x>0$, Arctan est dérivable sur $[0,x]$. L'égalité des accroissements finis donne l'existence de $t\in]0,x[$ tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Arctan}(x)}{x}&=\frac{\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}(0)}{x-0}\\
&=\text{Arctan}'(t)=\frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Comme $0<t<x \Rightarrow 0<1+t^2\leqslant 1+x^2$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$

Donc $0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant\frac{\text{Arctan}(x)}{x}$. Ainsi, mutipliant par $x>0$, on a $\frac{x}{1+x^2}\leqslant\text{Arctan}\,x$

Cette dernière relation est aussi vraie en $x=0$.

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\frac{x}{1+x^2}\leqslant\text{Arctan}\,x$.

16.19 La fonction $f : x\mapsto x^a$ définie sur $[1,+\infty[$ est dérivable sur $[1,+\infty[$. En particulier, pour $n\in\mathbb{N}^*$, f est dérivable sur $[n,n+1]$.

Pout $x\in[n,n+1]$, $f'(x)=ax^{a-1}$.

Comme $a\in]0,1[$, $a-1<0$, donc f' est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $[n,n+1]$: pour tout $x\in[n,n+1]$: $a(n+1)^{a-1}\leqslant f'(x)\leqslant an^{a-1}$

L'inégalité des accroissement finis donne que :

$$\frac{a}{(n+1)^{1-a}} \leqslant (n+1)^a - n^a \leqslant \frac{a}{n^{1-a}}$$

► Soit $k \geqslant 2$, en prenant $n = k$ et $n = k-1$ dans l'inégalité précédente, on obtient en particulier :

$$(k+1)^a - k^a \leqslant \frac{a}{k^{1-a}} \leqslant k^a - (k-1)^a$$

Soit $n \geqslant 2$, en sommant ces inégalités pour $k \in [\![2, n]\!]$, nous identifions des sommes téléscopique, nous obtenons :

$$\sum_{k=2}^{n} (k+1)^a - k^a \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{a}{k^{1-a}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^a - (k-1)^a$$

donc $(n+1)^a - 2^a \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{a}{k^{1-a}} \leqslant n^a - 1^a$

soit $(n+1)^a - 2^a + a \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k^{1-a}} \leqslant n^a - 1^a + a$

ou encore $\frac{(n+1)^a - 2^a + a}{n^a} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k^{1-a}}}{n^a} \leqslant 1 + \frac{a-1}{n^a}$. Comme $a > 0$, $\frac{-2^a+1}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{a-1}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $\frac{(n+1)^a}{n^a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1^a = 1$. Par somme de limites, les menbres de gauche et de droite tendent vers 1 quand $n \to +\infty$. Le théorème d'encadrement donne que $\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k^{1-a}}}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-a}} \sim \frac{n^a}{a}$$

16.20

Avec $x \neq 0$, réécrivons l'égalité pour se ramener à la situation de l'égalité des accroissements finis :
$\frac{f(x) - f(-x) - (f(0) - f(0))}{x - 0} = f'(c) + f'(-c)$.
Considérons la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - f(-x)$; par composition et somme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$. L'égalité des accroissements finis appliqué à g sur $[0, x]$ donne l'existence de $c \in]0\ x[$ tel que $g(x) - g(0) = xg'(c)$: ce qui est le résultat cherché.

16.21

1) Soit $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des racines de f, telles que $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$. Pour $i \in [\![1; n-1]\!]$, on sait que f est dérivable sur $[a, b]$ donc sur $[x_i; x_{i+1}]$. Le théorème de Rolle sur $[x_i; x_{i+1}]$ donne l'existence de $t_i \in]x_i; x_{i+1}[\subset [a, b]$ tel que $f'(t_i) = 0$. Les t_i sont deux à deux différents, car appartenant à des intervalles deux à deux disjoints. Au final, les $(t_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ sont $n-1$ racines de f' dans $[a, b]$.
f' s'annule au moins $n-1$ fois dans $[a, b]$.
2) Considérons les racines réelles de P et leur ordre de multiplicité : $x_1, x_2, \ldots x_p$ d'ordre de multiplicité respectif $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$. Comme P est à racines réelles sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_i ! = n = \deg P$.
En particulier, $x_1, x_2, \ldots x_p$ sont racines de P' d'ordre de multiplicité respectif $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots \alpha_p - 1$: on obtient ainsi $n - p$ racines de P'.
La fonction P s'annule en $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$; ainsi, la démarche de la question **1)** donne $p-1$ nouvelles racines de P' : $(t_i)_{i\in[\![1,p-1]\!]}$ avec pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, $t_i \in]x_i; x_{i+1}[$.
Nous obtenons ainsi $(n-p) + (p-1) = n-1$ racines réelles de P' comptées avec leur ordre de multiplicité. Or P' est de degré $n-1$, donc possède au plus $n-1$ racines réelles. Ainsi, les racines de P' sont réelles.

16.22

1) Par somme d'applications dérivables, $f : x \in [0, 1] \mapsto \cos(x) - x$ est dérivable sur $[0, 1]$. De plus $f' = -\sin -1 < 0$ sur $[0, 1]$, donc f est strictement décroissante. Le théorème de la bijection donne que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f(1), f(0)]$.
Comme $f(1) = \cos(1) - 1 \leqslant 0$ et $f(0) = \cos(0) = 1$, alors $0 \in [f(1), f(0)]$ admet un unique antécédent, noté ℓ. cos admet donc un unique point fixe sur $[0, 1]$.
2) $\cos' = -\sin$ est décroissante sur $[0, 1]$, donc pour tout $x \in [0, 1]$, $\cos'(x) \in [-\sin(1), 0]$.
Posons $\alpha = \sin(1) \in]0, 1[$, alors $|\cos'| \leqslant \alpha$ sur $[0, 1]$.
3) L'inégalité des accroissements finis donne que pour $x, y \in [0, 1]$: $|\cos x - \cos y| \leqslant \alpha|x - y|$.
Une récurrence rapide permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$|u_{n+1} - \ell| = |\cos u_n - \cos \ell| \leqslant \alpha|u_n - \ell|$.
4) Une récurrence rapide permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \ell| \leqslant \alpha^n |u_0 - \ell|$.
Or $\alpha \in]0, 1[$ donc $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\alpha^n|u_0 - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

16.23

1) Soit $x > 1$, f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[x, x+1]$ et sur $[x-1, x]$. L'égalité des accroissements finis donne qu'il existe $(t, t') \in]x, x+1[\times]x-1, x[$ tel que :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(t) \text{ et } \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f'(t')$$

f' étant décroissante, on a : $f'(t) \leqslant f'(x) \leqslant f'(t')$.
Ainsi, pour tout $x \in [1, +\infty[$,
$f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.
2) Si $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(x-1) = 0$$

Le théorème d'encadrement donne $\lim_{+\infty} f' = 0$.
3) La réciproque est fausse. Considérons la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, mais $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

16.24

Procédons par récurrence :

Inititalisation : Pour $n = 0$,

$$2^0 e^x \sin(x+0) = e^x \sin(x).$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$$(e^x \sin(x))^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin(x + n\tfrac{\pi}{4})$$

Alors $(e^x \sin(x))^{(n+1)} = \left((e^x \sin(x))^{(n)}\right)'$

$= \left(2^{\frac{n}{2}} e^x \sin(x + n\frac{\pi}{4})\right)'$

$= 2^{\frac{n}{2}} e^x \left(\sin(x + n\frac{\pi}{4}) + \cos(x + n\frac{\pi}{4})\right)$

$= 2^{\frac{n}{2}} e^x \sqrt{2}\left(\sin(x + n\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(x + n\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4})\right)$

car $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{4})$

La relation est vérifiée au rang $n+1$.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(e^x \sin(x))^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin(x + n\tfrac{\pi}{4}).$$

16.25

1) f est une fraction rationnelle, donc de classe C^∞ sur son domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, donc en particulier sur $]-2, +\infty[$. On calcule les premières dérivées jusqu'à pouvoir conjecturer la dérivée d'ordre n : pour $x > -2$,

$$f'(x) = \frac{-1}{(2+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{(-1).(-2)}{(2+x)^3},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{(-1).(-2).(-3)}{(2+x)^4}.$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(2+x)^{n+1}}$$

Une récurrence permet d'établir le résultat.

2) g est aussi une fraction rationnelle définie sur $]-2, +\infty[$, donc de classe C^∞ sur $]-2, +\infty[$.

Pour $x > -2$, on a : $g(x) = x - 2 + \dfrac{4}{2+x}$

Ainsi, $g'(x) = 1 + 4f'(x) = \dfrac{x^2+4x}{(2+x)^2}$ et

pour tout $n \geqslant 2$, $g^{(n)} = 4f^{(n)} = \dfrac{4(-1)^n n!}{(2+x)^{n+1}}$.

3) Comme ln est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $x \mapsto 2 + x$ est de classe C^∞ sur $]-2, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par composition, $h \in C^\infty(]-2, +\infty[)$.

De plus $h' = f$ donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$h^{(n)} = f^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2+x)^n}.$$

16.26

Soit $n \in \mathbb{N}$. ln et $g : x \mapsto x^{n-1}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$; par produit, f l'est aussi.

Une récurrence rapide montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$\ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$ et $g^{(k)} = 0$ pour $k \geq n$, donc $g^{(n)} = 0$, mais

$g^{(n-k)} : x \mapsto \frac{(n-1)!}{(k-1)!} x^{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

D'après la formule de Leibniz, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} x^{k-1} \\ &= -\frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\ &\qquad \text{formule du binôme} \\ &= -\frac{(n-1)!}{x}\left((1+(-1))^n - 1\right) = \frac{(n-1)!}{x} \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{(n-1)!}{x}$.

16.27

1) On calcule les premières dérivées puis on conjecture la dérivée d'ordre n :

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-x}}, \quad f''(x) = -\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{(1-x)^{1+\frac{1}{2}}},$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{(1-x)^{2+\frac{1}{2}}}$$

On conjecture que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= -\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \cdots \times \frac{2n-3}{2}}{(1-x)^{n-\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^{n-\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{2.1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{2.2} \times \frac{5}{2} \times \right. \\ &\qquad \left. \cdots \times \frac{2n-4}{2(n-2)} \times \frac{2n-3}{2} \times \frac{2n-2}{2(n-1)}\right) \end{aligned}$$

Donc $f^{(n)}(x) = -\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!(1-x)^{n-\frac{1}{2}}}$.

Le résultat se montre par récurrence.

2) On linéarise g et on utilise les fonctions usuelles.

$g(x) = \sin(x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on sait (ou on redémontre) que

$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$. Une récurrence rapide donne que la dérivée d'ordre n de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto 2^n \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^{(n)} = -2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$.

16.28

1) g est un polynôme de degré n donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$g^{(k)} : x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} = k!\binom{n}{k}(x-a)^{n-k}.$$

Pour $k > n$, $g^{(k)} = 0$.

2) Considérant un résultat similaire pour $x \mapsto (x-b)^n$, la formule de Leibniz donne pour $f^{(n)}(x)$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \binom{n}{k} (x-a)^{n-k} (n-k)! \binom{n}{n-k} (x-b)^k$$
$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-a)^{n-k}(x-b)^k$$

3) Lorsque $a = b$, $f(x) = (x-a)^{2n}$ donc d'après le travail fait en **1)**, $f^{(n)}(x) = n!\binom{2n}{n}(x-a)^n$.

4) Ainsi, lorsque $a = b$, **2)** et **3)** donnent :

$$n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-a)^n = n!\binom{2n}{n}(x-a)^n$$

Ce qui donne après simplification :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

16.29

Notons que $y = x$ est l'équation de la tangente à la courbe de tan en 0.

De plus, tan est de classe C^2 sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$\tan' = 1 + \tan^2$ et $\tan'' = 2(1+\tan^2)\tan$.

Donc $\tan''$ est du signe de tan :

• sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'' \geqslant 0$ donc tan y est convexe et donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes : en particulier, sa demi tangente à droite de 0 :

pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) \geqslant x$.

• sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\tan'' \leqslant 0$ donc tan y est concave et donc sa courbe est en-dessous de ses tangentes : en particulier, sa demi tangente à gauche de 0 :

pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\tan(x) \leqslant x$.

16.30

1) ln est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ln est définie et de classe C^2 sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, f est définie et de classe C^2 sur $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.

2) Pour tout $x > 1$, $\ln(\ln(x))' = \dfrac{1}{x\ln(x)}$, et

$$f''(x) = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2} \leqslant 0$$

donc f est concave sur $]1, +\infty[$.

3) Soit $a, b \in]1, +\infty[$; comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, la définition de la concavité donne :

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}(\ln(\ln(a)) + \ln(\ln(b)))$$
$$\geqslant \ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right)$$

d'après les propriété de ln. Maintenant, appliquons la fonction croissante exp aux deux membres de cette inégalité :

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Ainsi, pour tout $a, b \in \mathcal{D}_f$:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

16.31

Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas décroissante : ainsi, il existe x et $y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$ et $f(x) < f(y)$.

Comme f est dérivable sur $[x, y]$, alors l'égalité des accroissements finis donne l'existence de $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$.

L'équation de la tangente à la courbe de f en c est :

$$y = f'(c)(x-c) + f(c) \text{ avec } f'(c) > 0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(c)(x-c) + f(c) = +\infty$.

On sait $f'' \geqslant 0$, donc f est convexe ; ainsi, sa courbe est au-dessus de sa tangente en c et donc :

pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f'(c)(x-c) + f(x)$.

Le théorème de comparaison donne $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Ceci est contraire au fait que f est bornée ; ainsi l'hypothèse de départ est fausse et donc f est décroissante.

16.32

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$: f est paire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

2) $x \mapsto 1 + x^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1, +\infty|$ et ln est de classe C^2 sur $[1, +\infty[$; par composition, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \geqslant 0$$

Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et décroissante sur $\mathbb{R}_-$). De plus, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

3) Pour x au voisinage de $+\infty$:

$$\ln(1+x^2) = \ln(x^2) + \ln(1+\tfrac{1}{x^2})$$
$$= 2\ln(x) + o(\ln(x)) \text{ car } \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
$$\underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$$

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$.

Ainsi, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x} = 0$.

C_f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

4) Calculons f'' : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

La tableau de signe de f'' est :

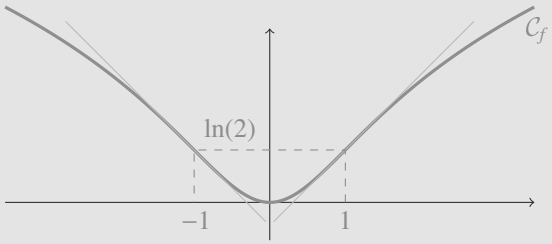
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc f est convexe sur $[-1, 1]$ et concave sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$. Les points d'inflexions ont pour coordonnées $(1, \ln(2))$ et $(-1, \ln(2))$.

5) L'équation de la tangente au point d'inflexion $(1, \ln(2))$ est : $y = x - 1 + \ln(2)$ car $f'(1) = 1$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Celle de la tangente en 0 est : $y = 0$ car $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$.
L'allure de la courbe est :



16.33

1) Procédons par récurrence sur $n \geqslant 2$:
Initialisation : soit $(x_1, x_2) \in I^2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, alors la définition de la convexité donne :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

Hérédité : soit $n \geqslant 2$, on suppose la propriété vraie au rang n.
Considérons $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$.
Posons $a = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \in I$, alors :

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) = f\left(\frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}x_{n+1}\right)$$

D'après la définition de convexité, on a :

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) \leqslant \frac{n}{n+1}f(a) + \frac{1}{n+1}f(x_{n+1}) \quad (\bigstar)$$

Or l'hypothèse de récurrence donne :

$$f(a) = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Remplaçant cette inégalité dans ($\bigstar$), on obtient :

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \frac{1}{n+1}f(x_{n+1})$$

La propriété est vérifiée au rang $n+1$.
Conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$.
2) Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^*$.
► Montrons $m_g \leqslant m_a$:
Comme $\exp'' = \exp > 0$, alors exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\begin{aligned} m_g &= (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(\ln(x_k)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \end{aligned}$$

Ainsi $m_g \leqslant m_a$.
► Montrons $m_a \leqslant m_q$:
Comme ces nombres sont positif, il est équivalent de montrer $m_a^2 \leqslant m_q^2$. Utilisons la convexité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$m_a^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = m_q^2$$

Ainsi $m_a^2 \leqslant m_q^2$, donc $m_a \leqslant m_q$ car $m_a, m_q \in \mathbb{R}_+^*$.

► Montrons $m_h \leqslant m_g$:
On sait que $0 < m_g \leqslant m_a$ donc $\frac{1}{m_a} \leqslant \frac{1}{m_g}$. On applique cette inégalité à $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\begin{aligned} m_h = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_i}} &\leqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{x_1}\times\frac{1}{x_2}\times\cdots\times\frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}}} \\ &\leqslant (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} = m_g \end{aligned}$$

Ainsi $m_h \leqslant m_g$.

16.34

1) • Montrons que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
$x \mapsto 1 + x$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]1, +\infty[$. ln est de classe C^2 sur $]1, +\infty[$; par composition, $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. De plus, $x \mapsto x$ est de classe C^2 et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$; par quotient, f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
Ceci donne la continuité de f sur $]0, +\infty[$, mais aussi répond en partie aux questions **2.a)** (de classe C^1 sur $]0, +\infty[$) et **3.a)** (de classe $\mathcal{D}^2$ sur $]0, +\infty[$).
• Étude de la continuité en 0 : pour $x > 0$, les équivalents usuels donne : $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{0^+}{\sim} 1$. Donc $\lim\limits_{0^+} f = 1 = f(0)$, f est continue en 0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2.a) On sait que $f \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$. Le calcul de la dérivée donne en utilisant la formule de dérivation $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}A(x).$$

2.b) Au voisinage de 0^+, on a :
$\dfrac{1}{1+x} - 1 \underset{0^+}{\sim} -x$ donc $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + o(x)$ et $\dfrac{x}{1+x} \underset{0}{=} x - x^2 + o(x^2)$.
De plus, $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc :

$$\begin{aligned} A(x) &\underset{0}{=} x - x^2 - x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + o(1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.
2.c) f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{0^+} f = -\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, le théorème de prolongement de la dérivée donne que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
En conclusion, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
2.d) A est dérivable sur $\mathbb{R}^+$; pour $x \geqslant 0$,

$$A'(x) = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

Ainsi $A'(0) = 0$ et pour $x > 0$, $A'(x) < 0$.
De plus, $A(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} A = -\infty$.
Le tableau de variation est :

x	0		$+\infty$
$A'(x)$	0	−	
$A(x)$	0	↘	$-\infty$

• Comme f' est du signe de A alors pour $x > 0$, $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2.e) Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0$$

Seul le premier terme donne une forme indéterminée qui est levée par croissance comparée ($\ln(x) \underset{\infty}{=} o(x)$). Donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

3.a) On sait que $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*)$. Le calcul de la dérivée de f' donne pour $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{A'(x)x^2 - 2xA(x)}{x^4} = \frac{1}{x^3}B(x).$$

3.b) B est dérivable sur $\mathbb{R}_+$; pour $x \geqslant 0$,

$$B'(x) = -\frac{(6x+2)(1+x)^2 - 2(1+x)(3x^2+2x)}{(1+x)^4} + \frac{2}{1+x}$$

Donc $B'(x) = \dfrac{2x^2}{(1+x)^3}$.

Ainsi $B'(0) = 0$ et pour $x > 0$, $B'(x) > 0$.

De plus, $B(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} B = +\infty$.

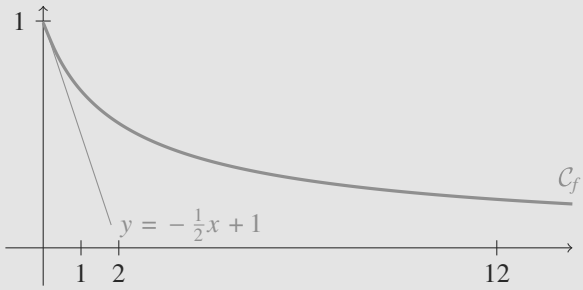
Le tableau de variation est :

x	0		$+\infty$
$B'(x)$	0	$+$	
			$+\infty$
$A(x)$		$\nearrow$	
	0		

• Comme f'' est du signe de B alors $f'' \geqslant 0$: f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Allure de la courbe de f :

L'équation de la tangente à l'origine est $y = -\frac{1}{2}x + 1$.



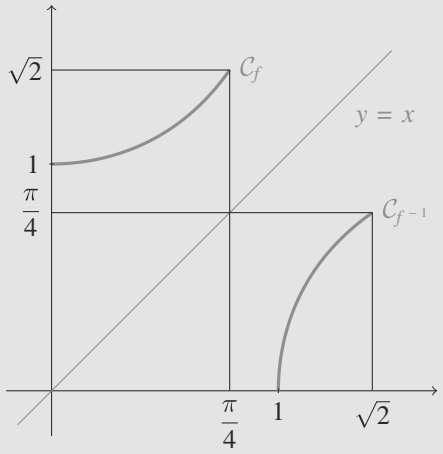
16.35

1) cos est dérivable et ne s'annule pas sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc, passant à l'inverse, f est dérivable sur I.

Pour $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

On a $f'(0) = 0$ et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) > 0$. Ainsi f est continue et strictement croissante sur I, le théorème de la bijection donne que f réalise une bijection de I dans $J = f(I) = \left[f(0), f(\frac{\pi}{4})\right] = [1, \sqrt{2}]$.

2)



3) Pour $x \in J$, $\cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{f(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{x}$.

On sait que $\sin^2 = 1 - \cos^2$ donc $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$ ou $\sin(x) = -\sqrt{1-\cos^2(x)}$. Déterminons le signe :

Comme $x \in J$, $f^{-1}(x) \in I$. Or $\sin \geqslant 0$ sur I donc :

$$\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(f^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

Donc pour tout $x \in J$,

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \text{ et } \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

4) f est dérivable sur I , $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f(0) = 1$. Le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque donne que f^{-1} est dérivable sur $J\backslash\{1\}$. De plus, pour $x \in J\backslash\{1\}$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}$$
$$= \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Donc $(f^{-1})' : x \in J\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

16.36

1) • E est un sous ensemble de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

• E est non vide car l'application nulle vérifie ($\star$). En effet, si f est la fonction nulle, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f''(x) = 0$, donc $f''(x) = (1+x^2)f(x)$.

• Soient f et $g \in E$, α et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)''(x) &= \alpha f''(x) + \beta g''(x)\\ &\quad \text{car la dérivation est linéaire}\\ &= \alpha(1+x^2)f(x) + \beta(1+x^2)g(x)\\ &\quad \text{car } f, g \in E\\ &= (1+x^2)(\alpha f + \beta g)(x)\end{aligned}$$

Donc $\alpha f + \beta g \in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

2) Soient $u, v \in E$; en particulier, u, u', v, v' sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc $u'v - uv'$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(u'v - uv')'(x) &= u''(x)v(x) + u'(x)v'(x) - u'(x)v'(x) - u(x)v''(x)\\ &= (1+x^2)u(x)v(x) - (1+x^2)u(x)v(x) = 0\end{aligned}$$

car $u, v \in E$.
La caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle donne que $u'v - uv'$ est une fonction constante.

3.a) $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et exp sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par composition, $f \in C^2(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = x\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ et

$f''(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)(1+x^2) = (1+x^2)f(x)$.

Donc $f \in E$.

3.b) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. $w : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$ de dérivée $\dfrac{1}{f^2}$ est donc aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est elle-même de classe au moins C^1.
Par produit, $g \in C^2(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = f'(x)w(x) + \frac{f(x)}{f^2(x)} = f'(x)w(x) + \frac{1}{f(x)} \text{ et}$$

$$\begin{aligned}g''(x) &= f''(x)w(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{f'(x)}{f^2(x)}\\ &= f''(x)w(x) = (1+x^2)f(x)w(x) \quad \text{Donc } g \in E.\\ &= (1+x^2)g(x) \text{ car } f \in E.\end{aligned}$$

4.a) Comme h et $f \in E$ alors d'après **2)**, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h'f - hf' = c$, ou encore $\dfrac{h'f - hf'}{f^2} = \dfrac{\alpha}{f^2}$ (car f^2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).
Ces applications sont continues ; en considérant une primitive des deux membres de l'équation :

il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{h}{f} = \alpha w + \beta$.

Multipliant par f, on obtient :

$h = \alpha f w + \beta f = \alpha g + \beta f$.

Ainsi h est une combinaison linéaire de f et de g.

4.b) La famille $\{f, g\}$ est libre dans E ; en effet, $f, g \in E$ d'après **3)**, sont non nulles et $g = fw$ avec w une application non constante puisque de dérivée non nulle.
Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f et $g \in E$ alors, $\text{Vect}(\{f, g\}) \subset E$. De plus, d'après la question **4.a)**, on a $E \subset \text{Vect}(\{f, g\})$, donc $\{f, g\}$ engendre E.
Enfin, $\{f, g\}$ est une base de E.

16.37

1)

$$\begin{aligned}L_0(x) &= e^x f_0^{(0)}(x) = e^x f_0(x) = 1\\ L_1(x) &= e^x f_1'(x) = e^x\,(xe^{-x})' = e^x(e^{-x} - xe^{-x}) = 1 - x\\ L_2(x) &= e^x f_2''(x) = e^x\left(\frac{x^2e^{-x}}{2!}\right)'' = \frac{e^x}{2}(2xe^{-x} - x^2e^{-x})'\\ &= \frac{e^x}{2}(2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}) = \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2)\end{aligned}$$

Remarque – On peut prendre le temps de vérifier ces calculs en utilisant la question **8)**, et constater que l'on a bien $L_1(x) = xL_0'(x) + (1-x)L_0(x)$ et $2L_2(x) = xL_1'(x) + (2-x)L_1(x)$, ou bien à partir de la question **2)** directement.

2) Dérivons n fois l'application $x \mapsto x^n e^{-x}$ à l'aide de la formule de Leibniz : c'est le produit de $g_n : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto e^{-x}$ qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x, on a

$$(g_n \times h)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_n^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x)$$

Or, $h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pour tout entier naturel k, et $g_n^{(j)}(x) = \dfrac{n!}{(n-j)!}x^{n-j}$ pour tout entier $j \in [\![0, n]\!]$ ($g_n^{(j)}(x) = 0$ si $j > n$), donc comme $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $0 \leqslant n - k \leqslant n$, donc $g_n^{(n-k)}(x) = \dfrac{n!}{k!}x^k$.

En reportant, on trouve

$(x^n e^{-x})^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{n!}{k!}x^k(-1)^k e^{-x}$, et donc

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}(x^n e^{-x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{k!}x^k(-1)^k$$

3) L'écriture ci-dessus montre que L_n est une combinaison linéaire des applications $x \mapsto x^k$ pour k entier naturel, donc c'est une fonction polynomiale.

De l'écriture, on déduit directement que $\deg(L_n) \leqslant n$. Pour affirmer l'égalité, il faut vérifier que le coefficient de X^n est non nul. Or le monôme où apparaît X^n est le terme $k = n$ de la somme, donc le coefficient de X^n est $\dfrac{(-1)^n}{n!}\binom{n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ qui est bien non nul.

Donc $\deg(L_n) = n$, et son coefficient dominant est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de dérivation d'un produit donne : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f_{n+1}'(x) &= \frac{1}{(n+1)!}((n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1}e^{-x})\\ &= \frac{n+1}{(n+1)!}x^n e^{-x} - \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{-x}\\ &= f_n(x) - f_{n+1}(x)\end{aligned}$$

en utilisant que $\dfrac{n+1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}L_{n+1}'(x) &= (\exp \times f_{n+1}^{(n+1)})'(x)\\ &= e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x)\\ &= L_{n+1}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x)\end{aligned}$$

et de même, $L_n'(x) = L_n(x) + e^x f_n^{(n+1)}(x)$.

Donc, pour tout réel x, $L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = L_{n+1}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x) - e^x f_n^{(n+1)}(x)$.

Or, si on dérive $n+1$ fois l'égalité de la question **4)** (on a le droit, car c'est une égalité entre fonctions), on a pour tout réel x,

$$f_{n+1}^{(n+2)}(x) = f_n^{(n+1)}(x) - f_{n+1}^{(n+1)}(x)$$

ce qui se réécrit en

$$e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x) - e^x f_n^{(n+1)}(x) = -L_{n+1}(x).$$

En reportant, on a bien que pour tout réel x,

$$L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = 0$$

ce qui est l'égalité désirée.

6) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x}{n+1} f_n(x) = \frac{x}{n+1} \times \frac{x^n e^{-x}}{n!} = \frac{(x \times x^n)e^{-x}}{(n+1) \times n!} = \frac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} = f_{n+1}(x)$$

7) Dérivons $n+1$ fois l'égalité de la question précédente (on a le droit, car c'est une égalité entre fonctions). On note $g_1 : x \mapsto x$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{1}{(n+1)}(g_1 \times f_n)^{(n+1)}(x)$$

Utilisons la formule de Leibniz :

$$(g_1 \times f_n)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g_1^{(k)} f_n^{(n+1-k)}.$$

Or, pour tout réel x, $g'_1(x) = 1$, donc $g^{(k)} = 0$ si $k \geq 2$. Dans la somme, il ne reste donc que les termes pour $k = 0$ et $k = 1$. On a alors

$$(g_1 \times f_n)^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$$

En divisant par $n+1$ et en multipliant par e^x, on obtient :

$$L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} e^x f_n^{(n+1)}(x) + L_n(x)$$

Or, on a vu à la question **5)** que pour tout réel x, $L'_n(x) = L_n(x) + e^x f_n^{(n+1)}(x)$. En reportant :

$$L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}(L'_n(x) - L_n(x)) + L_n(x).$$

En multipliant par $n+1$ et en réarrangeant les termes, on obtient bien que pour tout réel x,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$$

8) Dérivons l'égalité de la question précédente (on a le droit, car c'est une égalité entre fonctions). Pour tout réel x, on a

$$(n+1)L'_{n+1}(x) = L'_n(x) + xL''_n(x) - L_n(x) + (n+1-x)L'_n(x)$$

Or, à la question **5)**, on a montré que $L'_{n+1} = L'_n - L_n$, donc en reportant, on a

$$(n+1)(L'_n(x) - L_n(x)) = L'_n(x) + xL''_n(x) - L_n(x) + (n+1-x)L'_n(x)$$

En regroupant les termes entre eux, on obtient

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$$

qui est bien la formule désirée.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Intégration sur un segment et primitives

CHAPITRE 17

Plan

17.1 Construction de l'intégrale sur un segment 448
17.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment 451
17.3 Primitives et intégrales 454
17.4 Calcul des intégrales 459
Synthèse 462
Tests et exercices 463
Corrigés des exercices 467

Introduction

La notion d'intégrale a été développée pour définir et calculer l'aire d'une portion du plan délimitée par la courbe d'une fonction. Pour construire l'intégrale, on part donc de fonctions simples pour lesquelles on sait calculer cette aire : ce sont les fonctions en escalier. On définit ensuite l'intégrale des fonctions continues sur un segment grâce à un processus d'approximation par des fonctions en escalier. Les sommes de Riemann étudiées dans le paragraphe 17.2.2 permettent de bien comprendre cette approximation.

Les intégrales des fonctions continues sur un segment ayant été définies, il reste à déterminer des outils permettant de les calculer. À cette fin, on met en évidence le lien entre intégrale et primitive. Ce lien est double : d'une part, l'intégrale d'une fonction continue peut se calculer à l'aide d'une primitive de cette fonction ; d'autre part, l'existence de primitives pour toute fonction continue se démontre à l'aide de l'intégrale. Deux autres méthodes de calcul d'intégrales sont également étudiées dans ce chapitre : l'intégration par parties et la formule de changement de variable.

Objectifs

- Définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- Énoncer les propriétés de l'intégrale.
- Introduire la notion de primitive et étudier ses liens avec l'intégrale.
- Mettre en place l'intégration par parties et le changement de variable.

Prérequis

- Étude locale des fonctions.
- Étude globale des fonctions.
- Dérivation.

17.1 Construction de l'intégrale sur un segment

Dans cette partie, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

17.1.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition – Fonction en escalier

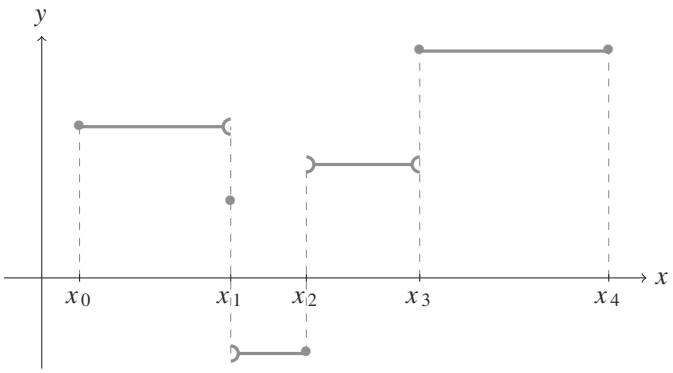
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est une **fonction en escalier** lorsqu'il existe une famille de réels $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tels que :

(i) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$,

(ii) la restriction de f à chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ est constante, autrement dit il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall\, x \in]x_k, x_{k+1}[,\ f(x) = \lambda_k.$$

Une telle famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est appelée **subdivision** de $[a, b]$ adaptée à f.
On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur le segment $[a, b]$.



Graphe d'une fonction en escalier

Définition – Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$, $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ les valeurs prises par f sur les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$. On appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** le réel :

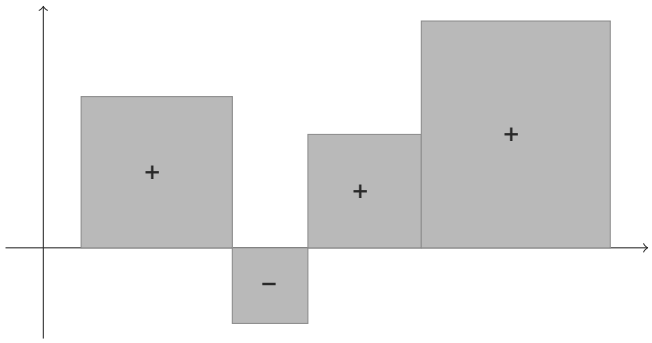
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{k+1} - x_k).$$

Remarques

1. t est une variable muette. Ainsi :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$
2. Dans le cas où f est la fonction constante sur $[a, b]$ égale à λ, on a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda(b - a).$$

Interprétation géométrique – $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la somme des aires algébriques des rectangles délimités par le graphe de f, les aires des rectangles situés au-dessus (resp. en dessous) de l'axe des abscisses étant comptées positivement (resp. négativement).

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



17.1.2 Intégrale des fonctions continues sur un segment

Proposition - Définition – Intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Notons :

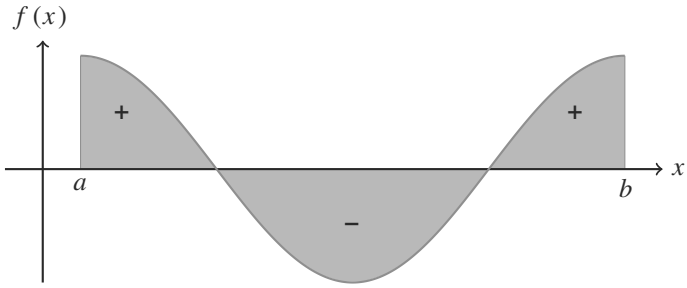
$$\mathcal{E}_+(f) = \left\{ g \in \mathcal{E}([a,b]) \,\middle|\, \forall x \in [a,b],\ g(x) \geqslant f(x) \right\}$$

$$\mathcal{E}_-(f) = \left\{ g \in \mathcal{E}([a,b]) \,\middle|\, \forall x \in [a,b],\ g(x) \leqslant f(x) \right\}$$

Alors les ensembles $\left\{ \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, g \in \mathcal{E}_+(f) \right\}$ *et* $\left\{ \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, g \in \mathcal{E}_-(f) \right\}$ *admettent respectivement une borne inférieure et une borne supérieure. De plus ces deux bornes sont égales.*

Cette valeur commune est appelée ***intégrale de*** f ***sur*** $[a, b]$ *et notée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Interprétation géométrique – L'intégrale de f est l'aire algébrique de la portion du plan délimitée par le graphe de f, la partie située au-dessus (resp. en dessous) de l'axe des abscisses étant comptée positivement (resp. négativement).



Définition – Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Si f est continue sur $[a, b]$, on appelle **valeur moyenne de** f **sur** $[a, b]$ le réel : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Remarque – La valeur moyenne $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est telle que f et la fonction constante égale à m ont la même intégrale sur $[a, b]$.

Définition – Extension au cas où $b \leqslant a$

- Si $b < a$ et f continue sur $[b, a]$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $b = a$ et f définie en a, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

17.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment

17.2.1 Propriétés élémentaires

Théorème – Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b, c) \in I^3$.

- **Linéarité :** $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Positivité :** si $a \leqslant b$ et si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- **Croissance :** si $a \leqslant b$ et si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.



- Si $a > b$ et si $\forall x \in [b, a]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.
- Si $a > b$ et si $\forall x \in [b, a]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème – Inégalité de la moyenne
Soit f continue sur $[a, b]$ où $a \leqslant b$ alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\max_{[a,b]}|f|.$$



Si $a > b$, on prendra soin de « remettre les bornes de l'intégrale dans le bon ordre ». Comme $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$, on écrira :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_b^a |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (a-b)\max_{[b,a]}|f|.$$

Théorème – Stricte positivité
Si f est **continue** et **positive** sur $[a, b]$ où $a < b$, alors :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \iff f$ est nulle sur $[a, b]$.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0 \iff f$ est non nulle sur $[a, b]$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Ce dernier théorème, bien que très utile, n'apparaît pas explicitement au programme officiel. Pour cette raison, nous en donnons une démonstration à l'exercice 8 qu'il faut impérativement savoir refaire.

Remarque – On rappelle que :

- f non nulle sur $[a,b]$ signifie qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) \neq 0$,
- f ne s'annule pas sur $[a,b]$ signifie que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \neq 0$.

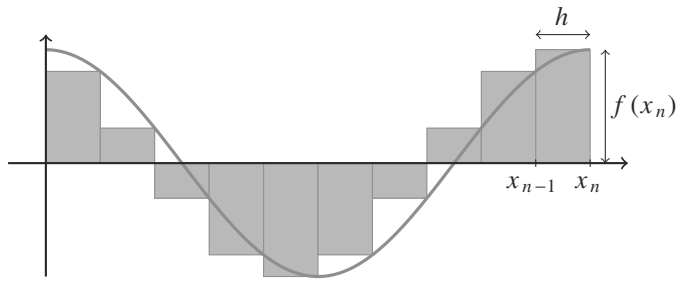
17.2.2 Sommes de Riemann

Définition – Somme de Riemann

Soit f continue sur $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **sommes de Riemann de f sur** $[a,b]$ les quantités suivantes :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Interprétation géométrique – S_n et T_n peuvent être interprétées comme des sommes d'aires algébriques de rectangles (les rectangles au-dessus de l'axe des abscisses sont comptés positivement ; les rectangles en dessous sont comptés négativement). Dans le graphique ci-dessous, on a posé : $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $x_k = a + kh$ de sorte que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} hf(x_k)$.



Théorème – Convergence des sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a,b]$ alors les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessus convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples

1. La fonction $f : t \mapsto t^4$ est continue sur $[0,1]$ donc :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t.$$
2. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ est continue sur $[0,2]$ donc :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+2k} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

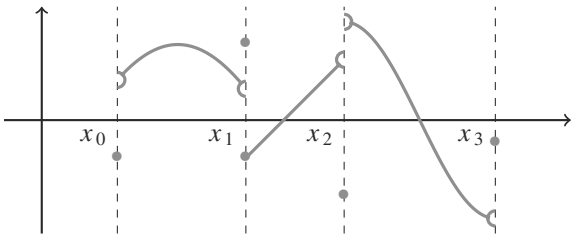
17.2.3 Extension aux fonctions continues par morceaux

Définition – Fonction continue par morceaux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une famille de réels $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tels que :

1. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$,
2. la restriction de f à chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ est continue et possède des limites finies en x_k et x_{k+1} (autrement dit est prolongeable par continuité en une fonction f_k continue sur $[x_k, x_{k+1}]$).

Une telle famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est appelée subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.



Graphe d'une fonction continue par morceaux

Exemples

1. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
2. Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
3. La fonction partie entière est continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$.

Définition – Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soient f une fonction continue par morceaux et $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on note f_k le prolongement par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$ de la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$. On appelle **intégrale de f sur $[a,b]$** :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque – Cette définition est cohérente avec la relation de Chasles.

Exemple

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \cos(x) \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ x^2 - x \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$. f est continue par morceaux sur $[0,2]$ et par définition :

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (t^2 - t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème – La linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles, la positivité et la croissance s'étendent aux intégrales de fonctions continues par morceaux.

Remarque – La stricte positivité n'est pas valable pour les fonctions continues par morceaux. Par exemple la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \in [0,1[\cup]1,2] \end{cases}$ est positive et non nulle sur $[0,2]$, et pourtant son intégrale sur $[0,2]$ est nulle.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

17.3 Primitives et intégrales

17.3.1 Primitive d'une fonction

Définition – Primitive d'une fonction sur un intervalle

Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I de fonction dérivée $F' = f$.

Remarque – Par souci de simplification, on a confondu à plusieurs reprises dans le tableau ci-contre, fonction et expression de la fonction.

fonction f	primitive F
a	ax
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}\,(x)$
$u'(ax)$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}u(ax)$
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Tableau des primitives usuelles :
F est une primitive de f sur tout intervalle où f est continue.

Exemple

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Une primitive de $x \mapsto \tan(x) = -\dfrac{\cos'(x)}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ est $x \mapsto -\ln|\cos(x)|$.

Théorème – Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F sur l'**intervalle** I. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $G : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I,

(ii) il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + \alpha$.

Démonstration

L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est évidente. Démontrons la réciproque. Si G est une primitive de f sur I alors la fonction $x \mapsto G(x) - F(x)$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto f(x) - f(x) = 0$. Or une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante. Donc il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) - F(x) = \alpha$. ■



Le théorème est faux lorsque I n'est pas un intervalle. Par exemple les fonctions suivantes :

$$F : x \mapsto -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad G : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sont deux primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$, pourtant il n'existe pas de constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G(x) = F(x) + \alpha$.

17.3.2 Théorème fondamental de l'intégration

Théorème – Théorème fondamental de l'intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors la fonction suivante

$$x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration

Posons : $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

• Montrons que F est une primitive de f sur I. Soit $x \in I$, pour tout h non nul tel que $x + h \in I$, on a :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t.$$

Soit ε un réel strictement positif quelconque. f est continue en x, donc il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall t \in I \cap [x - \alpha, x + \alpha],\ |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Dès lors, pour tout $h \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$, on a d'après l'inégalité de la moyenne :

- si $h > 0$: $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{|h|}\displaystyle\int_x^{x+h} \left|f(t) - f(x)\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{h}{|h|}\varepsilon = \varepsilon,$
- si $h < 0$: $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{|h|}\displaystyle\int_{x+h}^{x} \left|f(t) - f(x)\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{-h}{|h|}\varepsilon = \varepsilon.$

On en déduit que : $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in I$, F est dérivable en x de dérivée $F'(x) = f(x)$. On a bien démontré que F est une primitive de f sur I.

• Montrons que F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. Par définition de $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t$, F s'annule en a. Si G est une autre primitive de f sur l'intervalle I s'annulant en a, alors il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + \alpha$. Comme $G(a) = F(a)$, on a $\alpha = 0$ et donc $G = F$, ce qui prouve que F est l'unique primitive de f sur I s'anulant en a. ■

Corollaire – Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On déduit également du théorème fondamental le théorème suivant, qui constitue le principal outil pour calculer des intégrales.

Théorème – Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors pour tous a et b éléments de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

La différence $F(b) - F(a)$ est notée $\Big[F(t)\Big]_a^b$.

Remarque – Si f est de classe C^1 sur I, on a :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Démonstration

Posons $\forall x \in I,\ \Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème fondamental, Φ est une primitive de f sur l'intervalle I. Or F est également une primitive de f sur I. Donc il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I,\ F(x) = \Phi(x) + \alpha$. Or Φ s'annule en a, donc $\alpha = F(a)$, puis : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b) = F(b) - \alpha = F(b) - F(a)$. ■

Exemple

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{Arctan}\,(t)\Big]_0^1 = \mathrm{Arctan}\,(1) - \mathrm{Arctan}\,(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Méthode 1 Étude d'une intégrale fonction de ses bornes

Pour étudier une fonction de la forme $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, on aura intérêt à introduire une primitive F de f. On pourra alors écrire :

$$\varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

ce qui permettra par exemple de justifier l'éventuelle dérivabilité de φ, et le cas échéant de calculer φ'.

Exemple d'application

Montrons que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{\ln(x)}^{x^2} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculons sa dérivée.

$t \mapsto \sin(\mathrm{e}^t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall x > 0,\ \varphi(x) = F(x^2) - F(\ln(x))$$

Or $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F est C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto F(\ln(x))$ est C^1 sur $]0,+\infty[$. De même pour $x \mapsto F(x^2)$. Donc φ est bien C^1 sur $]0,+\infty[$ et en dérivant comme fonction composée :

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = 2xF'(x^2) - \frac{1}{x}F'(\ln(x)) = 2x\sin(\mathrm{e}^{x^2}) - \frac{1}{x}\sin(x).$$

17.3.3 Équation différentielle $f'(x) = f(x)g(x)$

Soit g une fonction continue sur l'intervalle I. On souhaite résoudre l'équation différentielle $f'(x) = g(x)f(x)$, c'est-à-dire trouver toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)f(x)$$

On trouve d'autres notations pour cette équation différentielle : $f' = g(x)f$ ou $y' = g(x)y$ (on fait disparaître la variable de la fonction inconnue) ou bien $f' = gf$ ou $y' = gy$.

Théorème – Soient g une fonction continue sur l'intervalle I et G une primitive de g sur I. Les solutions de l'équation différentielle $f'(x) = g(x)f(x)$ sont les fonctions de la forme :

$$\forall x \in I,\ f(x) = K\exp(G(x)),$$

où K une constante réelle.

Remarque – Les solutions seront nécessairement de classe C^1 sur I, puisque G est de classe C^1 sur I, et par composition $x \mapsto \exp(G(x))$ l'est également.

Démonstration

- Supposons que f est de la forme : $\forall x \in I,\ f(x) = K\exp(G(x))$ où $K \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = KG'(x)\exp(G(x)) = g(x)f(x)$$

 donc f est solution de l'équation différentielle.

- Réciproquement, supposons que f est une solution de l'équation différentielle. Posons : $\forall x \in I,\ \varphi(x) = f(x)\exp(-G(x))$. Alors φ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ \varphi'(x) = (f'(x) - g(x)f(x))\exp(-G(x)) = 0$$

 La fonction φ étant de dérivée nulle sur l'intervalle I, elle est constante. Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ \varphi(x) = K$ c'est-à-dire $f(x) = K\exp(G(x))$. ■

Exemples

1. $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet $x \mapsto x^2$ pour primitive sur $\mathbb{R}$. Donc les solutions de l'équation différentielle $f'(x) = 2xf(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $f(x) = K\exp(x^2)$ où $K \in \mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et admet $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ pour primitive sur cet intervalle. Donc les solutions de l'équation différentielle $f'(x) = f(x)\tan(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont les fonctions de la forme :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = K\exp[-\ln(\cos(x))] = \frac{K}{\cos(x)}, \quad \text{où } K \in \mathbb{R}.$$

17.3.4 Prolongement des fonctions de classes C^p

Théorème – Théorème de prolongement des fonctions de classe C^p
Soit $p \in \mathbb{N}$. Si f est de classe C^p sur $[a, b[$ et si $f^{(p)}$ admet une limite finie en b, alors f admet un prolongement de classe C^p sur $[a, b]$.

Remarque – On a un résultat analogue lorsque f est de classe C^p sur $]a, b]$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Pour la démonstration, on se limite au cas $p = 1$.

Par hypothèse, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$. Posons :

$$g(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ \ell & \text{si } x = b \end{cases}$$

f' est continue sur $[a, b[$ car f est C^1 sur $[a, b[$, donc g est continue sur $[a, b[$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = \ell = g(b)$ donc g est continue en b.

Finalement, g est continue sur l'intervalle $[a, b]$, donc admet une primitive G de classe C^1 sur $[a, b]$.

Or $\forall x \in [a, b[,\ G'(x) = g(x) = f'(x)$ donc G est une primitive de f' sur l'intervalle $[a, b[$.

La fonction f étant également une primitive de f' sur cet intervalle, on en déduit qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b[,\ f(x) = G(x) + \alpha$$

Par conséquent, $x \mapsto G(x) + \alpha$ prolonge la fonction f en une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

Le cas général se montrerait par récurrence sur p, à partir de l'argument précédent. ■

Exemple

Soient $f : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $]0, +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$.

f est de classe C^k sur $]0, +\infty[$ et on montre aisément par récurrence que :

$$\forall x > 0,\ f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où P_k est un polynôme.

Or par croissance comparée : $\forall j \in \mathbb{N},\ u^j e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $P_k(u)e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $f^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^k, f se prolonge donc en une fonction de classe C^k sur $[0, +\infty[$, et en notant encore f ce prolongement, on a $f^{(k)}(0) = 0$.

Méthode 2 Montrer qu'une fonction prolongée est de classe C^p.

Si f est définie sous la forme :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ \ell & \text{si } x = b \end{cases}$$

et si on vérifie les conditions suivantes :

(i) g est de classe C^p sur $[a, b[$,

(ii) $g^{(p)}$ admet une limite finie β en b,

(iii) $g(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \ell$ (autrement dit, f est continue en b)

alors f est de classe C^p sur $[a, b]$ et on a $f^{(p)}(b) = \beta$.

En effet, les conditions (i) et (ii) montrent que g se prolonge en une fonction de classe C^p sur $[a, b]$ et (iii) prouve que f est précisément ce prolongement.

Exemple d'application

Montrons que f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est C^1 sur $[0, +\infty[$.

- $x \mapsto x^2 \ln(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- $x \mapsto x^2 \ln(x)$ a pour dérivée sur $]0, +\infty[$: $x \mapsto 2x \ln(x) + x$ qui admet 0 pour limite finie quand $x \to 0^+$.
- $x^2 \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, f est donc de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $f'(0) = 0$.

17.4 Calcul des intégrales

Lorsqu'on souhaite calculer l'intégrale d'une fonction, on cherche en premier lieu une primitive de la fonction intégrée. Mais il arrive souvent qu'on ne connaisse pas une primitive : dans ces cas-là, on peut effectuer une intégration par parties ou un changement de variable. L'objet de cette dernière partie est l'étude de ces deux techniques.

17.4.1 Intégration par parties

Théorème – Intégration par parties
Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque – Lorsque l'on étudie une suite définie par un intégrale, l'intégration par parties permet souvent d'établir une relation de récurrence.

Démonstration
Posons $f = uv$. f est de classe C^1 sur $[a, b]$, donc dérivable de dérivée continue : $f' = u'v + uv'$. On obtient alors par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Or on a par ailleurs :

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\Big]_a^b = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b$$

ce qui permet de conclure. ■

Exemple

ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de ln sur $]0, +\infty[$ s'annulant en 1. Posons pour tout $t > 0$:

$$\begin{array}{llll} u(t) & = t & v(t) & = \ln(t) \\ u'(t) & = 1 & v'(t) & = \frac{1}{t} \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Une intégration par parties donne :

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t \ln(t)\Big]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x \ln(x) - (x - 1)$$

$x \mapsto x \ln(x) - x + 1$ est donc l'unique primitive de ln sur $]0, +\infty[$ s'annulant en 1.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Méthode 3 **Intégrer $t \mapsto P(t)\cos t$, $t \mapsto P(t)\sin t$ ou $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^t$**

Pour intégrer des fonctions de la forme $t \mapsto P(t)\cos t$, $t \mapsto P(t)\sin t$ ou $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^t$ où P est un polynôme, on procédera à des intégrations par parties successives. À chaque étape, on dérive le polynôme, et on s'arrête lorsqu'on obtient un polynôme constant.

Exemple d'application

Calculons $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$. On pose pour tout $t \in [0,\pi]$:

$$\begin{array}{llll} u(t) &= \sin(t) & v(t) &= t^2 \\ u'(t) &= \cos(t) & v'(t) &= 2t \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\sin(t)\Big]_0^\pi - 2\int_0^\pi t\sin(t)\,\mathrm{d}t = -2\int_0^\pi t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose maintenant pour tout $t \in [0,\pi]$:

$$\begin{array}{llll} \varphi(t) &= -\cos(t) & \psi(t) &= t \\ \varphi'(t) &= \sin(t) & \psi'(t) &= 1 \end{array}$$

φ et ψ sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^\pi t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-t\cos(t)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)\,\mathrm{d}t = \pi + \Big[\sin(t)\Big]_0^\pi = \pi$$

On en déduit que : $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = -2\pi$.

17.4.2 Changement de variable

Théorème – Formule du changement de variable

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I, φ une fonction de classe C^1 sur J telle que $\varphi(J) \subset I$. Pour tous α et β dans J on a :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Remarques

1. On dit qu'on pose $u = \varphi(t)$ et que $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.
2. Les changements de variable non affines seront toujours indiqués.

Démonstration

f est continue sur I donc admet une primitive F sur I. On remarque qu'une primitive de $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ sur J est $t \mapsto F(\varphi(t))$. On a donc :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(\varphi(t))\Big]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

On conclut en remarquant que :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u = \Big[F(u)\Big]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \quad \blacksquare$$

Exemples

1. *Exemple où on donne la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.*

Calculons $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = t^3$. La fonction $t \mapsto t^3$ est de classe C^1 sur $[1,2]$. On a $u = 1$ quand $t = 1$ et $u = 8$ quand $t = 2$. Par ailleurs $\mathrm{d}u = 3t^2\mathrm{d}t$. Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)}\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 \frac{1}{3t^3(t^3+1)} \times 3t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^8 \frac{1}{3u(u+1)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_1^8 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\Big[\ln(u) - \ln(u+1)\Big]_1^8 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{16}{9}\right)\end{aligned}$$

2. *Exemple où on donne l'ancienne variable en fonction de la nouvelle.*

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$ en posant $u = \sin(t)$. La fonction sin est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $[0,1]$. On a $u = 0$ quand $t = 0$ et $u = 1$ quand $t = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs $\mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t$. Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(On a utilisé : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$.)

Proposition – *Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$ où $a > 0$.*

- *Si f est paire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Si f est impaire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Démonstration

D'après la relation de Chasles, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons $u = -t$. La fonction $t \mapsto -t$ est de classe C^1 sur $[-a,0]$. On a $u = a$ quand $t = -a$ et $u = 0$ quand $t = 0$. Par ailleurs, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$. Donc :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(-u)\times(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u$$

Si f est paire, on a donc :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

et si f est impaire, on a :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \blacksquare$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Synthèse

Savoirs

- propriétés des intégrales : linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance,
- inégalité de la moyenne,
- si f est continue et positive sur $[a, b]$: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow f$ est nulle sur $[a, b]$,
- convergence des sommes de Riemann,
- deux primitives d'une fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante,
- théorème fondamental de l'intégration,
- expression de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une primitive de f,
- solutions de l'équation différentielle $f'(x) = f(x)g(x)$,
- théorème de prolongement des fonctions de classe C^p,
- intégration par parties,
- changement de variable.

Savoir-faire

- étudier les fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$,
- montrer qu'une fonction prolongée est de classe C^p,
- intégrer des fonctions de la forme $t \mapsto P(t)\cos(t)$, $t \mapsto P(t)\sin(t)$ ou $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^t$ où P est un polynôme,
- calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, d'une intégration par parties ou d'un changement de variable.

Mots-clés

- Fonction en escalier,
- fonction continue par morceaux,
- intégrale d'une fonction continue sur un segment,
- sommes de Riemann,
- primitive d'une fonction sur un intervalle.

Tests de connaissances

17.1 Quelles sont les trois principales méthodes de calcul d'une intégrale ?

17.2 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ où $a < b$. Donner une condition suffisante pour que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

17.3 Pourquoi la fonction F suivante est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

$$F\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

17.4 Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes (on se placera sur un intervalle où la fonction est définie et continue) :

a) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ **b)** $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$

c) $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ **d)** $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

e) $x \mapsto \cos^2(x)$ **f)** $x \mapsto \dfrac{1}{2+x^2}$

17.5 Recherche de contre-exemples

Démontrer à l'aide de contre-exemples que toutes les affirmations suivantes sont **fausses** :

a) Si $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ alors :
$\forall t \in [0,1],\ f(t) \leqslant g(t)$

b) Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

c) Si f et g sont continues sur $[a, b]$ alors :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

d) (Difficile) Si $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors :
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 466.

■ Propriétés de l'intégrale

17.6

a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :
$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

b) En déduire que : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2\ln x}$.

17.7

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et P un polynôme à coefficients réels. On suppose que $\int_a^b (P(t))^2\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

17.8 Stricte positivité de l'intégrale ◎

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ où $a < b$. On définit la fonction F sur $[a, b]$ par :
$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est croissante sur $[a, b]$.

b) Montrer que si $F(b) = 0$ alors F est nulle sur $[a, b]$.

c) En déduire une démonstration du théorème de stricte positivité de l'intégrale énoncé page 451.

17.9

a) Calculer $\int_0^1 \tan(t)\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire l'existence et la valeur de :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right)$$
puis celle de :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{n}\right)\tan\left(\frac{k}{n}\right)$$

17.10 Oral ESCP 2009 ◎

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \exp\left(\frac{k}{2n}\right)$$

■ Recherche de primitives

17.11

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une primitive de la fonction intégrée :

$I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^3}$, $I_2 = \displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$,

$I_3 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$, $I_4 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$,

$I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta$, $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

17.12

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $f'(x) = f(x)\ln(x)$ où $x \in]0, +\infty[$,

b) $(1 + 2x^2)f'(x) = f(x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

17.13 ◎

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)f'(x) = f(x)$$

■ Intégration par parties

17.14 ◎

Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 (t^2 + 2t - 3)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, \qquad I_2 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin(2t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$I_5 = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^2\,\mathrm{d}t, \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

17.15 Lemme de Riemann-Lebesgue ◎

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer que :

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■ Changement de variable

17.16 ◎

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

$$I_1 = \int_0^3 \frac{t\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{poser } u = 1 + t^2$$

$$I_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}, \quad \text{poser } t = \mathrm{e}^x$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta}{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad \text{poser } s = \cos\theta$$

$$I_4 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x, \quad \text{poser } u = \frac{x}{x+1}$$

17.17

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

$$J_1 = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}, \quad \text{poser } x = 2\tan\varphi - 1$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t, \quad \text{poser } t = \cos(2\theta)$$

17.18 ◎

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

a) Prouver : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

b) En déduire : $\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$

■ Suite définie par une intégrale

17.19

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$

a) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

c) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

d) En déduire la limite et un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.

17.20

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

1) Calculer u_0 et u_1.

2.a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2.b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$.
2.c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

3.b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3.c) Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

17.21 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer I_0 et I_1.
b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.
c) À l'aide d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
d) En déduire une expression de I_n en fonction de n (on distinguera les cas n pair et n impair).
e) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

En déduire : $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

■ **Fonction définie par une intégrale**

17.22

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4+t^4}}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) À l'aide d'un changement de variable, montrer que f est impaire.

c) Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

d) Justifier la dérivabilité de f, calculer f' et dresser le tableau de variation de f.

17.23 ◎

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$.

2.a) Justifier que $\forall u \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^u \geqslant 1+u$.

2.b) En déduire que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

3.a) Montrer que : $\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\ln(x)$.

3.b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

4) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

17.24 Oral ESCP 2010 ◎

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On définit la fonction F sur $]0,+\infty[$ en posant :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \int_0^1 \frac{xf(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercices d'approfondissement

17.25 Méthode des trapèzes ◎

Soient f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose :

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

et on définit le réel $T_n(f)$ par :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}.$$

a) Montrer que $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers I. Justifier l'appellation *méthode des trapèzes* lorsque l'on approche I par $T_n(f)$.

b) Soit $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. À l'aide de deux intégrations par parties successives, établir la formule suivante (dite formule de MacLaurin) :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) Justifier l'existence d'un réel M majorant $|f''|$ sur $[a,b]$, puis en appliquant la formule de MacLaurin sur chaque intervalle $[a_k,a_{k+1}]$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|I - T_n(f)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

17.26 EDHEC 2008

On se propose dans cet exercice de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin k}{k}$$

est convergente et de calculer sa somme.

1) On désigne par f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2.a) On rappelle que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

Exprimer pour tout réel t, $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\dfrac{2k-1}{2}t\right)$.

2.b) En déduire que pour tous $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^n (-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\frac{t}{2}\right).$$

2.c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = (-1)^n\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.$$

3) Utiliser la première question pour conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

17.27 d'après EDHEC 1997

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \ln(2).$$

On admet qu'au voisinage de 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

1) On considère la fonction g définie par :

$$g(t) = \frac{\sin t - t}{t^2} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

1.a) Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t - t}{t^2}$.

1.b) En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

1.c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_x^{2x} g(t)dt = 0$.

1.d) En déduire que f est continue en 0.

2) Montrer à l'aide d'un changement de variable que f est paire.

3.a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

3.b) Montrer que pour tout x réel non nul, on a : $f'(x) = \dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{x^2}$.

3.c) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

3.d) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Indications

17.8 Pour cet exercice, on utilisera le théorème fondamental de l'intégration.

17.10 Poser $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$ et calculer $u_n + S_{2n}$.

17.13 Si f est solution alors elle vérifie l'équation différentielle $f'(x) = \dfrac{1}{x-1} f(x)$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

17.14

2) $\mathrm{Arctan}\,(t) = 1 \times \mathrm{Arctan}\,(t)$

3) $\sin(2t)\mathrm{e}^{\cos(t)} = 2\cos(t) \times \sin(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}$

4) $\dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} = t \times \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$

6) $\dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} = t^2 \times \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

17.15 Effectuer une intégration par parties en dérivant f, puis utiliser l'inégalité de la moyenne et le théorème d'encadrement.

17.16 I_2 : on utilisera $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{t+1}$.

17.18

a) Effectuer le changement de variable $u = t - T$.

b) On a : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

17.23

1) On cherche les valeurs de x pour lesquelles la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}$ est continue sur le segment d'extrémités x et x^2.

2.b) Attention à l'ordre des bornes de l'intégrale : x^2 n'est pas toujours supérieur à x.

3.a) Majorer $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ sur $[x, x^2]$.

17.24 Pour la continuité, on commencera par prouver la continuité en x_0 de $G : x \in]0, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$. À cette fin, on peut majorer $|G(x_0 + h) - G(x_0)|$ par une quantité de limite nulle quand $h \to 0$.

Pour la limite de F en $+\infty$, on majorera $\left|F(x) - \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|$ par une quantité de limite nulle quand $x \to +\infty$.

17.25

a) Reconnaître des sommes de Riemann dans l'expression de $T_n(f)$.

b) Partir de l'intégrale du membre de droite.

c) Pour calculer $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_k)(a_{k+1} - t)\,\mathrm{d}t$, on peut poser $u = t - a_k$.

17.1

Les trois principales méthodes de calcul d'une intégrale sont : l'utilisation d'une primitive de la fonction intégrée, l'intégration par parties et le changement de variable.

17.2

On suppose f continue sur $[a,b]$ où $a<b$. Si f est positive et non nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

17.3

$f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. En particulier F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f continue, donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

17.4

a) Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$ sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{2}{\sqrt{x}} = -2x^{-\frac{1}{2}}$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

f est du type « $\dfrac{u'}{u}$ » à une constante près, donc :

- une primitive de f sur $]-1,+\infty[$ est :
$$x \in]-1,+\infty[\mapsto \frac{1}{3}\ln|1+x^3| = \ln\sqrt[3]{1+x^3}$$
- une primitive de f sur $]-\infty,-1[$ est
$$x \in]-\infty,-1[\mapsto \frac{1}{3}\ln|1+x^3| = \ln\sqrt[3]{-1-x^3}$$

c) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2(x)$. Une autre est $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos^2(x)$.

d) Soit I un intervalle de la forme : $I =]k\pi,(k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Alors, $x \mapsto \ln|\sin(x)|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur I.

e) Une primitive de $x \mapsto \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

f) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
Donc $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

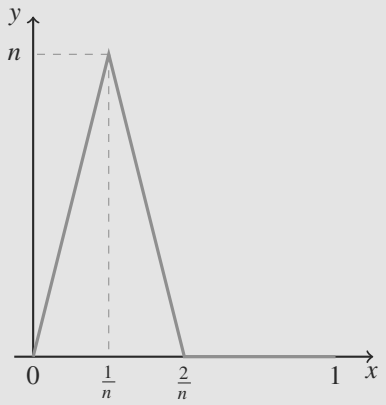
17.5

a) Soient $f : t \in [0,1] \mapsto 1-t$ et $g : t \in [0,1] \mapsto 2t$.
$$\frac{1}{2} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 1$$
Mais $f(0) > g(0)$ (et même : $\forall t \in [0,\frac{1}{3}[,\ f(t) > g(t)$).

b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pourtant la fonction cosinus n'est pas nulle sur $[0,\pi]$.

c) Par exemple :
$$\frac{1}{3} = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \neq \int_0^1 t\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$$

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction f_n définie sur $[0,1]$ et dont le graphe est le suivant :



Montrons que : $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

- si $t = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(0) = 0$,
- si $t \in]0,1]$, alors comme $\frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a à partir d'un certain rang $\frac{2}{n} \leqslant t$. À partir de ce rang, on a alors : $f_n(t) = 0$, donc $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pourtant $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \not\to 0$. En effet, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire du triangle délimité par le graphe de f_n, d'où :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\times\frac{2}{n}\times n = 1.$$

17.6

a) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x,2x]$, on a par croissance de la fonction $u \mapsto u^2$ sur $[0,+\infty[$:
$$1 < 1+x^2 \leqslant 1+t^2 \leqslant 1+(2x)^2$$
puis par stricte croissance de ln sur $]0,+\infty[$:
$$0 < \ln(1+x^2) \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(1+4x^2)$$
Finalement :
$$\forall t \in [x,2x],\ \frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$
De plus la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ est continue sur $[x,2x]$ (et $x \leqslant 2x$) donc par croissance de l'intégrale, il vient :
$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)} \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+x^2)}$$
ce qui donne :
$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$
Les deux intégrales qui encadrent se calculent facilement, puisqu'on intègre une constante (par rapport à la variable d'intégration).

b) • Montrons d'abord que $\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$. On a pour tout $x > 1$:
$$\frac{\ln(1+x^2)}{2\ln(x)} = \frac{\ln(x^2)+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln(x^2)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\ln(x^2)}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Or $\ln(1+\frac{1}{x^2}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(x^2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{2\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et ainsi $\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$. On obtient de façon analogue $\ln(1+4x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$.

• Pour tout $x > 1$, divisons chaque membre de l'inégalité obtenue en **a)** par $\dfrac{x}{2\ln(x)}$ qui est strictement positif :

$$\frac{2\ln(x)}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \frac{2\ln(x)}{x}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{2\ln(x)}{\ln(1+x^2)}$$

Le théorème d'encadrement donne alors :

$$\frac{2\ln(x)}{x}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

autrement dit : $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2\ln x}$.

17.7

La fonction $t \mapsto (P(t))^2$ est **continue** et **positive** sur $[a,b]$ et $a < b$. Ainsi, de $\displaystyle\int_a^b (P(t))^2\,\mathrm{d}t = 0$, on déduit que :

$$\forall t \in [a,b],\ (P(t))^2 = 0 \quad i.e. \quad \forall t \in [a,b],\ P(t) = 0$$

Donc tout élément de $[a,b]$ est racine de P. Comme $a < b$, on obtient une infinité de racines pour P, et P est donc le polynôme nul.

17.8

a) f est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, F est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en a. On a donc F dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$, or f est positive sur $[a,b]$, donc F est croissante sur $[a,b]$.

b) F étant croissante sur $[a,b]$, on a :

$$\forall x \in [a,b],\ F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)$$

Or F s'annule en a et on suppose de plus que $F(b) = 0$. On a donc : $\forall x \in [a,b],\ F(x) = 0$ c'est-à-dire F est nulle sur $[a,b]$.

c) On est sous les mêmes hypothèses que le théorème de stricte positivité : f est continue et positive sur $[a,b]$ où $a < b$.

➜ On veut montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \ \Leftrightarrow\ f \text{ est nulle sur } [a,b]$$

• si f est nulle sur $[a,b]$ alors son intégrale sur $[a,b]$ est nulle.

• étudions la réciproque : si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, cela signifie que $F(b) = 0$. D'après **b)**, F est alors nulle sur $[a,b]$, donc sa dérivée f est nulle sur $[a,b]$.

➜ On veut maintenant montrer que :

$$(1)\ :\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0 \ \Leftrightarrow\ f \text{ non nulle sur } [a,b]$$

Si deux assertions sont équivalentes, alors leurs négations sont équivalentes. Ce que l'on vient de démontrer nous donne donc :

$$(2)\ :\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0 \ \Leftrightarrow\ f \text{ non nulle sur } [a,b]$$

Or f étant positive sur $[a,b]$, la positivité de l'intégrale (à ne pas confondre avec la stricte positivité) donne : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Par conséquent :

$$(3)\ :\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0 \ \Leftrightarrow\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

De (2) et (3), on déduit (1).

17.9

a) tan est continue sur $[0,1]$ et :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[-\ln|\cos(t)|\Big]_0^1 = -\ln(\cos(1))\end{aligned}$$

b) $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction continue tan sur $[0,1]$. Par conséquent :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \tan(t)\,\mathrm{d}t = -\ln(\cos(1))$$

Par ailleurs :

$$\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right)\tan\left(\frac{k}{n}\right) = \tan\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k}{n}\right)$$

De plus $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ puis :

$$\tan\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k}{n}\right)$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right)\tan\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(\cos(1))$$

17.10

Le but est de se ramener à des sommes de Riemann.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{k}{n}\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}u_n + S_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}((-1)^k+1)\exp\left(\frac{k}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n} 2\exp\left(\frac{k}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{2j}{2n}\right) \\ &= S_n\end{aligned}$$

En effet les entiers pairs entre 1 et $2n$ sont les entiers de la forme $k = 2j$ où $j \in [\![1,n]\!]$.

Or S_n est une somme de Riemann de la fonction continue exp sur $[0, 1]$. Donc :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1.$$

Par conséquent, $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 1$. Mais $u_n = S_n - S_{2n}$, donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

17.11

1) $s \mapsto \dfrac{1}{s^3}$ est continue sur $[1, 2]$.

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^3} = \int_1^2 s^{-3}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{2}s^{-2}\right]_1^2.$$

Donc $I_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}2^{-2}$, d'où $\boxed{I_1 = \dfrac{3}{8}.}$

2) $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, 2]$ et de la forme $u'\mathrm{e}^u$ à une constante près.

$$\int_0^2 t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^2, \text{ donc } \boxed{I_2 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-4}).}$$

3) $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1, \mathrm{e}]$ et de la forme $u'u$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^{\mathrm{e}}, \text{ donc } \boxed{I_3 = \frac{1}{2}.}$$

4) $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est continue sur $[\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]$ (ln ne s'annule pas sur cet intervalle) et de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln\big|\ln t\big|\Big]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}.$$

Donc $I_4 = \ln|2| - \ln|1|$. D'où $\boxed{I_4 = \ln 2.}$

5) $\theta \mapsto \dfrac{\sin\theta}{\cos^4\theta}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ (cos ne s'annule pas sur cet intervalle) et de la forme $u'u^{-4}$ à une constante près.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{3}\cos^{-3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Donc $I_5 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} - \dfrac{1}{3}$, d'où $\boxed{I_5 = \dfrac{7}{3}.}$

6) $u \mapsto \dfrac{u^2}{u^2+1}$ est continue sur $[0, 1]$.

$$\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u.$$

Donc $I_6 = \Big[u - \mathrm{Arctan}\,(u)\Big]_0^1$. Or $\mathrm{Arctan}\,(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Donc $\boxed{I_6 = 1 - \dfrac{\pi}{4}.}$

17.12

a) ln est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et admet $x \mapsto x\ln(x) - x$ pour primitive sur ce même intervalle.

Par conséquent, les solutions de l'équation différentielle $f'(x) = f(x)\ln(x)$ sont les fonctions de la forme $x \in]0, +\infty[\mapsto K\exp(x\ln(x) - x)$ où K est une constante réelle.

Or $\forall x > 0,\ \exp(x\ln(x) - x) = x^x\mathrm{e}^{-x} = \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)^x$.

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \in]0, +\infty[\mapsto K\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x}$$

où K est une constante réelle.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + 2x^2 \neq 0$. Il s'agit donc de résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$f'(x) = \frac{1}{1+2x^2}f(x)$$

Or $x \mapsto \dfrac{1}{1+2x^2} = \dfrac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{2}x)$ sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto K\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{2}x)\right)}$$

où K est une constante réelle.

17.13

• **Analyse :** supposons que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)f'(x) = f(x)$$

Alors pour tout x dans l'intervalle $]1, +\infty[$, on a :

$$(\bigstar)\ f'(x) = \frac{1}{x-1}f(x)$$

Or $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et admet $x \mapsto \ln(x-1)$ pour primitive sur ce même intervalle. Donc il existe une constante $K_1 \in \mathbb{R}$ telle que :

$$(1)\ \forall x > 1,\ f(x) = K_1\exp\big(\ln(x-1)\big) = K_1(x-1)$$

Or f vérifie également l'équation différentielle $(\bigstar)$ sur $]-\infty, 1[$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ admet $x \mapsto \ln|x-1| = \ln(1-x)$ pour primitive sur cet intervalle. Donc il existe une constante $K_2 \in \mathbb{R}$ telle que :

$$(2)\ \forall x < 1,\ f(x) = K_2\exp\big(\ln(1-x)\big) = K_2(1-x)$$

Étudions maintenant la fonction f au point 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$. Or d'après (1), $f(x) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 0$, et d'après (2), $f(x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 0$, donc $f(1) = 0$.

Ainsi les relations (1) et (2) sont valables respectivement pour $x \geqslant 1$ et $x \leqslant 1$.

Ensuite, f est dérivable en 1 et (1) donne la dérivée de f à droite en 1 : $f'_d(1) = K_1$. De même, (2) donne la dérivée de f à gauche en 1 : $f'_g(1) = -K_2$.

On en déduit que $K_2 = -K_1$ et donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = K_1(x-1)$$

• **Synthèse :** réciproquement, supposons que f soit de la forme : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto K(x-1)$ où K est une constante réelle. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = K$. Donc f vérifie bien l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)f'(x) = f(x)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

En conclusion, les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \mapsto K(x-1)}$$

où K est une constante réelle.

17.14

1) Posons pour tout $t \in [1,2]$:

$$\begin{array}{llll} u(t) &= \mathrm{e}^t & v(t) &= t^2+2t-3 \\ u'(t) &= \mathrm{e}^t & v'(t) &= 2(t+1) \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[1,2]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} &\int_1^2 (t^2+2t-3)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[(t^2+2t-3)\mathrm{e}^t\right]_1^2 - \int_1^2 2(t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= 5\mathrm{e}^2 - 2\int_1^2 (t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Posons pour tout $t \in [1,2]$:

$$\begin{array}{llll} \varphi(t) &= \mathrm{e}^t & \psi(t) &= t+1 \\ \varphi'(t) &= \mathrm{e}^t & \psi'(t) &= 1 \end{array}$$

φ et ψ sont de classe C^1 sur $[1,2]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_1^2 (t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= \left[(t+1)\mathrm{e}^t\right]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= 3\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^t\right]_1^2 = 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} \end{aligned}$$

Donc $I_1 = 5\mathrm{e}^2 - 2(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})$ d'où : $\boxed{I_1 = \mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}.}$

2) Posons pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{array}{llll} u(t) &= t & v(t) &= \mathrm{Arctan}\,(t) \\ u'(t) &= 1 & v'(t) &= \dfrac{1}{1+t^2} \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t\mathrm{Arctan}\,(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 \end{aligned}$$

Il vient : $\boxed{I_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(2).}$

3) Notons que : $I_3 = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ et posons pour tout $t \in [0, \pi/2]$:

$$\begin{array}{llll} u(t) &= -\mathrm{e}^{\cos(t)} & v(t) &= \cos(t) \\ u'(t) &= \sin(t)\mathrm{e}^{\cos(t)} & v'(t) &= -\sin(t) \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e} + \left[\mathrm{e}^{\cos(t)}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \mathrm{e} + 1 - \mathrm{e} = 1 \quad \text{donc } \boxed{I_3 = 2.} \end{aligned}$$

4) Posons pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{array}{llll} u(t) &= -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+t^2} & v(t) &= t \\ u'(t) &= \dfrac{t}{(1+t^2)^2} & v'(t) &= 1 \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\mathrm{Arctan}\,(t)\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{I_4 = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}.}$

5) Posons pour tout $t \in [1,\mathrm{e}]$:

$$\begin{array}{llll} u(t) &= t\ln(t) - t & v(t) &= \ln(t) \\ u'(t) &= \ln(t) & v'(t) &= \dfrac{1}{t} \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[1,\mathrm{e}]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t &= \left[\ln(t)(t\ln(t)-t)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t)-1)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - \left[(t\ln(t)-t) - t\right]_1^{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Il vient : $\boxed{I_5 = \mathrm{e} - 2.}$

Remarque : on peut également poser $u(t) = t$ et $v(t) = (\ln(t))^2$.

6) Posons pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{array}{llll} u(t) &= \sqrt{1+t^2} & v(t) &= t^2 \\ u'(t) &= \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} & v'(t) &= 2t \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t &= \left[t^2\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{2} - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On obtient : $\boxed{I_6 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}.}$

17.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $t \in [0,\pi]$:

$$u(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt) \quad v(t) = f(t)$$
$$u'(t) = \sin(nt) \quad v'(t) = f'(t)$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[-\frac{1}{n}f(t)\cos(nt)\Big]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{n}((-1)^n f(\pi) - f(0)) + \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'une part, $\left|\dfrac{(-1)^n f(\pi)}{n}\right| = \dfrac{|f(\pi)|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$(1) \ : \ \frac{1}{n}((-1)^n f(\pi) - f(0)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de la moyenne (on a bien $0 \leqslant \pi$) :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{n}\int_0^\pi |f'(t)\cos(nt)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement :

$$(2) \ : \ \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De (1) et (2), on déduit alors que :

$$\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

17.16

1) La fonction $t \mapsto 1+t^2$ est de classe C^1 sur $[0,3]$. On a $u = 1$ quand $t = 0$, et $u = 10$ quand $t = 3$. Par ailleurs, $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$. Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{t\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{10}\frac{\ln(u)}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(\ln(u))^2\Big]_1^{10}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{I_1 = \dfrac{1}{4}\ln^2(10).}$

2) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe C^1 sur $[\ln 2, \ln 3]$. On a $t = 2$ quand $x = \ln 2$, et $t = 3$ quand $x = \ln 3$. Par ailleurs, $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} &= \int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\ &= \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}\\ &= \frac{1}{2}\int_2^3\frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int_2^3\frac{\mathrm{d}t}{t+1}\\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t-1)\Big]_2^3 - \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1)\Big]_2^3\end{aligned}$$

Il vient : $\boxed{I_2 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right).}$

3) La fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ est de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$. On a $s = 1$ quand $\theta = 0$, et $s = 0$ quand $\theta = \pi/2$. Par ailleurs, $\mathrm{d}s = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$. Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3\theta}{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\int_1^0\frac{1-s^2}{1+s}\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1(1-s)\,\mathrm{d}s\\ &= \Big[s - \frac{1}{2}s^2\Big]_0^1\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{I_3 = \dfrac{1}{2}.}$

4) La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est de classe C^1 sur $[\frac{1}{2},1]$. On a $u = \frac{1}{3}$ quand $x = \frac{1}{2}$, et $u = \frac{1}{2}$ quand $x = 1$. Par ailleurs, $\mathrm{d}u = \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$. Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x(x+1)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x+1}{x}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(u)}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \Big[\frac{1}{2}(\ln(u))^2\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Or $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ donc $\boxed{I_6 = \dfrac{1}{2}(\ln^2 2 - \ln^2 3).}$

17.17

1) $\varphi \mapsto 2\tan\varphi - 1$ est de classe C^1 sur $[0,\pi/4]$. On a $x = -1$ quand $\varphi = 0$, et $x = 1$ quand $\varphi = \pi/4$. Par ailleurs, $\mathrm{d}x = 2(1+\tan^2\varphi)\mathrm{d}\varphi$. Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2\varphi}{(2\tan\varphi-1)^2+2(2\tan\varphi-1)+5}\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2\varphi}{4(1+\tan^2\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{donc } \boxed{J_1 = \frac{\pi}{8}}\end{aligned}$$

2) $\theta \mapsto \cos(2\theta)$ est de classe C^1 sur $[\pi/6,\pi/4]$. On a $t = 0$ quand $\theta = \pi/4$, et $t = \frac{1}{2}$ quand $\theta = \pi/6$. Par ailleurs, $\mathrm{d}t = -2\sin(2\theta)\mathrm{d}\theta$. Donc par changement de variable :

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t &= -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{1-\cos(2\theta)}}\sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}}\sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right|\sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Il vient : $\boxed{J_2 = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.}$

17.18

a) Quitte à échanger les bornes des intégrales, on peut supposer que $a \leqslant b$. On pose $u = t - T$. La fonction $t \mapsto t - T$ est de classe C^1 sur $[a+T, b+T]$. On a $u = a$ quand $t = a + T$, et $u = b$ quand $t = b + T$. Par ailleurs, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. Par changement de variable, on obtient :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u+T)\,\mathrm{d}u$$

Mais f est T-périodique donc :

$$\int_a^b f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a bien établi que :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

b) D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or d'après la question **a)** :

$$\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0+T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant à nouveau la relation de Chasles :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

17.19

a) Par croissance de ln, on a :

$$\forall x \in [1,\mathrm{e}],\ 0 \leqslant \ln x \leqslant 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [1,\mathrm{e}],\ 0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$$

Par croissance de l'intégrale (car $1 \leqslant \mathrm{e}$), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

On en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 et décroissante. Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b) Posons pour tout $x \in [1,\mathrm{e}]$:

$$u(x) = x \quad v(x) = (\ln x)^{n+1}$$
$$u'(x) = 1 \quad v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$$

u et v sont de classe C^1 sur $[1,\mathrm{e}]$, donc une intégration par parties donne :

$$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \Big[x(\ln x)^{n+1}\Big]_1^{\mathrm{e}} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

On obtient : $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

c) On a vu en **a)** que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant 0$.

Par ailleurs, on en déduit avec **b)** que :

$$I_n = \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

On a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

d) $\dfrac{\mathrm{e}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après **c)** et le théorème d'encadrement, on a $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

On a vu en **c)** que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{\mathrm{e} - I_{n+1}}{n+1}$.

Or $\mathrm{e} - I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} \neq 0$ et $n + 1 \sim n$ donc $\boxed{I_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{n}}$.

17.20

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+t} = \Big[\ln(2+t)\Big]_0^1$ donc $\boxed{u_0 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+2t} = \Big[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\Big]_0^1$ d'où $\boxed{u_1 = \frac{1}{2}\ln(3)}$.

2.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^{n+1} \leqslant t^n$$

On en déduit que :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 < 1 + t + t^{n+1} \leqslant 1 + t + t^n$$

puis que :

$$\forall t \in [0,1],\ \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t+t^{n+1}}$$

Par croissance de l'intégrale (car $0 \leqslant 1$), il vient : $u_n \leqslant u_{n+1}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2.b) Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$0 < 1 + t \leqslant 1 + t + t^n$$

dont on déduit :

$$\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$$

puis par croissance de l'intégrale :

$$I_n \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln(2).$$

2.c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par ln(2), donc elle converge.

3.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}\\ &= \int_0^1 \frac{(1+t+t^n)-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\,\mathrm{d}t.}$$

3.b) Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$1 + t \geqslant 1 \quad \text{et} \quad 1 + t + t^n \geqslant 1$$

et par suite :

$$\frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leqslant t^n$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\ln(2) - u_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

3.c) De **2.b)** et **3.b)**, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln(2) - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

puis par encadrement : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).}$

17.21

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$.

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\pi/2}$ donc $\boxed{I_1 = 1}$.

b) Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a :

$$0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1.$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,\pi/2],\ 0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$$

Par croissance de l'intégrale (car $0 \leqslant \frac{\pi}{2}$), il vient :

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Par conséquent, elle converge.

c) Pour tout $t \in [0,\pi/2]$, posons :

$$\begin{array}{lll} u(t) = -\cos(t), & v(t) = \sin^{n+1}(t), \\ u'(t) = \sin(t), & v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t). \end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\Big]_0^{\pi/2} \\ &\quad +(n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On obtient : $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$, d'où :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n.}$$

d) Distinguons les cas n pair et n impair.

• si $n = 2p$: alors on a

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2} \\ &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2}I_0 \\ &= \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\times\cdots\times 2\times 1}{(2p)^2(2p-2)^2\times\cdots\times 2^2}I_0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.}$

• si $n = 2p+1$: alors on a

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1}I_{2p-1} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3}I_1 \\ &= \frac{(2p)^2(2p-2)^2\times\cdots\times 2^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{I_{2p+1} = \frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}.}$

e) Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)I_nI_{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après **c)**, $I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_{n-1}$ et donc :

$$u_n = (n+1)I_n\frac{n}{n+1}I_{n-1} = nI_{n-1}I_n = u_{n-1}$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Or $u_0 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

On a vu en **b)** que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$$

et comme de plus $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (toujours d'après **b)**), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nI_nI_{n+1} \leqslant nI_n^2 \leqslant nI_{n-1}I_n$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n}{n+1}u_n \leqslant nI_n^2 \leqslant u_{n-1}$$

Or $\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ et $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

Par encadrement, on obtient : $nI_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

On en déduit : $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$, puis $\sqrt{I_n^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$, donc $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

17.22

a) $t \mapsto 4 + t^4$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[4,+\infty[$ et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $[4,+\infty[$. Par composition, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et par conséquent sur le segment d'extrémités x et $2x$, quel que soit le réel x. Donc f

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4+t^4}}$.
On pose $u = -t$. La fonction $t \mapsto -t$ est de classe C^1 sur le segment d'extrémités $-x$ et $-2x$. On a $u = x$ quand $t = -x$, et $u = 2x$ quand $t = -2x$. Par ailleurs, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$. Donc par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4+t^4}} &= -\int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4+(-u)^4}} \\ &= -\int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4+u^4}} \\ &= -f(x)\end{aligned}$$

Donc f est impaire.

c) Soit $x \geqslant 0$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, on a :

$$0 < \sqrt{4+x^4} \leqslant \sqrt{4+t^4}$$

dont on déduit :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}.$$

Par croissance de l'intégrale (on a bien $x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$), il vient :

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4+t^4}} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4+x^4}}$$

et ainsi :

$$(\bigstar) \ : \ \forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}.$$

Or $4+x^4 \underset{+\infty}{\sim} x^4$ donc $\dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$. Donc $\dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Avec $(\bigstar)$, on en déduit par encadrement que $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

d) On a déjà vu que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. On peut alors écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F(2x) - F(x).$$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{4+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} \\ &= \frac{\sqrt{4+x^4} - \sqrt{1+4x^4}}{\sqrt{(1+4x^4)(4+x^4)}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de :

$$\sqrt{4+x^4} - \sqrt{1+4x^4} = \frac{(4+x^4)-(1+4x^4)}{\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4}} = \frac{3(1-x^4)}{\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4}}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de :

$$1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$$

d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘		↗		↘	0

17.23

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc l'intégrale $f(x)$ est définie si et seulement si le segment I d'extrémités x et x^2 est inclus dans $\mathbb{R}^*$. Or, pour tout $x \leqslant 0$, on a $x^2 \geqslant 0$, donc $0 \in I$ et l'intégrale $f(x)$ n'est pas définie. En revanche, pour tout $x > 0$, on a $I \subset]0, +\infty[$ donc l'intégrale $f(x)$ est définie. En conclusion, l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.

2.a) La fonction exponentielle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est $\exp'' = \exp$, qui est positive sur $\mathbb{R}$. Donc exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Or la fonction tangente en l'origine est $u \mapsto \exp(0) + u\exp'(0) = 1 + u$. Donc $\forall u \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$.

2.b) Pour tout $x \in]0, 1]$, on a $x^2 \leqslant x$. D'après la question précédente et la croissance de l'intégrale, on obtient :

$$-f(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1-t^2}{t}\,\mathrm{d}t$$

Donc $f(x) \leqslant -\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1-t^2}{t}\,\mathrm{d}t$. Ensuite :

$$\begin{aligned}-\int_{x^2}^{x} \frac{1-t^2}{t}\,\mathrm{d}t &= -\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{x^2}^{x} t\,\mathrm{d}t \\ &= -\Big[\ln(t)\Big]_{x^2}^{x} + \Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_{x^2}^{x} \\ &= \ln(x^2) - \ln(x) + \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4) \\ &= \ln(x) + \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4) \\ &\underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty\end{aligned}$$

On en déduit par comparaison que $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque : on retiendra qu'il faut toujours vérifier que les bornes de l'intégrale sont « dans le bon ordre », avant d'appliquer la croissance de l'intégrale.

3.a) Soit $x \geqslant 1$. On a $x \leqslant x^2$ et donc :

$$\forall t \in [x, x^2],\ -x^4 \leqslant -t^2 \leqslant -x^2$$

Donc par croissance de l'exponentielle :

$$\forall t \in [x, x^2],\ 0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^4} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$$

puis par croissance de l'intégrale (et $x \leqslant x^2$) :

$$\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Mais : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2}\Big[\ln(t)\Big]_x^{x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}\ln(x)$.
Donc : $\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\ln(x)$.

3.b) Par croissance comparée : $u \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^u)$. Or $x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $x^2 \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)$.

En outre, par croissance comparée, $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o\left(x^2\right)$.
Ainsi, $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)$, donc $\mathrm{e}^{-x^2}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
La question **3.a)** permet d'en déduire par encadrement : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

4) La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}$ étant continue sur $]0,+\infty[$, elle admet une primitive F sur ce même intervalle. On peut alors écrire :

$$\forall x > 0,\ f(x) = F(x^2) - F(x)$$

Or $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et F est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc, par composition, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ f'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x)\\ &= \frac{2x\mathrm{e}^{-x^4}}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\\ &= \boxed{\frac{2\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x}}.\end{aligned}$$

17.24

Remarquons avant tout que F est bien définie sur $]0,+\infty[$. En effet, si $x > 0$, alors $t \mapsto x + t$ ne s'annule pas sur $[0,1]$, donc $t \mapsto \dfrac{xf(t)}{x+t}$ est définie et continue sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Par suite, l'intégrale $F(x)$ est définie.

• **Continuité de F.** Pour tout $x > 0$:

$$F(x) = xG(x) \quad \text{où} \quad G(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

Il suffit donc de prouver la continuité de G sur $]0,+\infty[$. Soit $x_0 \in]0,+\infty[$, pour tout réel h tel que $x_0 + h \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\left|G(x_0+h) - G(x_0)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{-hf(t)}{(x_0+t)(x_0+h+t)}\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant |h| \int_0^1 \frac{|f(t)|}{(x_0+t)(x_0+h+t)}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{|h|}{x_0+h}\int_0^1 \frac{|f(t)|}{(x_0+t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La dernière inégalité se justifie par :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 < x_0 + h \leqslant x_0 + h + t$$

Or $\dfrac{|h|}{x_0+h} \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|}{(x_0+t)}\,\mathrm{d}t$ est constant par rapport à h, d'où :

$$\frac{|h|}{x_0+h}\int_0^1 \frac{|f(t)|}{(x_0+t)}\,\mathrm{d}t \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$$

puis par encadrement : $G(x_0+h) \underset{h\to0}{\longrightarrow} G(x_0)$.
Donc G est continue en tout $x_0 \in]0,+\infty[$, c'est-à-dire G est continue sur $]0,+\infty[$ et par conséquent F est continue sur $]0,+\infty[$.

• **Limite de F en $+\infty$.** Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\left|F(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 \frac{-tf(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_0^1 \frac{t|f(t)|}{x+t}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La dernière inégalité se justifie par :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 < x \leqslant x + t$$

Or $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$ est constant par rapport à x, d'où

$$\frac{1}{x}\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Puis par encadrement : $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

17.25

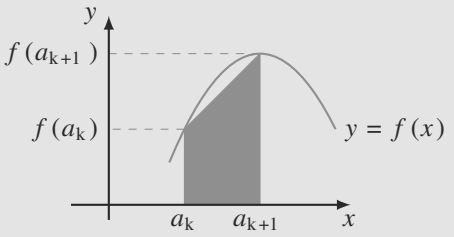
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T_n(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right)$$

Or $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ et $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$ sont les sommes de Riemann de la fonction f sur $[a,b]$. Comme f est continue sur $[a,b]$, ces deux sommes tendent vers I quand $n \to +\infty$. Donc :

$$T_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I.$$

$\dfrac{b-a}{n} \times \dfrac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$ est l'aire du trapèze délimité par les points de coordonnées $(a_k,0)$, $(a_{k+1},0)$, $(a_{k+1},f(a_{k+1}))$ et $(a_k,f(a_k))$. La méthode s'appelle méthode des trapèzes car on approche l'aire délimitée par la courbe de f par la somme d'aires de trapèzes.



b) On part de l'intégrale qui figure dans le membre de droite. Pour tout $t \in [\alpha,\beta]$, posons :

$$\begin{aligned}u(t) &= f'(t) \quad v(t) = (t-\alpha)(t-\beta)\\ u'(t) &= f''(t) \quad v'(t) = 2t - \alpha - \beta\end{aligned}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$, donc une intégration par par-

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

ties donne :

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)f''(t)\,\mathrm{d}t\\&= \Big[(t-\alpha)(t-\beta)f'(t)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (2t-\alpha-\beta)f'(t)\,\mathrm{d}t\\&= -\int_\alpha^\beta (2t-\alpha-\beta)f'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [\alpha,\beta]$, posons :

$$\begin{array}{llll}\varphi(t) &= f(t) & \psi(t) &= 2t-\alpha-\beta\\ \varphi'(t) &= f'(t) & \psi'(t) &= 2\end{array}$$

φ et ψ sont de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta (2t-\alpha-\beta)f'(t)\,\mathrm{d}t\\&= \Big[(2t-\alpha-\beta)f(t)\Big]_\alpha^\beta - 2\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\\&= (\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha)) - 2\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t &= (\beta-\alpha)\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}\\&\quad+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)f''(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

c) La fonction f'' est continue sur le segment $[a,b]$ (car f est de classe C^2) donc elle est bornée sur ce segment : autrement dit, il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ |f''(x)| \leqslant M.$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, appliquons la formule de MacLaurin sur $[a_k, a_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{b-a}{n}\times\frac{f(a_{k+1})+f(a_k)}{2}\\&\quad+\frac{1}{2}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)(t-a_{k+1})f''(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On additionne ces égalités, et grâce à la relation de Chasles et à la définition de $T_n(f)$, on obtient :

$$I = T_n(f) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)(t-a_{k+1})f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'inégalité triangulaire puis l'inégalité de la moyenne donnent alors :

$$\begin{aligned}|I-T_n(f)| &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)(t-a_{k+1})f''(t)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |(t-a_k)(t-a_{k+1})f''(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant \frac{1}{2}M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |(t-a_k)(t-a_{k+1})|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or le changement de variable affine $u = t - a_k$ donne :

$$\begin{aligned}&\int_{a_k}^{a_{k+1}} |(t-a_k)(t-a_{k+1})|\,\mathrm{d}t\\&= \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)(a_{k+1}-t)\,\mathrm{d}t\\&= \int_0^{a_{k+1}-a_k} u(a_{k+1}-a_k-u)\,\mathrm{d}u\\&= \Big[\frac{1}{2}(a_{k+1}-a_k)u^2 - \frac{1}{3}u^3\Big]_0^{a_{k+1}-a_k}\\&= \frac{1}{6}(a_{k+1}-a_k)^3 = \frac{(b-a)^3}{6n^3}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$|I-T_n(f)| \leqslant \frac{1}{2}M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{6n^3}$$

et on en conclut que :

$$|I-T_n(f)| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

17.26

1) Soit $\lambda > 0$. On pose pour tout $t \in [a,b]$:

$$\begin{array}{llll}u(t) &= \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t) & v(t) &= f(t)\\ u'(t) &= \cos(\lambda t) & v'(t) &= f'(t)\end{array}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\\&= \Big[\frac{1}{\lambda}f(t)\sin(\lambda t)\Big]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\\&= \frac{f(b)\sin(\lambda b)-f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'une part :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\lambda}(f(b)\sin(\lambda b)-f(a)\sin(\lambda a))\right|\\&\leqslant \frac{1}{\lambda}\big(\,|f(b)\sin(\lambda b)| + |f(a)\sin(\lambda a)|\,\big)\\&\leqslant \frac{1}{\lambda}\big(\,|f(b)| + |f(a)|\,\big)\end{aligned}$$

donc par encadrement :

$$(1)\ :\ \frac{1}{\lambda}(f(b)\sin(\lambda b)-f(a)\sin(\lambda a)) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part, d'après l'inégalité de la moyenne (car $a \leqslant b$), il vient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement :

$$(2)\ :\ \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De (1) et (2), on déduit alors que :

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.a) L'énoncé rappelle que :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

Donc pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(-b)-\sin(a)\sin(-b)\\ &= \cos a\cos b+\sin a\sin b\end{aligned}$$

Par addition, on obtient :

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}+kt\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}-kt\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t+2kt}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t-2kt}{2}\right)\end{aligned}$$

Or $\cos\left(\dfrac{t-2kt}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{2kt-t}{2}\right)$ donc :

$$\boxed{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)}$$

2.b) Soit $t\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)+\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\\ &\underset{j=k-1}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\cos\left(\frac{2j+1}{2}t\right)\\ &= \frac{1}{2}(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\frac{1}{2}(-1)^0\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\cos\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

2.c) Pour tout $t\in[0,1]$, on a $0\leqslant\frac{t}{2}<\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{t}{2}\neq 0$. De **2.b)**, on peut alors déduire pour $t\in[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)=(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}$$

Toutes les fonctions en présence sont continues sur $[0,1]$. En intégrant l'égalité précédente sur $[0,1]$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}$$

Or pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,\mathrm{d}t=(-1)^k\Big[\frac{1}{k}\sin(kt)\Big]_0^1=(-1)^k\frac{\sin k}{k}$$

Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}.$$

3) Posons : $\forall t\in[0,1],\ f(t)=\dfrac{1}{2\cos\frac{t}{2}}$. f est de classe C^1 sur $[0,1]$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ ne s'annulant pas sur $[0,1]$.

D'après **1)**, on en déduit :

$$\int_0^1 f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Or $\dfrac{2n+1}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ donc :

$$\int_0^1 f(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Mais pour tout suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, on a $(-1)^n a_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. En effet $|(-1)^n a_n|=|a_n|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc :

$$(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Avec **2.c)**, on en déduit : $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\dfrac{1}{2}$.

17.27

1.a) D'après le résultat admis par l'énoncé, on a $\sin t-t\underset{0}{\sim}-\dfrac{t^3}{6}$ et donc $\dfrac{\sin t-t}{t^2}\underset{0}{\sim}-\dfrac{t}{6}$. D'où :

$$\boxed{\frac{\sin t-t}{t^2}\underset{t\to0}{\longrightarrow}0.}$$

1.b) g est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t-t}{t^2}=0=g(0)$ donc g est continue en 0, ainsi : g est continue sur $\mathbb{R}$.

1.c) g est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. G est continue sur $\mathbb{R}$ puisque dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée g. En particulier G est continue en 0. Ainsi :

$$\int_x^{2x}g(t)\,\mathrm{d}t=G(2x)-G(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}G(0)-G(0)=0$$

1.d) Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{2x}g(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_x^{2x}g(t)\,\mathrm{d}t+\ln(2x)-\ln(x)\\ &= \int_x^{2x}g(t)\,\mathrm{d}t+\ln(2)\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Avec **1.c)**, on en déduit :

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln(2) = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Posons $u = -t$. La fonction $t \mapsto -t$ est de classe C^1 sur le segment d'extrémités x et $2x$. On a $u = x$ quand $t = -x$, et $u = 2x$ quand $t = -2x$. Par ailleurs, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$. Donc par changement de variable, il vient (car sin est paire) :

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\int_x^{2x} \frac{\sin(-u)}{(-u)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u = f(x) \end{aligned}$$

Donc f est paire.

3.a) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc h admet une primitive H sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$, on a alors : $f(x) = H(2x) - H(x)$. Or H est dérivable de dérivée h sur $]0,+\infty[$, et par composition $x \mapsto H(2x)$ est également dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Par ailleurs f étant paire, elle est également dérivable sur $]-\infty,0[$. Donc : f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

3.b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a (en dérivant comme fonction composée) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2H'(2x) - H'(x) = \frac{2\sin(2x)}{4x^2} - \frac{\sin x}{x^2} \\ &= \frac{\sin 2x - 2\sin x}{2x^2} = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

où on a utilisé : $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

3.c) Notons φ la restriction de f à $[0,+\infty[$.

- ★ φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ car la fonction f' calculée ci-dessus est continue sur $]0,+\infty[$,
- ★ $f'(x) = \dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{2}x^3}{x^2} = -\dfrac{1}{2}x$ ainsi f' et donc φ' admettent 0 pour limite en 0^+,
- ★ f est continue en 0, donc φ également.

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, on en déduit que φ est C^1 sur $[0,+\infty[$ et $\varphi'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \varphi'(x) = 0$. Par conséquent, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.
Le même raisonnement appliqué à la restriction de f à $]-\infty,0]$ donne : f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.
De $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$, on déduit que f est dérivable en 0 et que

$$\boxed{f'(0) = 0.}$$

3.d) Sur $]0,+\infty[$, $\sin x$ s'annule en tout x de la forme $x = k\pi$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs, pour tout $x \neq k\pi$, on a : $\cos x - 1 < 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-\sin x$. Finalement : $f'(x) = 0$ si $x = k\pi$, $f'(x) > 0$ si $x \in](2k-1)\pi, 2k\pi[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

4) Si $x > 0$ on a $x < 2x$ et donc :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_x^{2x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_x^{2x} = \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est justifiée par : $|\sin| \leqslant 1$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Formules de Taylor et développements limités

CHAPITRE 18

Plan

18.1 Formules de Taylor 479
18.2 Développements limités 483
Synthèse 488
Tests et exercices 489
Corrigés des exercices 492

Introduction

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$. Les formules de Taylor expriment $f(b)$ en fonction des valeurs en a de f et de ses dérivées successives. Ces formules sont du type :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(a,b),$$

où $R_n(a, b)$ est un reste dont l'expression dépend de la formule.

Les développements limités permettent de comparer localement une fonction avec un polynôme. Ils s'expriment sous la forme :

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Ils constituent un outil extrêmement efficace pour l'étude locale des fonctions : obtention d'équivalents, de limites, ...

Objectifs

- Énoncer les formules de Taylor.
- Donner la liste des développements limités usuels.
- Mener des opérations sur les développements limités.

Prérequis

- Étude locale des fonctions.
- Dérivation.
- Intégration.

18.1 Formules de Taylor

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

18.1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème – Formule de Taylor avec reste intégral
Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Pour tous a et b éléments de I, on a :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette égalité est appelée formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

Remarque – La formule de Taylor avec reste intégral est une formule globale car elle est valable quels que soient les points a et b dans I.

Démonstration
La formule se montre par récurrence sur n. On donne ici une démonstration abrégée.
L'initialisation est vérifiée car on sait que, si f est de classe C^1 sur I, alors :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Hérédité : supposons la formule vraie à l'ordre n et montrons-la à l'ordre $n+1$. Il suffit de prouver que :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette dernière inégalité se montre à l'aide d'une intégration par parties avec :

$$u(t) = f^{(n+1)}(t) \quad v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$u'(t) = f^{(n+2)}(t) \quad v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}$$

■

Exemples

1. La fonction exp est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $\exp^{(k)} = \exp$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliquée en 0 et x, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

2. Soient P un polynôme réel de degré au plus n et $a \in \mathbb{R}$ fixé. P est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliquée en a et x, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + 0$$
Autrement dit : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$. On obtient ainsi les coordonnées de P dans la base $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ de l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n.

18.1.2 Égalité et inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème – Égalité de Taylor-Lagrange
Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Pour tous a et b éléments distincts de I, il existe c strictement entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Cette égalité est appelée égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.

Remarques

1. Lorsque $n = 0$, on retrouve (avec des hypothèses plus fortes) l'égalité des accroissements finis. La formule de Taylor-Lagrange à un ordre quelconque est donc une généralisation de l'égalité des accroissements finis.
2. La formule de Taylor-Lagrange est une formule globale.

Exemple

Montrons que : $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Soit la fonction $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$. f est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et on montre aisément par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

En particulier, f est de classe C^3 sur $]-1, +\infty[$, donc d'après l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée en 0 et x, on a : pour tout $x > 0$, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(c)$$

Autrement dit :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

Mais $1 < 1 + c < 1 + x$ donc :

$$\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Théorème – Inégalité de Taylor-Lagrange
Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur I. On suppose qu'il existe un réel M majorant $|f^{(n+1)}|$ sur I. Alors pour tous a et b dans I :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \right| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Si $a = b$ l'inégalité est évidente.

Si $a \neq b$, alors d'après l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée aux points a et b, il existe c strictement entre a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Or $|f^{(n+1)}|$ est majorée par M sur I et $c \in I$, donc :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \blacksquare$$

Exemple

Soit $a \geqslant 0$. Montrons que : $\forall x \in]-\infty, a],\ \left| \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^a}{6}|x|^3$.

La fonction exp est de classe C^3 sur $]-\infty, a]$ et $\forall x \in]-\infty, a],\ |\exp^{(3)}(x)| = \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^a$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée aux points 0 et x, on a donc :

$$\forall x \in]-\infty, a],\ \left| \exp(x) - \exp(0) - x\exp'(0) - x^2 \frac{\exp''(0)}{2!} \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^a}{3!}|x|^3$$

Autrement dit :

$$\forall x \in]-\infty, a],\ \left| \exp(x) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^a}{6}|x|^3$$

18.1.3 Formule de Taylor-Young

On notera que la formule de Taylor-Young à l'ordre n suppose que f est de classe C^n sur I, alors que les formules de Taylor avec reste intégral et de Taylor-Lagrange à l'ordre n supposent que f est de classe C^{n+1} sur I.

Théorème – Formule de Taylor-Young

Soient f une fonction de classe C^n sur I et $a \in I$. Alors au voisinage de a, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Cette égalité est appelée formule de Taylor-Young à l'ordre n.

Remarque – La formule de Taylor-Young est un résultat local, qui permet de comparer $f(x)$ avec $\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ lorsque x est proche de a.

Démonstration

On cherche une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ admettant 0 pour limite en a et telle que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

Pour cette raison, on pose :

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \text{ si } x \in I \setminus \{a\} \quad \text{et} \quad \varepsilon(a) = 0$$

f étant de classe C^n sur I, d'après l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, il existe c_x strictement entre a et x tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x)$$

On en déduit que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right)$$

Or c_x étant compris entre a et x, on a par encadrement : $c_x \underset{x\to a}{\longrightarrow} a$. Par ailleurs, $f^{(n)}$ est continue sur I car f est de classe C^n. Donc $f^{(n)}(c_x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f^{(n)}(a)$. On obtient ainsi $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. ■

Exemple

La fonction exp est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. On a donc au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

18.2 Développements limités

18.2.1 Définition et premières propriétés

Définition – Développement limité à l'ordre n en 0

On suppose que $0 \in I$ et que f est une fonction définie sur I ou sur $I \setminus \{0\}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en 0** (en abrégé $\mathrm{DL}_n(0)$) lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ est appelé **partie régulière** de ce $\mathrm{DL}_n(0)$.

Exemple

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + 2x - 3x^2 + x^2 \sin x$. Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $x^2 \sin(x) = o(x^2)$ et donc f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par : $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + o(x^2)$. La partie régulière de $\mathrm{DL}_2(0)$ est : $P = 1 + 2X - 3X^2$.

Proposition – *Si f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors ce développement limité est unique. Autrement dit, si au voisinage de 0, on a :*

$$f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.

Démonstration

On raisonne par l'absurde en supposant que :

$$f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

et qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$.

Notons p le plus petit entier dans $[\![0, n]\!]$ tel que $a_p \neq b_p$. On a donc $a_k = b_k$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$. Par soustraction des deux développements limités, il vient :

$$0 = (a_p - b_p)x^p + (a_{p+1} - b_{p+1})x^{p+1} + \cdots + (a_n - b_n)x^n + o(x^n)$$

Pour $x \neq 0$, en divisant par x^p, il vient :

$$0 = (a_p - b_p) + (a_{p+1} - b_{p+1})x + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-p} + o(x^{n-p})$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient $0 = a_p - b_p$ et donc $a_p = b_p$: absurde. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

La proposition suivante montre qu'il est toujours possible de réduire l'ordre d'un développement limité.

Proposition – *Si f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f possède un $\mathrm{DL}_p(0)$. On obtient la partie régulière du $\mathrm{DL}_p(0)$ en supprimant les termes de degré strictement supérieur à p dans la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$.*

Démonstration

Supposons que f admette le $\mathrm{DL}_n(0)$ suivant :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Pour tout $k \in [\![p+1, n]\!]$, on a : $x^k = o(x^p)$. Par conséquent :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o(x^p)$$

Donc f admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ dont la partie régulière a été obtenue en supprimant les termes de degré strictement supérieur à p dans la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$. ■

Exemple

Supposons que f admette le $\mathrm{DL}_3(0)$ suivant : $f(x) = 1 + 2x - 7x^2 + 4x^3 + o(x^3)$. Alors f admet :

- le $\mathrm{DL}_0(0)$: $f(x) = 1 + o(1)$,
- le $\mathrm{DL}_1(0)$: $f(x) = 1 + 2x + o(x)$,
- le $\mathrm{DL}_2(0)$: $f(x) = 1 + 2x - 7x^2 + o(x^2)$.

18.2.2 Développements limités usuels

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir des développements limités. Si $0 \in I$ et si f est une fonction de classe C^n sur I, alors on a au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

Autrement dit, f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

On obtient ainsi les développements limités usuels suivants :

Théorème – Développements limités usuels

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
&\text{où } \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Exemple

sin admet le $DL_6(0)$ suivant : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$.

On en déduit que sin admet un $DL_5(0)$ donné par : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$.

Corollaire – Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

Démonstration

Le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ est obtenu à partir de celui de $(1+x)^\alpha$ lorsque $\alpha = -1$.

Puis en remplaçant x par $-x$, on obtient le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x}$. ■

18.2.3 Opérations sur les développements limités

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, la formule de Taylor-Young permet d'établir des développements limités. Dans la pratique, on obtient le plus souvent les développements limités à partir d'opérations (sommes, produits ou composées) sur les développements limités usuels.

Méthode 1 Somme de développements limités

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q, alors $f+g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P+Q$.

Exemple d'application

Cherchons un $DL_3(0)$ de $\sin(x) + \exp(x^2)$.

- sin admet le $DL_3(0)$ suivant : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
- exp admet le $DL_2(0)$ suivant : $\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

Comme $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit, par composition à droite, que : $\exp(x^2) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$ au voisinage de 0.

On obtient alors le $DL_3(0)$ suivant pour $\exp(x^2)$: $\exp(x^2) = 1 + x^2 + o(x^3)$.

On en déduit par somme que $\sin(x) + e^{x^2}$ admet le $DL_3(0)$ suivant :

$$\sin(x) + \exp(x^2) = 1 + x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Méthode 2 Produit de développements limités

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q, alors $f \times g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P \times Q$.
On retirera les termes de degré strictement supérieur à n dans l'expression de $P \times Q$.

Exemple d'application

Cherchons un $DL_3(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$.

- $\ln(1+x)$ admet le $DL_3(0)$ suivant : $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.
- $\dfrac{1}{1-x}$ admet le $DL_3(0)$ suivant : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

On en déduit qu'au voisinage de 0, on a :

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\left(1 + x + x^2 + x^3\right) + o(x^3)$$

On développe alors le produit en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 3 (les autres termes sont négligeables devant x^3 au voisinage de 0 et sont donc « absorbés » par le $o(x^3)$) :

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^3 + o(x^3)$$

Ce qui nous donne le $DL_3(0)$ suivant pour $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$:

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

Méthode 3 Composition de développements limités

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q, **et si** $\boldsymbol{f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$, alors $\boldsymbol{g \circ f}$ admet un $\boldsymbol{DL_n(0)}$ dont la partie régulière est donnée par $\boldsymbol{(Q \circ P)(X) = Q(P(X))}$.
On retirera les termes de degré strictement supérieur à $\boldsymbol{n}$ dans l'expression de $\boldsymbol{Q(P(X))}$.

Exemple d'application

Cherchons un $\boldsymbol{DL_3(0)}$ de $\boldsymbol{\exp(\sin(x))}$.

- **sin** admet le $\boldsymbol{DL_3(0)}$ suivant : $\boldsymbol{\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$ **et** $\boldsymbol{\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$.
- **exp** admet le $\boldsymbol{DL_3(0)}$ suivant : $\boldsymbol{\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)}$.

On en déduit qu'au voisinage de **0**, on a :

$$\boldsymbol{\exp(\sin(x)) = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o(x^3)}$$

(dans la partie régulière du $\boldsymbol{DL_3(0)}$ de $\boldsymbol{\exp(u)}$, on a remplacé $\boldsymbol{u}$ par $\boldsymbol{x - \frac{1}{6}x^3}$).
On développe alors les différents produits en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à **3** :

$$\boldsymbol{\exp(\sin(x)) = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

Ce qui nous donne le $\boldsymbol{DL_3(0)}$ suivant pour $\boldsymbol{\exp(\sin(x))}$:

$$\boldsymbol{\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).}$$

18.2.4 Généralisation : développement limité en x_0

Définition – Développement limité à l'ordre n en x_0

Soient $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I ou sur $I \setminus \{x_0\}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en x_0** (en abrégé $\mathrm{DL}_n(x_0)$) lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel qu'au voisinage de x_0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big) \end{aligned}$$

On peut établir un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young, mais le plus simple est de se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Méthode 4 Obtenir un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ à partir d'un $\mathrm{DL}_n(0)$

Chercher un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de $x \mapsto f(x)$ revient à chercher un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \mapsto f(x_0+h)$. Autrement dit, on pose $h = x - x_0$ et on cherche un $\mathrm{DL}_n(0)$ en la variable h :

$$f(x_0+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big)$$

Exemples d'application

1. Cherchons un $\mathrm{DL}_3(2)$ de exp.
 $\forall h \in \mathbb{R},\ \exp(2+h) = \exp(2)\exp(h)$. Or exp admet le $\mathrm{DL}_3(0)$ suivant :
 $$\exp(h) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)$$
 On en déduit qu'au voisinage de 0 : $\exp(2+h) = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 h + \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}h^2 + \dfrac{\mathrm{e}^2}{6}h^3 + o(h^3)$.
 Ainsi exp admet le $\mathrm{DL}_3(2)$ suivant :
 $$\exp(x) = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2(x-2) + \frac{\mathrm{e}^2}{2}(x-2)^2 + \frac{\mathrm{e}^2}{6}(x-2)^3 + o\big((x-2)^3\big)$$

2. Cherchons un $\mathrm{DL}_2(1)$ de $\dfrac{1}{2+x}$.
 $\forall h \neq -3,\ \dfrac{1}{2+(1+h)} = \dfrac{1}{3+h} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1+\frac{h}{3}}$. Or au voisinage de 0 :
 $$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$
 Comme $\dfrac{h}{3} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a au voisinage de 0 :
 $$\frac{1}{1+\frac{h}{3}} = 1 - \frac{1}{3}h + \frac{1}{9}h^2 + o\left(\frac{h^2}{9}\right) = 1 - \frac{1}{3}h + \frac{1}{9}h^2 + o(h^2)$$
 et par suite : $\dfrac{1}{2+(1+h)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1+\frac{h}{3}} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}h + \dfrac{1}{27}h^2 + o(h^2)$.
 En conclusion, $\dfrac{1}{2+x}$ admet un $\mathrm{DL}_2(1)$ donné par :
 $$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-1) + \frac{1}{27}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big).$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – Soient $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I.

- Dans le chapitre 14, on a vu :

$$f \text{ admet } f(x) = a_0 + o(1) \text{ pour } \mathrm{DL}_0(x_0) \Leftrightarrow f \text{ est continue en } x_0 \text{ et } f(x_0) = a_0$$

- Dans le chapitre 16, on a vu :

$$f \text{ admet } f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ pour } \mathrm{DL}_1(x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$f \text{ est dérivable en } x_0,\ f(x_0) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1$$

- Ces équivalences ne se généralisent pas pour les développements limités d'ordre supérieur.

Synthèse

Savoirs

- formule de Taylor avec reste intégral,
- égalité et inégalité de Taylor-Lagrange,
- formule de Taylor-Young,
- développements limités usuels.

Savoir-faire

- obtenir un développement limité à l'aide de la formule de Taylor-Young,
- mener des opérations sur les développements limités : somme, produit, composition,
- obtenir un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ à partir d'un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Mots-clés

- Formules de Taylor,
- développement limité.

Tests de connaissances

18.1 Donner les $DL_4(0)$ et $DL_3(0)$ de sinus et cosinus.

18.2 Donner les $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ et de $\sqrt[3]{1+x}$.
On calculera explicitement tous les coefficients.

18.3 Donner un équivalent au voisinage de 0 de :

a) $\sin(x) - x$, b) $1 - \cos(x) - \dfrac{1}{2}x^2$,

c) $\ln(1+x) - x + \dfrac{1}{2}x^2$, d) $e^x - \sqrt{1+2x}$.

18.4 Soit f une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{N}$, et admettant le $DL_n(0)$ suivant :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Exprimer $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

18.5 Soient f et g deux fonctions admettant les $DL_3(0)$ suivants :

$$f(x) = 1 + x - x^2 + 2x^3 + o(x^3)$$
$$g(x) = x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Donner les $DL_3(0)$ de $f+g$, fg et $f \circ g$.

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 491.

■ Formules de Taylor

18.6 ◎

Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \leqslant \frac{5x^3}{81}$$

18.7 ◎

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

a) Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\cos(x) - u_n(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(x).$$

18.8 ◎

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^1 \sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que pour tous réels u et α :

$$|\sin(u+\alpha) - \sin(u) - \alpha\cos(u)| \leqslant \frac{1}{2}\alpha^2.$$

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^1 t\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

18.9

Déterminer à l'aide de la formule de Taylor-Young, le $DL_3(0)$ de Arctan.

■ Recherche de développements limités

18.10

Déterminer les développements limités suivants :

a) $DL_4(0)$ de $\cos(x^2)$,

b) $DL_4(0)$ de $\cos^2(x)$,

c) $DL_4(0)$ de $\sin(x)\sqrt{1+x^2}$,

d) $DL_2(0)$ de $\dfrac{x-3}{2x+1}$.

18.11

Déterminer les développements limités suivants :

a) $DL_2(0)$ de $\exp(\sqrt{1+x})$,

b) $DL_3(0)$ de $\tan(x)$,

c) $DL_3(0)$ de $\dfrac{x+1}{x^2+x+2}$,

d) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

18.12

Déterminer les développements limités suivants :

a) $DL_3(1)$ de $\ln(x)$, b) $DL_2(2)$ de $\sqrt{x}$,

c) $DL_3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ de $\cos(x)$, d) $DL_3(2)$ de $\dfrac{x}{x-1}$.

18.13

Soit f une fonction paire admettant un $DL_n(0)$. Montrer que la partie régulière de ce développement limité est un polynôme pair.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

■ **Applications des développements limités**

18.14 Recherche de limites

Étudier les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{\sin^2(x)}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{1-\cos x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\ln(1+x)+1-e^x)}{\sin x - x}$.

18.15 Recherche de limites ◎

Étudier les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)$,

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{2}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\ln(\sin x)}\right)$.

18.16 ◎

Montrer que :

$$3x^2-2x-2(1-x)^2\ln(1-x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3$$

18.17

À l'aide de développements limités, déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\ln(n+1)-\ln(n)-\frac{1}{n+1}$$

18.18 ◎

Montrer que la fonction f définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\ f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

admet un prolongement de classe C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

18.19 ◎

Montrer que la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x>0 \quad \text{et} \quad f(0)=1$$

est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et déterminer $f'(0)$.

18.20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+2x+2}$$

a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les $\mathrm{DL}_2(0^+)$ et $\mathrm{DL}_2(0^-)$ de $uf\left(\dfrac{1}{u}\right)$.

c) En déduire que la courbe de f admet une asymptote aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ et déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercices d'approfondissement

18.21 Oral ESCP 2005 ◎

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction de classe C^2 sur $I=[a,b]$. On suppose que f' est strictement négative sur I, que f est convexe sur I et que $f(a)>0$ et $f(b)<0$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.

b) Soit $u\in I$. Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u-\dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

2) Soit g la fonction définie sur I par :

$$\forall x\in I,\ g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x_0\in[a,c[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=g(x_n)$.

2) a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

b) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que :

$$\forall x\in I,\ |g(x)-c|\leqslant (x-c)^2\frac{M}{2m}$$

c) En déduire qu'il existe un réel k strictement positif tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |x_n-c|\leqslant k\left(\frac{x_0-c}{k}\right)^{2^n}$$

18.22 Oral ESCP 2008

Pour tout réel x, on définit :

$$\varphi(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) Soit $A>0$, montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall u\in[-A,A],\ \left|\mathrm{e}^u-1-u\right|\leqslant Mu^2.$$

2) a) Soit x un réel fixé, montrer que :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right)=0.$$

b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=-\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

3) a) Calculer $\varphi(0)$.

b) Montrer que $\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

4) Pour tout réel x, on définit

$$f(x)=\varphi(x^2)+\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Établir à l'aide d'un changement de variable

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur de cette constante ?

5) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

18.23

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On définit pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$a_k=a+k\frac{b-a}{n}$$

Pour toute fonction g continue sur $[a,b]$, on pose :

$$R_n(g)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(a_k)$$

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ et on pose :

$$I=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Que peut-on dire de $R_n(g)$ lorsque $n\to+\infty$?

2) a) Montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall x\in[a,b],\ |f''(x)|\leqslant M.$$

b) Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on note :

$$\Delta_k=\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{b-a}{n}f(a_k)-\frac{(b-a)^2}{2n^2}f'(a_k).$$

En appliquant une formule de Taylor à la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_{a_k}^x f(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \left|\Delta_k\right|\leqslant\frac{M(b-a)^3}{6n^3}$$

3) Montrer que :

$$\left|nI-nR_n(f)-\frac{b-a}{2}R_n(f')\right|\leqslant\frac{M(b-a)^3}{6n}$$

4) a) Déduire de la question précédente que $(n(R_n(f)-I))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite α que l'on déterminera.

b) Montrer que lorsque $n\to+\infty$:

$$R_n(f)=I+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indications

18.6 Appliquer l'égalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x\mapsto\sqrt[3]{1+x}$.

18.7

a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction cosinus.

b) Utiliser les croissances comparées des suites usuelles.

18.8

a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus.

b) Appliquer la question précédente avec $u=xt$ et $\alpha=ht$ pour montrer que :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\underset{h\to0}{\longrightarrow}\int_0^1 t\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

18.15

a) Poser $u=\dfrac{1}{x}$ et effectuer des développements limités à l'ordre 2 lorsque la variable u est au voisinage de 0.

b) Poser $h=x-\dfrac{\pi}{2}$, réduire l'expression au même dénominateur et effectuer des développements limités à l'ordre 4 lorsque la variable h est au voisinage de 0.

18.16 Utiliser le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1-x)$.

18.18 Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p vu au chapitre 17.

18.19 Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p vu au chapitre 17. On suivra la méthode « Montrer qu'une fonction prolongée est de classe C^p ».

18.21

2) a) Montrer que : $\forall x\in[a,c]$, $g(x)\in[a,c]$ et étudier le signe de $g(x)-x$ pour $x\in[a,c]$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

b) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f et justifier l'existence de d'un réel $m>0$ tel que :
$\forall x\in[a,b],\ m\leqslant|f'(x)|$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

18.1

$DL_4(0)$ de cosinus : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$.

$DL_3(0)$ de cosinus : $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$.

$DL_4(0)$ de sinus : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

$DL_3(0)$ de sinus : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

18.2

• $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + o(x^3) \\ &= \boxed{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

• $DL_3(0)$ de $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x} &= 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + o(x^3) \\ &= \boxed{1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

18.3

a) Le $DL_3(0)$ de sinus est :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Donc $\sin(x) - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, puis :

$$\boxed{\sin(x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3}.$$

b) Le $DL_4(0)$ de cosinus est :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

dont on déduit : $\boxed{1 - \cos(x) - \frac{1}{2}x^2 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{24}x^4}$.

c) Le $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ est :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

dont on déduit : $\boxed{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}x^3}$.

d) Le $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+u}$ est :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$$

Or $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x} &= 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Par ailleurs, le $DL_2(0)$ de exp est :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Donc $e^x - \sqrt{1+2x} = x^2 + o(x^2)$ puis :

$$\boxed{e^x - \sqrt{1+2x} \underset{0}{\sim} x^2}.$$

18.4

f étant de classe C^n sur $\mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre n appliquée en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

Cette dernière expression fournit un $DL_n(0)$ de f. Par unicité du $DL_n(0)$, on en déduit que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k$, soit $\boxed{f^{(k)}(0) = k!a_k}$.

18.5

• On obtient un $DL_3(0)$ de $f+g$ en additionnant les parties régulières des $DL_3(0)$ de f et g :

$$\boxed{(f+g)(x) = 1 + 2x + x^3 + o(x^3)}$$

• On obtient un $DL_3(0)$ de fg en multipliant les parties régulières de f et g, et en supprimant les termes de degré strictement supérieur à 3 :

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (1 + x - x^2 + 2x^3)(x + x^2 - x^3) + o(x^3) \\ &= \boxed{x + 2x^2 - x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

• Comme $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut composer les $DL_3(0)$ de f et g, et on obtient le $DL_3(0)$ de $f \circ g$ en composant les parties régulières des $DL_3(0)$ de f et g, et en supprimant les termes de degré strictement supérieur à 3 :

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 1 + (x + x^2 - x^3) - (x + x^2 - x^3)^2 \\ &\quad + 2(x + x^2 - x^3)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + (x + x^2 - x^3) \\ &\quad - (x^2 + 2x^3) + 2x^3 + o(x^3) \\ &= \boxed{1 + x - x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

18.6

Posons pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. $x \mapsto 1 + x$ est de classe C^3 sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ et $u \mapsto \sqrt[3]{u}$ est de classe C^3 sur $]0, +\infty[$ donc sur $[1, +\infty[$. Ainsi f est de classe C^3 sur $[0, +\infty[$. D'après l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée en 0 et en x, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(c).$$

Or pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$f'(t) = \frac{1}{3}(1+t)^{-2/3}$$
$$f''(t) = -\frac{2}{9}(1+t)^{-5/3}$$
$$f'''(t) = \frac{10}{27}(1+t)^{-8/3}$$

D'où :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}(1+c)^{-8/3}$$

autrement dit :

$$\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} = \frac{5x^3}{81}(1+c)^{-8/3}$$

Or c est positif, donc $1 + c \geqslant 1$ puis $0 \leqslant (1+c)^{-8/3} \leqslant 1$. x étant positif, il vient $0 \leqslant \frac{5x^3}{81}(1+c)^{-8/3} \leqslant \frac{5x^3}{81}$ et :

$$0 \leqslant \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \leqslant \frac{5x^3}{81}$$

On a montré cet encadrement pour tout $x > 0$, et il est également vérifié pour $x = 0$.

18.7

a) La fonction cosinus est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont données par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad \cos^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos(x)$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k-1} \sin(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction cosinus est de classe C^{2n+1} sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\cos^{(2n+1)}(x)| \leqslant 1$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée en 0 et en x, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\cos(x) - \sum_{p=0}^{2n} \frac{x^p}{p!}\cos^{(p)}(0)\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Dans la somme précédente, les termes d'indice p impair sont nuls car $\sin(0) = 0$. Il ne reste donc que les termes d'indice $p = 2k$ où $0 \leqslant k \leqslant n$. Comme $\cos(0) = 1$, il vient :

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ce qui est exactement l'encadrement demandé.

b) Par croissance comparée, on a pour tout réel a : $a^n = o(n!)$. Donc $a^{2n+1} = o((2n+1)!)$. En appliquant cela à $a = |x|$, il vient : $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Avec la question précédente, on en déduit par encadrement que : $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(x)$.

18.8

a) La fonction sinus est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin''(t)| = |-\sin(t)| \leqslant 1.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée en u et $u + \alpha$, on a donc $\forall (u, \alpha) \in \mathbb{R}^2$

$$\left|\sin(u+\alpha) - \sin(u) - \alpha\sin'(u)\right| \leqslant \frac{1}{2!}|\alpha|^2$$

autrement dit $\forall (u, \alpha) \in \mathbb{R}^2$

$$|\sin(u+\alpha) - \sin(u) - \alpha\cos(u)| \leqslant \frac{1}{2}\alpha^2$$

b) Notons : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^1 t\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

Pour tout réel h, la linéarité de l'intégrale et l'inégalité de la moyenne donnent :

$$\begin{aligned}&|f(x+h) - f(x) - hg(x)|\\ &= \left|\int_0^1 \Big(\sin(xt+ht) - \sin(xt) - ht\cos(xt)\Big)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_0^1 \Big|\sin(xt+ht) - \sin(xt) - ht\cos(xt)\Big|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En appliquant la question a) avec $u = xt$ et $\alpha = ht$, la croissance de l'intégrale donne :

$$|f(x+h) - f(x) - hg(x)| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}(ht)^2\,\mathrm{d}t = \frac{h^2}{6}$$

En divisant par $|h|$, on en déduit que pour tout $h \neq 0$:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{6}$$

On en déduit par encadrement que :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{h\to0}{\longrightarrow} g(x)$$

ce qui prouve que f est dérivable en x de dérivée $g(x) = \int_0^1 t\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

18.9

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Cette dérivée est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, Arctan est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3, on a au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Arctan}\,(x)\\ &= \mathrm{Arctan}\,(0) + x\mathrm{Arctan}\,'(0)\\ &\quad + \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan}\,''(0) + \frac{x^3}{6}\mathrm{Arctan}\,'''(0) + o(x^3)\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Arctan}\,'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\mathrm{Arctan}\,''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$\mathrm{Arctan}\,'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x\times 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

On obtient le $\mathrm{DL}_3(0)$ suivant :

$$\boxed{\mathrm{Arctan}\,(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

18.10

a) Au voisinage de 0 : $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Or $x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

donc : $\boxed{\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}$.

b) On a : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc :

$$\cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)$$
$$= \boxed{1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}$$

c) Au voisinage de 0 : $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$. Or $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Par ailleurs, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ donc :

$$\sin(x)\sqrt{1+x^2}$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) + o(x^4)$$
$$= \boxed{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

d) Au voisinage de 0 : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$. Or $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)$$

Par conséquent :

$$\frac{x-3}{2x+1} = (x-3)(1 - 2x + 4x^2) + o(x^2)$$
$$= \boxed{-3 + 7x - 14x^2 + o(x^2)}$$

18.11

a) $\exp(\sqrt{1+x}) = \mathrm{e}.\exp(\sqrt{1+x} - 1)$.
Au voisinage de 0 :

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Or $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et :

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Par conséquent :

$$\exp(\sqrt{1+x})$$
$$= \mathrm{e} + \mathrm{e}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) + \frac{\mathrm{e}}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)^2 + o(x^2)$$
$$= \boxed{\mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + o(x^2)}$$

b) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{1 - (1 - \cos(x))}$.

Or $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Il reste à obtenir le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\frac{1}{1-(1-\cos(x))}$.

On sait qu'au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3).$$

Or $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc :

$$\frac{1}{1-(1-\cos(x))} = 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Par conséquent :

$$\tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{1-(1-\cos(x))}$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)$$
$$= \boxed{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

c) $\frac{x+1}{x^2+x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{x+1}{1 + \frac{1}{2}(x+x^2)}$.

Or au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$$

Or $\frac{1}{2}(x+x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{2}(x+x^2) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, on peut donc composer ces développements limités :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}(x+x^2)}$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)^2$$
$$-\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)^3 + o(x^3)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + o(x^3)$$

Finalement :

$$\frac{x+1}{x^2+x+2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x+1\right)\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3\right) + o(x^3)$$
$$= \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}$$

d) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)$. Donc :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)$$

Or au voisinage de 0 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$$

Comme $-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^5) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut composer ces développements limités :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)^2\\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)^4 + o(x^4)\\
&= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{72}x^4 + o(x^4)\\
&= \boxed{-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)}
\end{aligned}$$

18.12

a) Posons $h = x - 1$ de sorte que $\ln(x) = \ln(1+h)$. Quand h est au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)$$

D'où le DL_3 (1) de $\ln(x)$:

$$\boxed{\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$$

b) Posons $h = x - 2$ de sorte que $\sqrt{x} = \sqrt{2+h}$. Déterminons alors le DL_2 (0) de $\sqrt{2+h}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+h} &= \sqrt{2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{2}h}\\
&= \sqrt{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}h\right)^2 + o(h^2)\right)\\
&= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

On en déduit le DL_2 (2) de $\sqrt{x}$:

$$\boxed{\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + o((x-2)^2)}$$

c) Posons $h = x - \frac{\pi}{3}$ de sorte que $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{3} + h)$. Déterminons le DL_3 (0) de $\cos(\frac{\pi}{3} + h)$:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(h) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(h)\\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^3)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)\right)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

On en déduit le $DL_3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \frac{1}{2} &- \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\\
&+ \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

Remarque : comme on connaît les dérivées successives de cos, on peut également obtenir ce développement limité à l'aide de la formule de Taylor-Young.

d) Posons $h = x - 2$ de sorte que $\frac{x}{x-1} = \frac{h+2}{h+1}$. Quand h est au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{h+2}{h+1} &= (h+2)\left(1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)\right)\\
&= 2 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

On en déduit le DL_3 (2) de $\frac{x}{x-1}$:

$$\boxed{\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + o((x-2)^3)}$$

18.13

Le DL_n (0) de f est de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Comme f est paire et que $-x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
f(x) = f(-x) = a_0 &- a_1x + a_2x^2\\
&- a_3x^3 + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

Par unicité du DL_n (0), on en déduit que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = (-1)^k a_k$$

Pour k impair, on obtient $a_k = -a_k$, d'où $a_k = 0$. Ainsi, dans la partie régulière du développement limité, il ne reste que les termes pairs : cette partie régulière est donc un polynôme pair.

18.14

a) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ donc $\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ puis $\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$.

Or $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^2$. Ainsi :

$$\boxed{\frac{\ln(1+x) - x}{\sin^2(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}}$$

b) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ par conséquent $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{8}x^2$. Or $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ donc :

$$\boxed{\frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{1 - \cos x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}}$$

c) D'une part, on a $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et d'autre part

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
Donc $\ln(1+x) + 1 - e^x = -x^2 + o(x^2)$.
On en déduit : $x(\ln(1+x) + 1 - e^x) \underset{0}{\sim} -x^3$.

Par ailleurs, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
Donc $\sin x - x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3$ et enfin :

$$\boxed{\frac{x(\ln(1+x) + 1 - e^x)}{\sin x - x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 6}$$

18.15

a) On pose $u = \frac{1}{x}$. On a $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et :

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \frac{1}{u^2}\left(\exp(u) - \exp\left(\frac{u}{1+u}\right)\right)$$

On sait que : $\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.
Par ailleurs :

$$\frac{u}{1+u} = u(1 - u + o(u)) = u - u^2 + o(u^2)$$

Comme $\frac{u}{1+u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut composer les $DL_2(0)$ de $\exp u$ et de $\frac{u}{1+u}$:

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{u}{1+u}\right) &= 1 + (u - u^2) + \frac{1}{2}(u - u^2)^2 + o(u^2)\\ &= 1 + u - \frac{1}{2}u^2\end{aligned}$$

Par conséquent : $\exp(u) - \exp\left(\frac{u}{1+u}\right) = u^2 + o(u^2)$.

Donc $\frac{1}{u^2}\left(\exp(u) - \exp\left(\frac{u}{1+u}\right)\right) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$ et :

$$\boxed{x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

b) On pose $h = x - \frac{\pi}{2}$. En tenant compte de $\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\sin h$ et de $\sin(h + \frac{\pi}{2}) = \cos h$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)} &= \frac{2}{\sin^2 h} + \frac{1}{\ln(\cos h)}\\ &= \frac{2\ln(\cos h) + \sin^2 h}{(\sin^2 h)(\ln(\cos h))}\end{aligned}$$

• $DL_4(0)$ de $\ln(\cos h) = \ln(1 + (\cos h - 1))$.
On a $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$. Or $\cos h - 1 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\cos h - 1 \underset{0}{=} -\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 + o(h^4)$. Donc :

$$\begin{aligned}&\ln(1 + (\cos h - 1))\\ &= \left(-\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4\right)^2\\ &\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4\right)^4 + o(h^4)\\ &= -\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 - \frac{1}{8}h^4 + o(h^4)\\ &= -\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{12}h^4 + o(h^4)\end{aligned}$$

Remarquons alors que $\ln(\cos h) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}h^2$.

• $DL_4(0)$ de $\sin^2 h$.
On a : $\sin h = h - \frac{1}{6}h^3 + o(h^4)$ donc :

$$\begin{aligned}\sin^2 h &= \left(h - \frac{1}{6}h^3\right)\left(h - \frac{1}{6}h^3\right) + o(h^4)\\ &= h^2 - \frac{1}{3}h^4 + o(h^4)\end{aligned}$$

Remarquons alors que $\sin^2 h \underset{0}{\sim} h^2$.

On déduit de ce qui précède que, d'une part :

$$\begin{aligned}2\ln(\cos h) + \sin^2 h &= -h^2 - \frac{1}{6}h^4 + h^2 - \frac{1}{3}h^4 + o(h^4)\\ &= -\frac{1}{2}h^4 + o(h^4)\\ &\underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}h^4\end{aligned}$$

et que, d'autre part :

$$(\sin^2 h)(\ln(\cos h)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}h^4$$

Donc $\frac{2\ln(\cos h) + \sin^2 h}{(\sin^2 h)(\ln(\cos h))} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$ et :

$$\boxed{\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1}$$

18.16

On a : $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.
Donc $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, puis :

$$\begin{aligned}&(1-x)^2\ln(1-x)\\ &= (1 - 2x + x^2)\left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)\\ &= -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}3x^2 - 2x - 2(1-x)^2\ln(1-x) &= 3x^2 - 2x - 2\left(-x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)\\ &= \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Il vient : $3x^2 - 2x - 2(1-x)^2\ln(1-x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3$.

18.17

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} &= -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}\\ &= -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Or $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

Donc $\ln(1-u) \underset{0}{=} -u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

Et enfin : $-\ln(1-u) - u \underset{0}{=} \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

On en déduit que $-\ln(1-u) - u \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$.

Or $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Mais $n+1 \sim n$ et finalement $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n^2}}$.

18.18

• sin est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle, donc $\frac{1}{\sin}$ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Par somme, f est donc de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

• Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

Déterminons le $DL_4(0)$ de $x^2\cos x - \sin^2 x$:

$$x^2\cos x = x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

Par ailleurs, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$ donc :

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^4)\\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}x^2\cos x - \sin^2 x &= -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\\ &\underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}x^4\end{aligned}$$

Mais $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $x^2\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^4$.

On obtient ainsi : $f'(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}$.

f est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et f' admet une limite finie en 0, donc, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

18.19

• f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

Or $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ donc :

$$\begin{aligned}x - (1+x)\ln(1+x) &= x - (1+x)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\\ &= x - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\\ &= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\\ &\underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Mais $x^2(1+x) \underset{0}{\sim} x^2$ donc $f'(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.

• $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$, ce qui signifie que $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} f(0)$: f est continue en 0.

En conclusion, f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, f' admet une limite finie à droite en 0 et f est continue en 0. D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, f est donc de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $f'(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

18.20

a) La discriminant de l'équation $x^2 + x + 1$ est $\Delta_1 = -3 < 0$ donc $x^2 + x + 1$ est de signe constant : celui de 1, c'est-à-dire positif. Par ailleurs, le discriminant de l'équation $4x^2 + 2x + 2$ est $\Delta_2 = -28 < 0$ donc $4x^2 + 2x + 2$ est de signe constant : celui de 2, c'est-à-dire positif. On en déduit que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $u > 0$, on a $u = \sqrt{u^2}$ et :

$$\begin{aligned}uf\left(\frac{1}{u}\right) &= u\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1} + u\sqrt{\frac{4}{u^2} + \frac{2}{u} + 2}\\ &= \sqrt{1 + u + u^2} + \sqrt{4 + 2u + 2u^2}\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Or $\sqrt{1+t} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$. Comme $u + u^2 \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$ et que $u + u^2 = u + u^2 + o(u^2)$, on obtient par composition de développements limités :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u+u^2} &= 1 + \frac{1}{2}(u+u^2) - \frac{1}{8}(u+u^2)^2 + o(u^2)\\ &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2)\end{aligned}$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned}&\sqrt{4+2u+2u^2}\\ &= 2\sqrt{1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2}\\ &= 2 + \left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2\right)^2 + o(u^2)\\ &= 2 + \frac{1}{2}u + \frac{7}{16}u^2 + o(u^2)\end{aligned}$$

Le $\mathrm{DL}_2(0^+)$ de $uf\left(\frac{1}{u}\right)$ est donc :

$$\boxed{uf\left(\frac{1}{u}\right) \underset{0^+}{=} 3 + u + \frac{13}{16}u^2 + o(u^2)}$$

Pour tout $u < 0$, on a $u = -\sqrt{u^2}$ et il vient :

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) = -\sqrt{1+u+u^2} - \sqrt{4+2u+2u^2}$$

En suivant le raisonnement précédent, on obtient le $\mathrm{DL}_2(0^-)$:

$$\boxed{uf\left(\frac{1}{u}\right) \underset{0^-}{=} -3 - u - \frac{13}{16}u^2 + o(u^2)}$$

c) • **Voisinage de $+\infty$.** Comme $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, on a au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{x}f(x) = 3 + \frac{1}{x} + \frac{13}{16x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

dont on déduit :

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{13}{16x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

En particulier $f(x) - (3x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la courbe de f admet la droite d'équation $y = 3x + 1$ pour asymptote en $+\infty$.

Or $f(x) - (3x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{13}{16x}$ et $\forall x > 0,\ \frac{13}{16x} > 0$, on a donc au voisinage de $+\infty$: $f(x) - (3x+1) > 0$. La courbe de f est donc au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

• **Voisinage de $-\infty$.** On utilise ici le $\mathrm{DL}_2(0^-)$ de $uf(\frac{1}{u})$ car $\frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^-$. Il vient, au voisinage de $-\infty$:

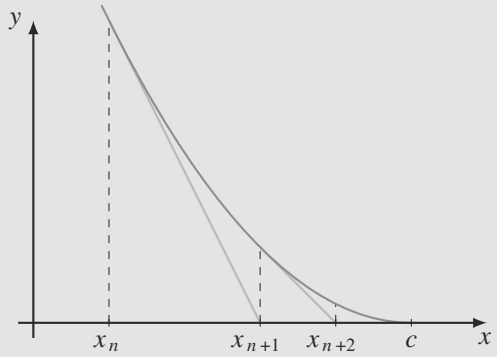
$$f(x) = -3x - 1 - \frac{13}{16x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par conséquent, la courbe de f admet la droite d'équation $y = -3x - 1$ pour asymptote au voisinage de $-\infty$. Comme $f(x) - (-3x-1) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{13}{16x}$ et que $\forall x < 0,\ -\frac{13}{16x} > 0$, on a au voisinage de $-\infty$: $f(x) - (-3x-1) > 0$. La courbe de f est donc au-dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

18.21

1) a) f est continue et strictement décroissante sur $[a,b]$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[a,b]$ sur $[f(b),f(a)]$. Or $0 \in [f(b),f(a)]$, donc il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. Nécessairement $c \in]a,b[$ car $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls.

b) L'équation de la tangente au point d'abscisse u est $y = f(u) + (x-u)f'(u)$. On cherche l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses, autrement dit il s'agit de résoudre l'équation $0 = f(u) + (x-u)f'(u)$ d'inconnue x. Comme $f'(u) \neq 0$, la solution est $x = u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.



2) a) g est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

Or $f(c) = 0$ et f est strictement décroissante sur I, donc : $\forall x \in [a,c],\ f(x) \geqslant 0$. Par ailleurs, f est convexe donc $f'' \geqslant 0$. On en déduit que : $\forall x \in [a,c],\ g'(x) \geqslant 0$. Donc g est croissante sur $[a,c]$.

Or $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} \geqslant 0$ et $g(c) = c - \dfrac{f(c)}{f'(c)} = c$.

Donc : $\forall x \in [a,c],\ a \leqslant g(x) \leqslant c$.

On en déduit par une récurrence immédiate, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant x_n \leqslant c$$

Ensuite : $\forall x \in [a,c],\ g(x) - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)} \geqslant 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n \geqslant 0$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par c, donc elle converge.

Notons ℓ la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par continuité de f et f', on a : $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ et $f'(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(\ell)$. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Par unicité de la limite, il vient :

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

Donc $f(\ell) = 0$. Nécessairement $\ell = c$. On a bien montré que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$.

b) La fonction f'' est continue sur le segment $I = [a, b]$ donc elle y est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, |f''(x)| \leqslant M$. f'' est positive, donc $M \geqslant 0$ et, quitte à remplacer M par $M+1$, on peut supposer $M > 0$.

f étant de classe C^2 sur I, on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 aux points x et c :

$$\forall x \in I,\ |f(c) - f(x) - (c-x)f'(x)| \leqslant \frac{M(c-x)^2}{2}$$

En divisant par $|f'(x)|$ qui est non nul par hypothèse :

$$(\bigstar)\forall x \in I, \left|\frac{f(c)-f(x)}{f'(x)} - (c-x)\right| \leqslant \frac{M(x-c)^2}{2|f'(x)|}$$

Or f' est continue sur le segment I, donc $|f'|$ est également continue sur ce segment. En particulier, $|f'|$ admet un minimum sur I. Comme $|f'|$ est strictement positive, ce minimum (qui est une valeur atteinte par $|f'|$) est strictement positif : notons-le m. Pour tout $x \in I$, on a $0 < m \leqslant |f'(x)|$ donc $\dfrac{1}{|f'(x)|} \leqslant \dfrac{1}{m}$. En appliquant cette inégalité dans $(\bigstar)$, en utilisant la définition de $g(x)$ et le fait que $f(c) = 0$, il vient :

$$\forall x \in I,\ |g(x) - c| \leqslant (x-c)^2 \frac{M}{2m}$$

c) Posons $\gamma = \dfrac{M}{2m}$. Le résultat précédent s'écrit :

$$\forall x \in I,\ |g(x) - c| \leqslant \gamma(x-c)^2.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n+1} - c| \leqslant \gamma(x_n - c)^2$$

Donc $|x_1 - c| \leqslant \gamma(x_0 - c)^2$, puis :

$$|x_2 - c| \leqslant \gamma(x_1 - c)^2 \leqslant \gamma^3(x_0 - c)^4$$

ensuite :

$$|x_3 - c| \leqslant \gamma(x_2 - c)^2 \leqslant \gamma^7(x_0 - c)^8$$

Et on obtient facilement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leqslant \gamma^{2^n-1}(x_0 - c)^{2^n}$$

En prenant $k = 1/\gamma$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leqslant k\left(\frac{x_0 - c}{k}\right)^{2^n}$$

18.22

1) Soit $A > 0$, la fonction exponentielle est de classe C^2 sur $[-A, A]$ et :

$$\forall u \in [-A, A],\ |\exp''(u)| = \exp(u) \leqslant \mathrm{e}^A$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 :

$$\forall u \in [-A, A],\ \left|\exp(u) - \exp(0) - u\exp'(0)\right| \leqslant \frac{u^2\mathrm{e}^A}{2}$$

On obtient l'inégalité demandée en prenant $M = \dfrac{\mathrm{e}^A}{2}$.

2) a) Posons pour tout réel h non nul :

$$\delta(h) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

On a alors :

$$\delta(h) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left(\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right)\mathrm{d}t$$

Par conséquent :

$$|\delta(h)| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left|\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right|\mathrm{d}t$$

Prenons $h \in [-1, 1]$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leqslant 1+t^2 \leqslant 1$ et donc $h(1+t^2) \in [-2, 2]$. La question **1)** avec $A = 2$ appliquée avec $u = -h(1+t^2)$, assure l'existence d'un $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0, 1], \left|\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right| \leqslant Mh^2(1+t^2)$$

On en déduit que pour $h \in [-1, 1]$ non nul :

$$|\delta(h)| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} Mh^2(1+t^2)^2\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit :

$$|\delta(h)| \leqslant |h|\int_0^1 M(1+t^2)\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Cette dernière intégrale est constante par rapport à h donc la quantité majorant $|\delta(h)|$ tend vers 0 quand $h \to 0$. Par encadrement, il vient : $\delta(h) \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire :

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right) = 0.$$

2.b) D'après **2)** a), pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \underset{h\to0}{\longrightarrow} -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Ce qui signifie que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

3) a) Calculons $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Arctan}\,(t)\Big]_0^1$$
$$= \mathrm{Arctan}\,(1) - \mathrm{Arctan}\,(0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

b) Soit $x \geqslant 0$. On a : $\forall t \in [0, 1],\ -x(1+t^2) \leqslant -x$ car $1 + t^2 \geqslant 1$. On en déduit :

$$\forall t \in [0, 1],\ 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}$$

puis par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\varphi(0) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit par encadrement que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4) a) $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $x \mapsto \varphi(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$: elle est

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

donc dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que $x \mapsto \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$. Donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Posons $t = xu$. $u \mapsto xu$ est de classe C^1 sur $[0,1]$. On a $t = 0$ quand $u = 0$, et $t = x$ quand $u = 1$. Par ailleurs, $\mathrm{d}t = x\mathrm{d}u$. Le changement de variable donne :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}u$$

c) On note : $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On a vu en **4)** a) que G est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Dérivons f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\varphi'(x^2) + 2G'(x)G(x) \\ &= -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t + 2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t + 2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

f est donc de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, par conséquent elle est constante sur $\mathbb{R}$.
Or $f(0) = \varphi(0) + 0 = \dfrac{\pi}{4}$, donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

5) Pour tout $x \geqslant 0$, on a par positivité de la fonction exponentielle et de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Donc par définition de $f(x)$ et d'après **4)** c) :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{f(x) - \varphi(x^2)} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - \varphi(x^2)}$$

Or $x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}\varphi = 0$ donc $\varphi(x^2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

18.23

1) g est continue sur $[a,b]$ et $R_n(g)$ est une somme de Riemann de g sur cet intervalle.
Donc $R_n(g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

2) a) f est de classe C^2 sur $[a,b]$ donc f'' est continue sur le segment $[a,b]$. Par conséquent f'' est bornée sur $[a,b]$, ce qui signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a,b],\ |f''(x)| \leqslant M$.

2) b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. f est continue sur $[a,b]$ donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, $F : x \mapsto \displaystyle\int_{a_k}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en a_k.
Comme f est de classe C^2 sur $[a,b]$, F est de classe C^3 sur $[a,b]$. De plus $\forall x \in [a,b],\ |F'''(x)| = |f''(x)| \leqslant M$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée en a_k et a_{k+1}, et en notant $h = a_{k+1} - a_k$, on a donc :

$$\left|F(a_{k+1}) - F(a_k) - hF'(a_k) - \frac{h^2}{2}F''(a_k)\right| \leqslant \frac{M|h|^3}{3!}$$

Or $F(a_k) = 0$, $F'(a_k) = f(a_k)$, $F''(a_k) = f'(a_k)$, $h = \dfrac{b-a}{n} \geqslant 0$, donc :

$$F(a_{k+1}) - F(a_k) - hF'(a_k) - \frac{h^2}{2}F''(a_k) = \Delta_k$$

et $|\Delta_k| \leqslant \dfrac{M(b-a)^3}{6n^3}$.

3) Additionnons les Δ_k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \\ &\quad -\frac{b-a}{2n}\times\frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f'(a_k) \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - R_n(f) - \frac{b-a}{2n}R_n(f') \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left|nI - nR_n(f) - \frac{b-a}{2}R_n(f')\right| &= n\left|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k\right| \\ &\leqslant n\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta_k| \\ &\leqslant n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M(b-a)^2}{6n^3} \end{aligned}$$

Or $n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M(b-a)^2}{6n^3} = \frac{M(b-a)^2}{6n}$, ce qui donne la majoration demandée.

4) a) $\dfrac{M(b-a)^2}{6n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la question précédente donne par encadrement :

$$nI - nR_n(f) - \frac{b-a}{2}R_n(f') \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or $\dfrac{b-a}{2}R_n(f') \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{b-a}{2}\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$, mais :

$$\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}$$

En notant $\boxed{\alpha = -\dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}}$, on a alors $nI - nR_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha$, c'est-à-dire :

$$n(R_n(f) - I) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

4) b) D'après ce qui précède, $n(R_n(f) - I) = \alpha + o(1)$, donc $R_n(f) - I = \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puis :

$$R_n(f) = I + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Séries numériques

CHAPITRE 19

Plan

19.1 Généralités 501
19.2 Séries à termes positifs 504
19.3 Séries géométriques et exponentielles 507
Synthèse 513
Tests et exercices 514
Corrigés des exercices 518

Introduction

La notion de série découle directement de celle de suite. Nous introduisons des théorèmes permettant de déterminer la nature et éventuellement la **somme** d'une série. Quatre situations sont décrites : les séries téléscopiques, les séries géométriques, les séries exponentielles et les séries de Riemann.

Les séries sont un outil important pour les variables aléatoires discrètes infinies. Ainsi, les lois géométriques et de Poisson correspondent respectivement à des séries géométriques et exponentielles.

Prérequis

- les suites : généralités, étude asymptotique,

Les démonstrations de deux théorèmes nécessitent de connaître :

- la dérivée k-ième d'une application et la formule de Leibniz (pour les séries dérivées des séries géométriques),
- la formule de l'inégalité de Taylor-Lagrange (pour les séries exponentielles).

Objectifs

- déterminer la nature d'une série par comparaison avec une série connue,
- identifier les séries usuelles, déterminer leur nature et leur somme pour des applications en probabilités : calcul des moments d'une variable aléatoire discrète infinie.

19.1 Généralités

19.1.1 Définition

Définition – Série, somme partielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on appelle **série de terme général** u_n, $n \geqslant 0$, la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ où

$$S_p = u_0 + u_1 + \cdots + u_p = \sum_{n=0}^{p} u_n.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

S_p est appelée **somme partielle d'ordre** p de la série.
La série de terme général u_n, $n \geqslant 0$, est notée $\sum u_n$

Remarque – L'indice initial n'est pas forcément $n = 0$ mais peut être un entier quelconque : par exemple, on peut considérer la série de terme général $\dfrac{1}{n(n-1)}$, $n \geqslant 2$, parfois notée abusivement $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

Exemples

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$. La série de terme général u_n est la suite de terme général $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}$.
2. La suite définie par $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} n^p$ n'est pas une série car le terme général n^p dépend aussi de p.

Proposition – *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.*
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = S_n - S_{n-1}$.

19.1.2 Convergence, somme et reste

Définition – Série convergente, somme d'une série

Si la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles d'une série $\sum u_n$ possède une limite finie, on dit que la série $\sum u_n$ est convergente.
La limite de cette suite est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et est appelée **somme de la série** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n$$

Si une série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarques

1. La nature (convergente ou divergente) d'une série n'est pas changée si on modifie un nombre fini de termes de la série.
2. Il faut manipuler la notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ avec prudence : elle ne désigne pas une somme au sens usuel du terme, mais une limite, celle des sommes partielles.

Exemple

La série de terme général $u_n = n$ diverge car la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$.

Définition – Série télescopique

On appelle **série télescopique** toute série de terme général $u_n = v_{n+1} - v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ; en d'autre termes, toute série dont le terme général est la différence de deux termes consécutifs d'un suite donnée.

Proposition – *La somme partielle d'ordre p de la série télescopique* $\sum(v_{n+1}-v_n)$ *vérifie :*

$$S_p = \sum_{k=0}^{p}(v_{k+1} - v_k) = v_{p+1} - v_0$$

La série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ *converge si et seulement si la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Méthode 1 Séries télescopiques $\sum(v_{n+1} - v_n)$

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(v_{n+1} - v_n) = v_{p+1} - v_0 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - v_0$

- L'étude de la série télescopique se ramène donc à l'étude d'une suite.
- Inversement, il est parfois utile pour l'étude d'une suite, de considérer la série dont le terme général est la différence de deux termes consécutifs de cette suite.

Exemple d'application

Soit $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, en multipliant par la quantité conjuguée on obtient $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Or $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum u_n$ diverge.

Vous trouverez à l'exercice 23 (la constante d'Euler) une situation où l'on utilise une série pour étudier une suite.

Définition – Reste d'une série convergente

Si la série $\sum u_n$ converge, on appelle **reste d'ordre** p de cette série la quantité :

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = S - S_p$$

où S est la somme de la série et S_p la somme partielle.

Remarque – R_p est l'erreur commise en approchant S par S_p.

Exemple

Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$. Montrons qu'elle converge et donnons l'expression de son reste d'ordre p.

Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ donc $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k = 1 - \frac{1}{p+1} \to 1$. La série converge et $R_p = \dfrac{1}{p+1}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Proposition – *Soit $\sum u_n$ une série convergente, alors la suite de ses restes tend vers 0.*

19.1.3 Propriétés

Proposition – Condition nécessaire de convergence
Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

La réciproque est fausse. Un contre-exemple est donné par la série *harmonique* de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, pour $n \geqslant 1$, qui diverge vers $+\infty$. (cf. exercice 23)

Démonstration
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Or la série $\sum u_n$ converge, alors il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $\lim S_n = \lim S_{n-1} = S$; ainsi, $\lim u_n = S - S = 0$. ■

Méthode 2 Condition suffisante de divergence

En pratique, on utilise la contraposée de cette implication :
une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est divergente.

Exemple d'application

Comme $(-1)^n \not\to 0$ alors $\sum(-1)^n$ est une série divergente.

Théorème

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes alors $\sum(u_n + v_n)$ est une série convergente de somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
- Si $\sum u_n$ est une série convergente alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum \lambda u_n$ est une série convergente de somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

19.2 Séries à termes positifs

19.2.1 Définition et CNS de convergence

Définition – Série à termes positifs

Une série $\sum u_n$ est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geqslant 0$.

Remarque – Les résultats de convergence des séries à termes positifs restent valables même si un nombre fini de termes ne sont pas positifs, i.e. à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 0$.

Théorème – CNS de convergence des séries à termes positifs
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, alors :
$\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration
Pour tout $n \geqslant 1$, $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Il y a deux cas :

- soit la suite est majorée, alors le théorème de limite monotone donne que la suite admet une limite réelle.
- soit la suite n'est pas majorée, alors $\lim S_n = +\infty$.

Ainsi, la série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. ■

19.2.2 Théorème de comparaison

Théorème – Théoréme de comparaison des séries à termes positifs
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

1. à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors
 (a) si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,
 (b) si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
2. $u_n = o(v_n)$ alors on conclut comme précédemment.
3. $u_n \sim v_n$ alors les deux séries sont de même nature.

Démonstration
1. Sans perdre en généralité, on considère que pour tout $n \geqslant 0$ on a $u_n \leqslant v_n$ et donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{p} v_n$
 (a) si la série à termes positifs $\sum v_n$ converge alors ses sommes partielles sont majorées. Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $p \geqslant 0$,
 $$\sum_{n=0}^{p} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{p} v_n \leqslant M$$
 Ainsi les sommes partielles de $\sum u_n$ sont majorées, comme $\sum u_n$ est à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
 (b) C'est la contraposée du résultat précédent.
2. Il existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geqslant n_1,\ u_n = \alpha_n v_n$.
 La définition de $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (pour $\varepsilon = 1$) donne : il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_2,\ -1 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$.
 Pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, $u_n \leqslant v_n$ ce qui nous ramène à la situation précédente.
3. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1,\ u_n = a_n v_n$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

La définition de $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$) donne : il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|a_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, $\frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$. Une démarche similaire à celle du 1. permet de conclure. ■

Exemples

1. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. En effet, pour tout $n \geqslant 2$

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

 Ainsi $\sum \frac{1}{(n-1)n}$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge aussi.

2. La série $\sum \frac{e^{-n}}{n}$, $n \geqslant 1$, converge.
 En effet, la croissance comparée donne $\frac{e^{-n}}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et que les deux séries sont à termes positifs alors $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

3. La série $\sum \ln(1 + \frac{1}{n^2})$, $n \geqslant 1$, converge.
 Comme $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, les équivalents usuels donnent $\ln(1 + \frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et les deux séries sont à termes positifs donc elles sont de même nature : convergente.

4. La série $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$, $n \geqslant 1$ diverge.
 Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, les équivalents usuels donnent $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge et les deux séries sont à termes positifs donc elles sont de même nature : divergente.

La comparaison de séries afin d'en déterminer la nature ne s'applique qu'aux séries dont le terme général est de signe fixe (positif). À l'exercice 26 vous trouverez un exemple de série vérifiant : la série $\sum u_n$ converge et $u_n \sim v_n$ mais la série $\sum v_n$ diverge.

19.2.3 Séries à termes quelconques. Convergence absolue

Définition – Série absolument convergente

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemples

1. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est absolument convergente. En effet, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et

$$\frac{|a|^n}{n!} = \underbrace{\frac{|a|^{n-2}}{(n-2)!}}_{\to 0 \text{ car } |a|^{n-2}=o((n-2)!)} \times \overbrace{\frac{a^2n^2}{n(n-1)}}^{\to a^2} \times \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Théorème – Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration

- En préliminaire, on remarque que toute suite peut être considérée comme la différence de deux suites à termes positifs :

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ avec } u_n^+ = \frac{u_n + |u_n|}{2} \text{ et } u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

en particulier, $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et donc $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$.

- Si $\sum |u_n|$ converge alors le théorème de comparaison donne que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.
La série $\sum u_n$ est la différence de deux séries qui convergent, donc elle converge. ■

La réciproque est fausse. La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est un contre-exemple : elle converge mais ne converge pas absolument.
On sait déjà que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série ne converge pas absolument. Il reste à monter qu'elle converge. Pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{1\leqslant 2k\leqslant 2n} -\frac{1}{2k} + \sum_{1\leqslant 2k+1\leqslant 2n} \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} -\frac{1}{2k} + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} \qquad \text{posons } v_k = \frac{1}{2k(2k-1)} \sim \frac{1}{4k^2} \end{aligned}$$

Or la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_k$ converge et notons ℓ sa somme : $S_{2n} \to \ell$. Or $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ell$ donc $S_n \to \ell$. La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est donc bien convergente.

19.3 Séries géométriques et exponentielles

19.3.1 Série géométrique et ses dérivées

Définition – Série géométrique

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, on appelle série géométrique de raison x et de rang initial n_0, la série de terme général x^n, pour $n \geqslant n_0$.

Exemple

Les séries $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum (-1)^n$ sont de type géométrique de raison respective $\frac{1}{2}$ et -1.

Théorème – Une série géométrique de raison x converge si et seulement si $|x| < 1$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et pour tout } n_0 \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x}.$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration
Si $|x| \geqslant 1$, alors le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.
Soit $x \in]-1,1[$ et $p \geqslant n_0$ donc $\lim x^p = 0$ et

$$S_p = \sum_{n=n_0}^{p} x^n = x^{n_0} \frac{1 - x^{p-n_0+1}}{1-x} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x^{n_0}}{1-x} \quad \blacksquare$$

Définition – Série dérivée d'une série géométrique

Soit $k \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre k de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$.
On appelle série dérivée d'une série géométrique toute série de la forme :

$$\sum n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}, \quad n \geqslant k,$$

où x est un nombre réel.

Exemple

La série $\sum n(n-1)3^{n-2}$ est du type série dérivée d'une série géométrique de raison 3.

Théorème – Soit $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$, $n \geqslant k$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et sa somme vaut :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Abusivement formulé par : $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} (x^n)^{(k)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}$.

Démonstration
Restriction au cas où $n = 2$:
Si $|x| \geqslant 1$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.
Soit $x \in]-1,1[$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{p} x^n = \frac{1-x^{p+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{p+1}}{1-x}$$

Dérivons 2 fois cette égalité sur $]-1,1[$:

$$S_p^{(2)}(x) = \sum_{n=2}^{p} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} - \left(\frac{x^{p+1}}{1-x}\right)^{(2)}$$

Il reste à montrer que $\left(\dfrac{x^{p+1}}{1-x}\right)^{(2)} \to 0$ quand $p \to +\infty$.
La formule de Leibniz donne :

$$\left(\frac{x^{p+1}}{1-x}\right)^{(2)} = \binom{2}{0}\frac{(p+1)px^{p-1}}{(1-x)} + \binom{2}{1}\frac{(p+1)x^p}{(1-x)^2} + \binom{2}{2}\frac{2x^{p+1}}{(1-x)^3}$$

Or, pour $p \to +\infty$, on a $p^2x^p \to 0$, $px^p \to 0$ et $x^p \to 0$ car la croissance comparée donne pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $x^p = o(\frac{1}{p^k})$ car $x \in]-1,1[$.

Ainsi, en tant que combinaison linéaire de suite de limite nulle, $S_p^{(2)}(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{(1-x)^3}$.
Conclusion : la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$, $n \geqslant 2$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et a pour somme $\dfrac{2}{(1-x)^3}$. ■

Exemple

La série $\sum \dfrac{n}{3^{n-1}}$, pour $n \geqslant 1$, et de type dérivée d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$, donc elle converge et sa somme est $\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{4}$.

Remarque – Deux cas particuliers, avec $|x| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Exemple

Dans le cadre des probabilités, lors du calcul de la variance d'une variable aléatoire de loi géométrique, nous sommes amenés à considérer la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^{n-1}$, pour $n \geqslant 1$ et $|x| < 1$. Or $n^2 = n(n-1) + n$.
Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} n^2x^{n-1} = x\sum_{n=2}^{p} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{p} nx^{n-1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x \times \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$
Ainsi la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

Corollaire – Formule du binôme négatif – Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$ alors la série $\sum \binom{n}{k} x^{n-k}$, $n \geqslant k$ converge et :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Exemple

$\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ donc d'après la formule du binôme négatif, la série $\sum \binom{n}{3} \dfrac{1}{2^{n-3}}$, pour $n \geqslant 3$, converge et sa somme vaut $\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 8$.

19.3.2 Séries exponentielles

Définition – Série exponentielle

On appelle série exponentielle toute série de terme général $\dfrac{a^n}{n!}$, $n \geqslant 0$, où $a \in \mathbb{R}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Les séries $\sum \frac{1}{2^n n!}$ et $\sum \frac{1}{n!}$ sont de type exponentielle.

Théorème – La série exponentielle $\sum \frac{a^n}{n!}$, $n \geqslant 0$, converge vers $\exp(a)$ pour tout réel a :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = \exp(a).$$

Démonstration

La fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$; utilisons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et a :

$$\left| e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \max\{|\exp^{(n+1)}(t)|;\ t \text{ entre 0 et } a\} \leqslant \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|a|}$$

car $\exp^{(n+1)} = \exp$ et $\max\{\exp(t);\ t \text{ entre 0 et } a\} \leqslant \max\{\exp(t);\ t \in [-|a|, |a|]\}$.
Or a est fixé ; par croissance comparée, on a $|a|^{n+1} = o((n+1)!)$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|a|} = 0$ et le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^a$. ■

Exemple

La série $\sum \frac{3^n}{n!}$, pour $n \geqslant 2$, et de type exponentielle donc elle converge et, en tenant compte des termes manquant d'indices 0 et 1, sa somme est $e^3 - 1 - 3 = e^3 - 4$.

Méthode 3 Étude d'une série type géométrique ou exponentielle

- décomposer la somme partielle en une combinaison linéaire de sommes partielles connues : pour cela décomposer les polynômes en n comme combinaison linéaire de $\{1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \ldots\}$,
- utiliser le fait qu'une combinaison linéaire de séries convergentes est une série convergente,
- donner la somme par combinaison linéaire des sommes connues.

Exemple d'application

Déterminons la nature et la somme éventuelle de $\sum \frac{(n^2-1)2^n}{n!}$.
On a $n^2 - 1 = n(n-1) + n - 1$ ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{p} \frac{(n^2-1)2^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{p} \frac{n(n-1)}{n!} 2^n + \sum_{n=0}^{p} \frac{n}{n!} 2^n - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} 2^n \\
&= 2^2 \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{(n-2)!} 2^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(n-1)!} 2^{n-1} - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} 2^n \\
&= 4 \sum_{k=0}^{p-2} \frac{1}{k!} 2^k + 2 \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} 2^i - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} 2^n
\end{aligned}$$

On a effectué le changement d'indice $k = n-2$ dans la première somme et $i = n-1$ dans le deuxième. Nous obtenons des séries exponentielles, donc convergentes.
Ainsi la série de départ est une combinaison linéaire de séries convergentes : elle converge. Sa somme est donnée par $4e^2 + 2e^2 - e^2 = 5e^2$.

19.3.3 Séries de Riemann

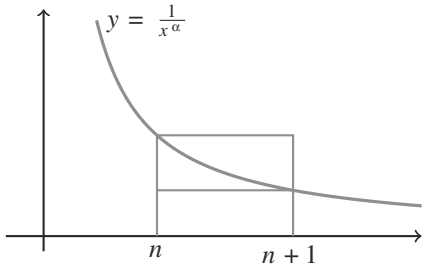
Définition – Série de Riemann

On appelle série de Riemann toute série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème – La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Si $\alpha \leqslant 0$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.
Si $\alpha = 1$, on sait que la série *harmonique* diverge.
Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$



$$n \leqslant x \leqslant n+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

Par croissance de l'intégrale sur $[n, n+1]$, $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$

Ce qui donne aussi pour $n \geqslant 2$: $\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx$

Soit $p \geqslant 2$, on somme ces inégalités pour $n \in [\![2, p]\!]$. La relation de Chasles donne :

$$\int_2^{p+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_1^p \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Donc $\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^{p+1} = \underbrace{\frac{(p+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha}}_{v_p} \leqslant S_p \leqslant \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{p} = \underbrace{\frac{p^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}}_{w_p}$.

Si $\alpha > 1$ la suite (w_n) converge donc (S_n) est majorée et à termes positifs, donc la série converge.
Si $0 < \alpha < 1$ la suite (v_n) tend vers $+\infty$ donc (S_n) aussi et la série diverge. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Méthode 4 Comparaison à une série de Riemann

La comparaison à une série de Riemann est très utilisée pour établir la nature d'une série : elle permet de déterminer la nature de la série $\sum |u_n|$, c'est-à-dire de voir si la série $\sum u_n$ converge absolument, (et en particulier converge).

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ alors $\sum |u_n|$ diverge.

Dans les deux cas, cela revient à chercher les valeurs de α telles que $n^\alpha u_n$ tende vers 0 dans le premier cas ou vers $+\infty$ dans le second.

Le théorème de comparaison et en particulier la comparaison avec une série de Riemann ne permet pas de montrer qu'une série, dont le terme n'est pas de signe constant, diverge. Cela permet seulement de montrer qu'une telle série ne converge pas absolument, mais la série peut néanmoins converger.

Exemples d'application

1. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge : c'est une série de Riemann pour $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.
2. $\sum \frac{1}{n\sqrt[6]{n}}$ converge : c'est une série de Riemann pour $\alpha = \frac{7}{6} > 1$.
3. $\sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ converge par comparaison avec la série de Riemann pour $\alpha = 1{,}2 > 1$.
 On a en effet : $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1,2}} \times \frac{\ln n}{n^{0,3}} = o(\frac{1}{n^{1,2}})$ quand $n \to +\infty$ et pour $n \geqslant 1$, $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \geqslant 0$.
4. Une généralisation sont les *séries de Bertrand* : pour tout réel β, $\sum \frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.
 Pour $\gamma \in]1, \alpha[$ on a $\frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. En effet, $n^\gamma \frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} = \frac{\ln(n)^\beta}{n^{\alpha-\gamma}}$ avec $\alpha - \gamma > 0$.
 Or $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge donc $\sum \frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$ converge également.
5. $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge. En effet, la croissance comparée donne $u^4 e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; par composition de limite avec $u = \sqrt{n}$, on obtient : $n^2 e^{-\sqrt{n}} \to 0$ et donc $e^{-\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$. La comparaison avec la série de Riemann pour $\alpha = 2 > 1$ donne la convergence.

Synthèse

Savoirs

- critères de convergence des séries usuelles : géométriques et leurs dérivées, exponentielles, de Riemann
- la convergence absolue d'une série implique sa convergence

Savoir-faire

- les sommes télescopiques permettent de faire le lien entre un suite et une série
- Détermination de la nature par comparaison avec une série de Riemann
- Détermination de la nature et de la somme éventuelle : identifier et manipuler les séries télescopiques, exponentielles, géométriques et leurs dérivées

Mots-clés

- série,
- somme partielle,
- convergence,
- convergence absolue,
- comparaison,
- série télescopique,
- série géométrique,
- série exponentielle,
- série de Riemann.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

19.1 **Vrai ou faux ?**

a) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

b) Une série qui diverge peut converger absolument.

c) La série $\sum \sin n$, pour $n \geqslant 0$, converge.

19.2 **Recherche de contre-exemples**

Pour chacune des affirmations suivantes, montrer qu'elle est fausse en donnant un contre-exemple.

a) Si $\sum(u_n + v_n)$ converge alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

b) Si $\sum u_n$ converge alors elle converge absolument.

19.3 Pour chaque terme général, identifier le type de la série associée puis donner la nature et la somme éventuelle :

$a_n = \dfrac{12^n}{n!}$, pour $n \geqslant 0$

$b_n = \dfrac{3^n}{2^n}$, pour $n \geqslant 0$

$c_n = \dfrac{1}{2^n n!}$, pour $n \geqslant 3$

$d_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$, pour $n \geqslant 1$

$e_n = \dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{5^n}$, pour $n \geqslant 2$

$f_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{5^{n-3}}$, pour $n \geqslant 3$

19.4 Quel lien y-a-t-il entre la convergence et l'absolue convergence ?

19.5 En donnant un équivalent du terme général, donner la nature des séries suivantes :

$$\sum \ln\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \qquad \sum\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}} - 1\right)$$

$$\sum\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \qquad \sum \sin\frac{(-1)^n}{n^3}$$

19.6 Donner un critère simple sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la série $\sum u_n$ diverge.

19.7 **QCM**

La nature de la série $\sum u_n$ est-elle :

□ absolument convergente, donc convergente,

□ convergente, mais pas absolument convergente,

□ divergente,

□ ne peut être déterminée ?

a) $u_n = o\left(\dfrac{7^n}{n!}\right)$

b) $\dfrac{1}{n^2} = o(u_n)$

c) $u_n = o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

d) $u_n = o\left(\dfrac{5^n}{3^n}\right)$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o(u_n)$

f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n}$

g) $\dfrac{n!}{2^n} = o(u_n)$

h) $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$

19.8 Que dire de la nature de $\sum(u_{n+1} - u_n)$ dans les situations suivantes :

a) $u_n \not\longrightarrow_{n\to+\infty} 0$

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos n$

c) $u_{n+1} - u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$

d) $u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \pi$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 517.

■ **Séries téléscopiques**

19.9 ◎

Donner la nature et la somme éventuelle des séries de terme général

$$u_n = \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}, \text{ pour } n \geqslant 1$$

$$v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \text{ pour } n \geqslant 2$$

$$w_n = \frac{4n+2}{n(n+1)(n+2)}, \text{ pour } n \geqslant 1$$

19.10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

2) Établir la convergence de la série de terme général u_n^2 et calculer sa somme.

3) À l'aide des sommes partielles, montrer que la série de terme général $\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est divergente.

4) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

■ Séries géométriques

19.11

Nature et somme éventuelle de :

$$\sum \frac{n+2}{3^{n-1}}, \text{ pour } n \geqslant 2 \text{ et } \sum \frac{n^2-4}{5^n}, \text{ pour } n \geqslant 1.$$

19.12 N

ature et somme éventuelle de $\sum u_n$, $\sum nu_n$ et $\sum n^2 u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

19.13 ◎

1) Justifier que $0{,}999999\ldots = 1$.

2) Trouver une fraction dont le développement décimal est $12{,}1212121212\ldots$.

19.14 ◎

Discuter en fonction des réels positifs a et b la nature de la série de terme général $\dfrac{a^n}{1+b^n}$.

19.15 Critère de d'Alembert ◎

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.

1) Démontrer que :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

2) Quelle est la nature de $\sum u_n$ si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$?

3) Application :

Nature des séries $\displaystyle\sum \frac{n^{12}}{n!}$, $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n}$ et $\displaystyle\sum \binom{2n}{n}^{-1}$.

■ Séries exponentielles

19.16 ◎

Nature et somme éventuelle de :

a) $\displaystyle\sum \frac{3n^2-2}{n!}$, pour $n \in \mathbb{N}$

b) $\displaystyle\sum \frac{4n^2 2^n + n3^{-n}}{(n+1)!}$, pour $n \geqslant 0$

c) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n n}{(n-1)!}$, pour $n \geqslant 5$

19.17

Nature et somme éventuelle des séries $\sum u_n$, $\sum nu_n$ et $\sum n^2 u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-3}n!} - \frac{3^{n+2}}{(n+3)!}$$

19.18

Nature et somme éventuelle de $\sum n^3 v_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, avec $v_n = \dfrac{5^{n-1}}{n!}$.

■ Séries de Riemann

19.19

Nature des séries de terme général :

$$(i)\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{\pi}{2n} \qquad (ii)\ \frac{n\ln n}{5^n}$$

$$(iii)\ \ln\left(1-\frac{1}{n+3}\right) \qquad (iv)\ \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}-1$$

$$(v)\ \frac{\cos(2n)}{3n^2-4n+1} \qquad (vi)\ \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$$

$$(vii)\ \sin\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \qquad (viii)\ e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

19.20

Considérant la série $\sum u_n$, montrer que :

1) si la suite $(n^2 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $\sum u_n$ converge absolument ;

2) si la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite réelle non nulle, ou $+\infty$, ou $-\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

3) Déterminer la nature de la série $\sum (\ln n)^{-\ln n}$.

19.21 Développement limité

Établir la convergence de la série de terme général $u_n = \sin\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$.

19.22 Développement limité

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1) Déterminer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) Donner la nature de $\sum(u_n - \ell)$.

19.23 Constante d'Euler

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1) En étudiant la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. La limite de cette suite est notée γ, appelée *constante d'Euler*.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

■ Utilisation d'intégrales

19.24 ◎

Nature et somme éventuelle de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

19.25

Considérons la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$, pour $n \geqslant 2$.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in [n, n+1]$:

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \frac{1}{x \ln x} \leqslant \frac{1}{n \ln n}$$

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x}\, dx \leqslant \frac{1}{n \ln n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

Pour la suite, on pose $p \geqslant 3$.

3) En déduire un encadrement de $S_p = \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{n \ln(n)}$.

4) En effectuant le changement de variable $u = \ln x$, calculer

$$I_p = \int_2^p \frac{1}{x \ln(x)}\, dx$$

5) Donner une équivalent de S_p.

Que dire de la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$, pour $n \geqslant 2$.

Exercices d'approfondissement

19.26 Critère spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On note S_p la somme partielle d'ordre p de la série

$$\sum (-1)^n u_n$$

1) Montrer que $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2) En déduire que $\sum (-1)^n u_n$ converge. Soit S sa somme.

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que $|S - S_p| \leqslant u_{p+1}$.

4) Applications :

a) Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel α, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

b) Pour une telle valeur de α, écrire un programme permettant de calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ à ϵ près.

Les réels α et $\varepsilon > 0$ seront demandés à l'utilisateur.

c) Déterminer la nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5) Donner un contre-exemple montrant que le théorème de comparaison ne s'applique qu'aux séries dont les termes généraux sont de signe fixe : c'est-à-dire, donner deux séries telles que $u_n \sim v_n$ avec

$$\sum u_n \text{ convergente mais } \sum v_n \text{ divergente}$$

19.27 ◎ d'après oral ESCP 2006

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$$

Déterminer α pour que la série de terme général $\ln v_n$ converge.

3) En déduire que la série de terme général u_n converge.

4) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

5) En déduire la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

19.28 d'après oral ESCP 2009

Dans tout cet exercice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle décroissante de limite nulle.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) - n a_n$$

2) On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 0$.

b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

3) On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.

a) Montrer que pour tout n et k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$n(a_n - a_{n+k}) \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$$

b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Indications

19.9 On pourra déterminer α, β et γ tels que

$$w_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}.$$

19.13 Interpréter le nombre 0,999999 ... comme la somme d'une série usuelle convergente.

19.14 Chercher un équivalent du terme général et comparer les séries.

19.15

1) En utilisant la définition de la limite de $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$, établir une comparaison entre $\sum u_n$ et une série géométrique convergente.

19.16 Décomposer le polynôme suivant une famille adaptée : par exemple pour b) on prendra $\{(n+1)n, n+1, 1\}$. Puis ramener la somme partielle à une combinaison linéaire de sommes partielles usuelles.

19.24 Travailler sur les sommes partielles en considérant

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\, dt$$

19.27

1) Considérer la série téléscopique $\sum(\ln u_n - \ln u_{n+1})$, donner sa nature et en déduire la limite de $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Faire un développement limité de $\ln v_n$ et appliquer le critère de Riemann.

3) Considérer la suite des sommes partielles de $\sum \ln v_n$ et donner un équivalent de u_n.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

19.1

a) Vrai. En effet si $\sum(u_n + v_n)$ était convergente alors $\sum v_n = \sum[(u_n + v_n) - u_n]$ serait convergente.
b) Faux. Si une série converge absolument, alors elle converge.
c) Faux. Le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

19.2

a) Prendre $u_n = n + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = -n$ pour $n \geqslant 1$.

La série $\sum(u_n + v_n) = \sum \dfrac{1}{n^2}$ converge mais les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendent pas vers 0 donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.
b) On a vu dans le cours (page ? ?) que la série harmonique alternée, $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, converge mais ne converge pas absolument : $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

19.3

• $\sum a_n$ est du type série exponentielle, donc converge : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = e^{12}$.

• $\sum b_n$ est du type série géométrique de raison $\dfrac{3}{2} \notin]-1, 1[$ donc diverge.

• $\sum c_n$ est du type série exponentielle, donc converge. En tenant compte des premiers termes manquants,

$$\sum_{n=3}^{+\infty} c_n = e^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = e^{\frac{1}{2}} - \frac{13}{8}.$$

• $\sum d_n$ est du type série dérivée d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc converge :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

• $\sum e_n$ est du type série géométrique de raison $-\dfrac{4}{5} \in]-1, 1[$ donc converge : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \frac{1}{1-(-\frac{4}{5})} = \frac{16}{45}$

• $\sum f_n$ est du type série dérivée d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{5} \in]-1, 1[$, donc converge :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \frac{3!}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^4} = \frac{6 \times 5^4}{4^4} = \frac{3 \times 5^4}{2^7}$$

19.4

La convergence absolue implique la convergence.

19.5

• Comme $\dfrac{1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\ln(1 - \dfrac{1}{3^n}) \sim -\dfrac{1}{3^n}$. Donc $|\ln(1 - \dfrac{1}{3^n})| \sim \dfrac{1}{3^n}$. Or $\sum \dfrac{1}{3^n}$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in]-1, 1[$ donc convergente ; par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \ln(1 - \dfrac{1}{3^n})$ converge absolument donc converge.

• Comme $\dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $e^{\frac{1}{2n}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n}$. Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum(e^{\frac{1}{2n}} - 1)$ diverge.

• Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $1 - \cos\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{2n^2}$. Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum \dfrac{1}{2n^2}$ converge également ; par comparaison de séries à termes positifs, $\sum(1-\cos\dfrac{1}{n})$ converge.

• Comme $\dfrac{(-1)^n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $|\sin\dfrac{(-1)^n}{n^3}| \sim \dfrac{1}{n^3}$. Or $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente (pour $3 > 1$) ; par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \sin\dfrac{(-1)^n}{n^3}$ converge absolument donc converge.

19.6

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ diverge. On rappelle que la réciproque est fausse.

19.7

a) $\sum u_n$ converge absolument et donc converge. En effet, la série $\sum \dfrac{7^n}{n!}$ est du type série exponentielle donc converge ; par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
b) On ne peut rien conclure, même si on savait que $\sum u_n$ est à termes positifs. $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, pour $2 > 1$: "$\sum u_n$ domine une série convergente".
c) $\sum u_n$ converge absolument et donc converge. Voir a) avec $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ une série de Riemann convergente pour $\dfrac{3}{2} > 1$.
d) On ne peut rien conclure. $\sum \dfrac{5^n}{3^n}$ est une série géométrique de raison $\dfrac{5}{3} > 1$ donc divergente : "$\sum u_n$ est dominée par une série divergente".
e) On ne peut rien conclure excepté que $\sum u_n$ ne converge pas absolument. En effet, $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, pour $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ diverge.

Mais on ne sait pas si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe fixe donc on ne peut rien dire sur $\sum u_n$.
f) $\sum u_n$ converge mais pas absolument. C'est un multiple de la série harmonique alternée.
g) $\sum u_n$ diverge. En effet, $\dfrac{n!}{2^n} \not\to 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de limite nulle, sa série diverge. h) On ne peut rien conclure excepté que $\sum u_n$ ne converge pas absolument. En effet, $\sum \dfrac{1}{2n}$ diverge et donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum \left|\dfrac{(-1)^n}{2n}\right|$ diverge.

19.8 On se rappelle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
a) On ne peut rien dire. Par exemple si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ la série converge, mais si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors la série diverge.
b) La série diverge car la suite n'admet pas de limite finie.
c) On ne peut rien dire. Par exemple si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ alors $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la série converge, mais si $u_n = \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors la série diverge et on a toujours : $u_{n+1}-u_n = \ln\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
d) La série converge puisque la suite admet une limite finie.

19.9 La nature de ces séries peut être établie par comparaison de séries ou en revenant à la définition : la nature de la suite des sommes partielles.

• $\sum u_n$: On a $\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right) = \sin\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

or $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ donne

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_n = \tan 1 - \tan\frac{1}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tan 1$
La série converge et sa somme est tan 1.

• $\sum v_n$: On a $v_n = \ln\dfrac{n^2-1}{n^2} = \ln\dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}$
donc $v_n = \ln\dfrac{n+1}{n} - \ln\dfrac{n}{n-1}$
La série $\sum v_n$ est de type téléscopique :

$$\sum_{n=2}^{p} v_n = \ln\frac{p+1}{p} - \ln\frac{2}{1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2$$

La série converge, de somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$.

• $\sum w_n$: On décompose la fraction pour $n \geq 1$,

$$w_n = \frac{4n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant les numérateurs, on trouve :
$\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = -3$.
Avec un changement d'indice $k = n+1$ et $j = n+2$:

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{n=1}^{p} w_n = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{p+1}\frac{2}{k} - \sum_{j=3}^{p+2}\frac{3}{j} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \underbrace{0}_{(\star)} + \frac{2}{p+1} - \frac{3}{p+1} - \frac{3}{p+2} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2}{p+1} - \frac{3}{p+1} - \frac{3}{p+2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$(\star)$: *les termes dont les indices sont dans* $[\![3, n]\!]$ *s'annulent mutuellement.*
Donc la série converge et admet pour somme $\dfrac{5}{2}$.

19.10
1) Une récurrence aisée permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$. En particulier la suite est minorée par 0.
De plus, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$; donc la suite est décroissante. D'après le théorème de limite monotone, la suite converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.
Enfin, par passage à la limite sur la relation de récurrence, la limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ c'est-à-dire $\ell = 0$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$ ainsi la série $\sum u_n^2$ est la série téléscopique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: elles sont de même nature, donc la série $\sum u_n^2$ converge,
et $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} u_n^2 = u_0 - u_{p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$. Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n$ ainsi, la série $\sum \ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.
On sait que $\lim u_n = 0$ donc, par composition de limites, $\lim \ln u_n = -\infty$. La série $\sum \ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ diverge.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\frac{u_n - u_n^2}{u_n} = \ln(1-u_n) \sim -u_n$$

Par comparaison de série à termes positifs, $\sum u_n$ et $\sum -\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ sont de même nature.
Or $\sum \ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

19.11 Décomposons la somme partielle comme une combinaison linéaire de sommes partielles de séries connues afin d'en déduire la nature, puis la somme éventuelle :

• On a $\displaystyle\sum_{n=2}^{p}\frac{n+2}{3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{p}\frac{n}{3^{n-1}} + 2\times 3\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{3^n}$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

nous reconnaissons les sommes partielles de séries dérivées d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$, donc convergentes. En tant que combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum \frac{n+2}{3^{n-1}}$ converge et la somme est (en tenant compte des premiers termes absents) :

$$\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{1}{3^0}\right)+6\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3^0}-\frac{1}{3^1}\right)$$

c'est-à-dire $\frac{5}{4}+6\frac{1}{6}=\frac{9}{4}$.

- $$\sum_{n=1}^{p}\frac{n^2-4}{5^n}=\sum_{n=1}^{p}\frac{n(n-1)+n-4}{5^n}$$
$$=\frac{1}{25}\sum_{n=2}^{p}\frac{n(n-1)}{5^{n-2}}+\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{p}\frac{n}{5^{n-1}}-4\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{5^n}$$

nous reconnaissons les sommes partielles de séries dérivées d'une série géométrique de raison $\frac{1}{5} \in]-1,1[$, donc convergentes. En tant que combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum \frac{n^2-4}{5^n}$ converge et sa somme est :

$$\frac{1}{25}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}-4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-\frac{1}{5^0}\right)$$

c'est-à-dire $\frac{1}{25}\frac{250}{64}+\frac{1}{5}\frac{25}{16}-4\left(\frac{5}{4}-1\right)=-\frac{17}{32}$.

19.12 Nous décomposons la somme partielle comme une combinaison linéaire de sommes partielles de séries dérivées de séries géométriques de raisons $\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$ dans $]-1,1[$ donc convergentes ; ainsi, elle converge et l'expression de la somme est connue :

- $$\sum_{n=0}^{p}u_n=\sum_{n=0}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$
$$=2\sum_{n=0}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{p}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$
$$\xrightarrow[p\to+\infty]{}2\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{49}{10}$$
- $$\sum_{n=0}^{p}nu_n=\sum_{n=0}^{p}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=0}^{p}n\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$\xrightarrow[p\to+\infty]{}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2}=\frac{91}{25}$$
- On note que $n^2=n(n-1)+n$. Travaillons sur $\sum n(n-1)u_n$:

$$\sum_{n=0}^{p}n(n-1)u_n=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{p}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$-\left(-\frac{2}{3}\right)\sum_{n=2}^{p}n(n-1)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

La somme de la série est donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)u_n=\frac{1}{2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{2}{3}\frac{2}{\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^3}$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}nu_n=\frac{1036}{125}+\frac{91}{25}$

et $\sum_{n=0}^{+\infty}n^2u_n=\frac{1491}{125}$.

19.13

1) La série géométrique $\sum \frac{1}{10^n}$, pour $n \geqslant 1$, de raison $\frac{1}{10} \in]-1,1[$ est convergente, ainsi :

$$0{,}9999999\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{10^n}=9\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1$$

2) La série géométrique $\sum \frac{1}{100^n}$ est convergente, ainsi :

$$12.1212\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{12}{100^n}=12\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1200}{99}=\frac{400}{33}$$

Remarque – Une autre approche est de considérer que le nombre est solution de $100x = 1200 + x$.

19.14 La série est à termes positifs. L'objectif est de déterminer un équivalent du terme général et d'utiliser la comparaison de séries. La discussion porte sur le dénominateur : sur le paramètre b.

- si $b < 1$, alors $b^n \to 0$ et $\frac{a^n}{1+b^n} \sim a^n$

Par comparaison de séries à termes positfs, la série converge si et seulement si $a < 1$.

- si $b = 1$, alors $\frac{a^n}{1+b^n} \sim \frac{a^n}{2}$

Même conclusion qu'au cas précédent.

- si $b > 1$, alors $\frac{a^n}{1+b^n} \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n$

la série converge si et seulement si $\frac{a}{b} < 1$.

La série $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$ converge si et seulement si :

$$(a,b) \in [0,1[\times[0,1] \text{ ou } \begin{cases} b>1 \\ a<b \end{cases}$$

19.15

1) Soit $\ell = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

La définition de la limite pour $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ donne :

$$\exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geqslant N,\ \ell-\varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell+\varepsilon.$$

Posons $\alpha = \ell + \varepsilon < 1$, alors : $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} \leqslant \alpha u_n$.

Une récurrence rapide pour $n \geqslant N$ donne :

$$\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant \alpha^{n-N} u_N.$$

Or $\alpha \in]0, 1[$ donc la série géométrique $\sum \alpha^n$ converge. Par comparaison, à partir d'un certain rang, de séries à termes positifs, on obtient que la série $\sum u_n$ converge.

2) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et minorée par $u_0 > 0$, elle ne tend pas vers 0. Ainsi, la série diverge.

3) • $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{12}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^{12}} \sim \dfrac{1}{n} \to 0 < 1$, d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum \dfrac{n^{12}}{n!}$ converge.

• $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \dfrac{n^n}{n!} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ or $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} < 1$. La série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

• $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!} \dfrac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \dfrac{1}{4} < 1.$

La série $\sum \binom{2n}{n}^{-1}$ converge.

19.16 Nous décomposons la somme partielle comme une combinaison linéaire de sommes partielles de séries exponentielles donc convergentes ; ainsi, elle converge et l'expression de la somme est connue :

a) On décompose $3n^2 - 2$ suivant $\{n(n-1), n, 1\}$:

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{3n^2-2}{n!} = \sum_{n=0}^{p} \frac{3n(n-1)+3n-2}{n!}$$

$$= 3\sum_{n=2}^{p} \frac{1}{(n-2)!} + 3\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!}$$

$$\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 3e^1 + 3e^1 - 2e^1$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2-2}{n!} = 4e.$

b) On décompose suivant $\{(n+1)n, n+1, 1\}$ ensuite on factorise de façon habile pour faire apparaître des sommes partielles usuelles :

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{4n^2 2^n + n3^{-n}}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \frac{4\left((n+1)n - (n+1) + 1\right)2^n + (n+1-1)3^{-n}}{(n+1)!}$$

$$= 4\times 2\sum_{n=1}^{p} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} - 4\sum_{n=0}^{p} \frac{2^n}{n!} + 4\times\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$+ \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{3^n n!} - 3\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)!}$$

$$\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 8e^2 - 4e^2 + 2\underbrace{(e^2-1)}_{\text{terme de rang 0}} + e^{\frac{1}{3}} - 3\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right)$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n^2 2^n + n3^{-n}}{(n+1)!} = 6e^2 - 2e^{\frac{1}{3}} + 1.$

c) On décompose les polynômes suivant $\{n-1, 1\}$. Ici, la difficulté est dans la gestion des premiers termes tronqués :

$$S_p = \sum_{n=5}^{p} \frac{(-1)^n n}{(n-1)!} = \sum_{n=5}^{p} \frac{(-1)^n(n-1+1)}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=5}^{p} \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

somme téléscopique

$$= \frac{(-1)^3}{3!} - \frac{(-)^{p-1}}{(p-1)!} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(n-1)!} = -\frac{1}{6}.$

19.17 Nous décomposons la somme partielle comme une combinaison linéaire de sommes partielles de séries exponentielles donc convergentes ; ainsi, elle converge et l'expression de la somme est connue :

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} u_n = 2^3 \sum_{n=0}^{p} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{p} \frac{3^{n+3}}{(n+3)!}$

$$\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 8e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\underbrace{\left(e^3 - 1 - 3 - \frac{9}{2}\right)}_{\text{termes de rangs 0,1 et 2}}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 8e^{-\frac{1}{2}} - \frac{e^3}{3} + \frac{17}{6}.$

• On note que $n = n + 3 - 3$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} nu_n$ vaut

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{n(-1)^n}{2^{n-3}n!} - \sum_{n=0}^{p} \frac{(n+3)3^{n+2}}{(n+3)!} + \underbrace{\sum_{n=0}^{p} \frac{3^{n+3}}{(n+3)!}}_{\text{connue}}$$

$$= -2^2 \sum_{n=1}^{p} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{p} \frac{3^{n+2}}{(n+2)!} + \left(e^3 - \frac{17}{2}\right)$$

$$\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} -4e^{-\frac{1}{2}} - (e^3 - 1 - 3) + \left(e^3 - \frac{17}{2}\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} nu_n = -4e^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}$.

• Pour le premier terme : $n^2 = n(n-1) + n$:

$$\sum_{n=0}^{p} n^2 \frac{(-1)^n}{2^{n-3}n!} = 2\sum_{n=0}^{p} \frac{n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{n!} + \underbrace{\sum_{n=0}^{p} \frac{n(-1)^n}{2^{n-3}n!}}_{\text{connue}}$$

$$= 2\sum_{n=2}^{p} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{(n-2)!} + \left(-4e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 2e^{-\frac{1}{2}} - 4e^{-\frac{1}{2}} = -2e^{-\frac{1}{2}}$$

Pour le second terme $n^2 = (n+3)(n+2) - 5(n+3) + 9$, la somme $\sum_{n=0}^{p} n^2 \frac{3^{n+2}}{(n+3)!}$ vaut :

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{(n+3)(n+2)3^{n+2}}{(n+3)!} - 5\frac{(n+3)3^{n+2}}{(n+3)!} + 9\frac{3^{n+2}}{(n+3)!}$$

$$= 3\sum_{n=0}^{p} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} - 5\underbrace{\sum_{n=0}^{p} \frac{(n+3)3^{n+2}}{(n+3)!}}_{\text{connue}} + 9\underbrace{\sum_{n=0}^{p} \frac{3^{n+2}}{(n+3)!}}_{\text{connue}}$$

$$\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +3(e^3 - 1) - 5(e^3 - 1 - 3) + 9\left(\frac{e^3}{3} - \frac{17}{6}\right)$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 u_n = -2e^{-\frac{1}{2}} + e^3 - \frac{17}{2}$

19.18 Travaillons sur la somme partielle avant de conclure sur la nature puis la somme. Décomposons n^3 suivant $\{n(n-1)(n-2), n(n-1), n, 1\}$:

$$\begin{aligned} n^3 &= n(n-1)(n-2) + 3n^2 - 2n \\ &= n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n \end{aligned}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{p} n^3 v_n = \sum_{n=3}^{p} \frac{5^{n-1}}{(n-3)!} + 3\sum_{n=2}^{p} \frac{5^{n-1}}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{p} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= 25\sum_{n=3}^{p} \frac{5^{n-3}}{(n-3)!} + 15\sum_{n=2}^{p} \frac{5^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{p} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$$

La somme partielle se décompose comme une combinaison linéaire de sommes partielles de séries exponentielles ; ainsi, elle converge et l'expression de sa somme est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 v_n = 25e^5 + 15e^5 + e^5 = 41e^5$$

19.19 La méthode générale consiste à mettre en place le théorème de comparaison avec une série usuelle, principalement une série de Riemann. Pour cela, la détermination d'un équivalent simple est pratique.

i) Comme $\frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}$. En particulier $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{\pi}{2n}\right| \sim \frac{\pi}{2n^{1,5}}$. Par comparaison avec la série de Riemann pour $1{,}5 > 1$ donne que la série converge absolument donc converge.

ii) On a $n^2 \times \frac{n\ln n}{5^n} = \frac{\ln n}{n} \times \frac{n^4}{5^n} \to 0$ car $\ln n = o(n)$ et $n^4 = o(5^n)$. Ainsi $\frac{n\ln n}{5^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; la comparaison avec la série de Riemann pour $2 > 1$ donne que la série converge (absolument).

iii) Comme $\frac{1}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \sim -\frac{1}{n+3} \sim -\frac{1}{n} \text{ et } -u_n \sim \frac{1}{n}$$

On note que la série est à termes de signe fixe (négatif). La comparaison avec la série de Riemann pour $1 \leqslant 1$ donne que la série $\sum -u_n$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge.

iv) Posons $v_n = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}} - 1$. Comme $\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $v_n \sim \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n^3}\right) \sim -\frac{1}{3n^3}$ et $|v_n| \sim \frac{1}{3n^3}$.

La comparaison avec la série de Riemann pour $3 > 1$ donne que la série converge (absolument).

v) $\left|\frac{\cos(2n)}{3n^2 - 4n + 1}\right| \leqslant \frac{1}{|3n^2 - 4n + 1|} \sim \frac{1}{3n^2}$.

La comparaison avec la série de Riemann pour $2 > 1$ donne que la série $\sum \frac{1}{|3n^2 - 4n + 1|}$ converge.

Enfin la comparaison avec la série $\sum \frac{1}{|3n^2 - 4n + 1|}$ donne que la série $\sum \frac{\cos(2n)}{3n^2 - 4n + 1}$ converge absolument donc converge.

vi) On sait que *les puissances l'emportent sur* $\ln$ *en* $+\infty$; ainsi, on peut conjecturer que la série se comporte comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc diverge. Prouvons ce résultat.

On cherche alors $\alpha < 1$ tel que $n^\alpha \frac{1}{\sqrt{n}\ln n} \to +\infty$:

$$n^\alpha \frac{1}{\sqrt{n}\ln n} = \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ si } \alpha - \frac{1}{2} > 0$$

En prenant $\alpha = 0{,}6$, on obtient : $\frac{1}{n^{0,6}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right)$.

La série étant à termes positifs, la comparaison avec la série de Riemann pour $0.6 \leqslant 1$ donne que la série diverge.

vii) Le developpement limité de sin en 0 donne :

$$\sin\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{(-1)^{3n}}{3!n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sim -\frac{(-1)^n}{6n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La comparaison avec la série de Riemann pour $2 > 1$ donne que la série converge (absolument).

viii) Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors :

$$\begin{aligned} e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= e-e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \sim \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

La série est donc à termes positifs pour n assez grand. La comparaison avec la série de Riemann pour $1 \leqslant 1$ donne que la série diverge.

19.20

1) La suite $(n^2u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |n^2u_n| \leqslant M$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leqslant \frac{M}{n^2}$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge absolument.
2) La suite (u_n) est à termes de signe fixe à partir d'une certain rang et il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'a partir d'un certain rang $|u_n| > \frac{\varepsilon}{n}$. Par comparaison avec la série de Riemann pour $1 \leqslant 1$, la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument et donc diverge (car à termes de signe fixe à partir d'un certain rang).
3) Montrons que $n^2(\ln n)^{-\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\begin{aligned} n^2(\ln n)^{-\ln n} &= e^{2\ln(n)-\ln(n)\ln(\ln(n))} \\ &= e^{\ln(n)(2-\ln(\ln(n)))} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)\,(2-\ln(\ln(n))) = -\infty$, par composition avec exp, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(\ln n)^{-\ln n} = 0$.
D'après 1), la série $\sum (\ln n)^{-\ln n}$ converge.

19.21

Utilisons un développement limité en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2 sur le terme général ; le reste négligé sera de type $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc convergent (absolument) par comparaison avec une série de Riemann pour $2 > 1$.
Ainsi la nature de la série ne dépend que des premiers termes du développement :

$$u_n = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

Ainsi, par comparaison avec une série de Riemann, pour $2 > 1$, la série $\sum u_n$ converge (absolument).

19.22

Utilisons la même démarche qu'à l'exercice précédent. Le développement limité en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2 du terme général donnera la limite (éventuelle) de la suite et pemettra aussi de conclure sur la nature de la série étudiée.

$$\begin{aligned} n\sin\frac{1}{n} &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) \\ &= 1 - \underbrace{\frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \end{aligned}$$

Or $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, par composition des développements limités nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right) &= -\frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{2}\frac{1}{36n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) \\ &= -\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{180n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) \end{aligned}$$

Et $n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{180n^2} + o(\frac{1}{n^3})$.
Enfin, $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)\right)$; ainsi,

$$\begin{aligned} \left(n\sin\tfrac{1}{n}\right)^{n^2} &= e^{-\frac{1}{6}}\exp\left(-\frac{1}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= e^{-\frac{1}{6}}\left(1 - \frac{1}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= e^{-\frac{1}{6}} - \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{-\frac{1}{6}}$. De plus,

$$|u_n - \mathrm{e}^{-1/6}| \sim \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{180n^2}$$

par comparaison avec la série de Riemann pour $2 > 1$; la série $\sum(u_n - e^{-\frac{1}{6}})$ converge (absolument).

19.23

1) Pour > 0, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc

$$v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

et $|v_{n+1}-v_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$; par comparaison avec une série de Riemann pour $2>1$ la série téléscopique $\sum(v_{n+1}-v_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2) Le résultat de question précédente se réécrit en :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

19.24 À défaut de reconnaître une forme particulière, travaillons sur la somme partielle.

On note que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$.

Utilisant la linéarité de l'intégrale, pour $p\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{2n+1} &= \sum_{n=0}^{p}(-1)^n\int_0^1 t^{2n}\,dt\\ &= \int_0^1\sum_{n=0}^{p}(-t^2)^n\,dt\end{aligned}$$

Or $\forall t\in[0,1]$, $-t^2\in[-1,0]$ donc $-t^2\neq 1$; ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{2n+1} &= \int_0^1\frac{1-(-t^2)^{p+1}}{1-(-t^2)}\,dt\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^1\frac{(-t^2)^{p+1}}{1+t^2}\,dt\end{aligned}$$

On note que $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=[\operatorname{Arctan} t]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

Le théorème de croissance de l'intégrale donne :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{\pi}{4}\right| &= \left|\int_0^1\frac{(-t^2)^{p+1}}{1+t^2}\,dt\right|\\ &\leqslant \int_0^1\frac{t^{2p+2}}{1+t^2}\,dt\\ &\leqslant \int_0^1 t^{2p+2}\,dt=\frac{1}{2p+3}\\ &\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Par encadrement, nous avons $\displaystyle\sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{2n+1}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{4}$.

Ainsi la série $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et a pour somme $\frac{\pi}{4}$.

19.25

1) La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x\ln x}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$ ainsi pour tout $n\geqslant 2$ et tout $x\in[n,n+1]$:

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leqslant\frac{1}{x\ln x}\leqslant\frac{1}{n\ln n}$$

2) Le théorème de croissance de l'intégrale donne pour tout $n\geqslant 2$, avec $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{n\ln n}\,dx=\frac{1}{n\ln n}$:

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\,dx\leqslant\frac{1}{n\ln n}$$

et donc pour $n\geqslant 3$:

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\,dx\leqslant\frac{1}{n\ln n}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x\ln x}\,dx$$

3) En sommant ces inégalités pour $n\in[\![3,p]\!]$, la relation de Chasles donne :

$$\int_3^{p+1}\frac{1}{x\ln x}\,dx\leqslant S_p=\sum_{n=3}^{p}\frac{1}{n\ln n}\leqslant\int_2^{p}\frac{1}{x\ln x}\,dx$$

4) Effectuons le changement de variable donné :

$$\begin{cases}u=\ln t\\ du=\frac{1}{t}dt\\ t=2\leftrightarrow u=\ln 2\\ t=p\leftrightarrow u=\ln p\end{cases}$$

Ainsi $\displaystyle I_p=\int_{\ln 2}^{\ln p}\frac{1}{u}\,du=\ln(\ln(p))-\ln(\ln(2))$

5) Donc pour tout $n\geqslant 3$:

$$\ln(ln(p+1))-\ln(\ln(3))\leqslant S_p\leqslant\ln(\ln(p))-\ln(\ln(2))$$

Montrons que les membres extérieurs sont équivalents à $\ln(\ln(p))$.

On a $\ln(\ln(p))\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ donc

$\ln(\ln(p))-\ln(\ln(2))\sim\ln(\ln(p))$.

Et

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\ln(p+1))}{\ln(\ln(p))} &= \frac{\ln\left[\ln(p)+\ln(1+\frac{1}{p})\right]}{\ln(\ln(p))}\\ &= \frac{\ln\left[\ln(p)\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{p})}{\ln(p)}\right)\right]}{\ln(\ln(p))}\\ &= 1+\underbrace{\frac{\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{p})}{\ln(p)}\right)}{\ln(\ln(p))}}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}1\end{aligned}$$

Pour tout $n\geqslant 3$,

$$\underbrace{\frac{\ln(\ln(p+1))-\ln(\ln(3))}{\ln(\ln(p))}}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}1}\leqslant\frac{S_p}{\ln(\ln(p))}\leqslant\underbrace{\frac{\ln(\ln(p))-\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(p))}}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}1}$$

Par encadrement, nous obtenons $\frac{S_p}{\ln(\ln(p))} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc

$$\sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n\ln n} \sim \ln(\ln(p)) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

La série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

19.26

1) Considérant la décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$S_{2(p+1)} - S_{2p} = u_{2p+2} - u_{2p+1} \leqslant 0$$
$$S_{2(p+1)+1} - S_{2p+1} = -u_{2p+3} + u_{2p+2} \geqslant 0$$

Ainsi $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $S_{2p+1} - S_{2p} = -u_{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2) Les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$, étant adjacentes, elles convergent vers la même limite, notée S. Ainsi la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers S et donc la série $\sum u_n$ converge, de somme S.
3) D'après ce qui précède, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}$$

Discutons suivant la parité pour $k \in \mathbb{N}$:

$$|S_{2k} - S| = S_{2k} - S \leqslant S_{2k} - S_{2k+1} = u_{2k+1}$$
$$|S_{2k+1} - S| = S - S_{2k+1} \leqslant S_{2k+2} - S_{2k+1} = u_{2k+2}$$

Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|S - S_p| \leqslant u_{p+1}$.
Interprétation : l'erreur est inférieure au premier terme négligé.
4) a) Si $\alpha \leqslant 0$, $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \not\to 0$ donc la série diverge.
Si $\alpha > 0$, la suite $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle.
Ainsi, d'après l'étude faite, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.
Conclusion : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ si et seulement si $\alpha > 0$. b) On utilise le résultat de 3) pour contrôler l'arrêt de la boucle itérative :

```
VAR s,a,e:REAL; n:INTEGER;
BEGIN
  WRITE('Donner a et e >0 : ');
  READLN(a,e);
  s:=-1;n:=2;
  REPEAT
     s:=s+EXP(-a*LN(n))+EXP(-a*LN(n+1));
     n:=n+2;
  UNTIL EXP(-a*LN(n))<e;
  WRITELN('S est approchee par : ',s);
  READLN;
END.
```

c) Comme $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, un développement limité du terme général donne :

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.
La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge : c'est la série harmonique.
Comme $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}}$. Par comparaison avec la série de Riemann pour $1{,}5 > 1$, la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right)$ converge absolument donc converge.
Au final, la série $\sum \left[\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right]$ diverge car somme d'une série divergente et de séries convergentes.
L'erreur aurait été de s'arrêter à l'équivalent qui converge mais pas absolument !
5) S'inspirant de la question précédente, posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

alors $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ converge mais $\sum v_n$ diverge.

19.27

1) Par une récurrence aisée, on montre pour tout $n \geqslant 1$ que $u_n > 0$, et donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+5} < 1$$

Finalement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), le théorème de limite monotone donne : la suite converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.
Déterminons ℓ en utilisant une série téléscopique :

$$\begin{aligned}\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) &= \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} = \ln\frac{2n+5}{2n+2} \\ &= \ln\left(1 + \frac{3}{2n+5}\right) \\ &= +\frac{3}{2n+5} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, d'une part, la série $\sum[\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})]$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et d'autre part, son terme général est équivalent au terme général d'une série de type Riemann divergente pour $1 \leqslant 1$. Ainsi la série diverge. De plus, la série étant à termes positifs, la suite de ses sommes partielles est croissante et tend vers $+\infty$.
Or $\sum_{k=0}^{n-1}[\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})] = \ln u_0 - \ln u_n = -\ln(u_n)$ donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par composition des limites avec la fonction exp on obtient : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

2) Effectuons un développement asymptotique de $\ln v_n$ en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ainsi la quantité négligée forme une série convergente par comparaison avec une série de Riemann pour $2 \leqslant 1$ et donc ne change pas la nature de $\sum \ln v_n$.

$$\begin{aligned}\ln v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\frac{2n+2}{2n+5}\right)\\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{2n}}\right)\\ &= (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} (\alpha+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right) - \left(\frac{5}{2n}-\frac{25}{8n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{2\alpha-3}{2n} - \frac{4\alpha-21}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Si $2\alpha - 3 = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{3}{2}$, alors $\ln v_n \sim \frac{15}{8n^2}$. Par comparaison avec une série de Riemann pour $2 > 1$, la série $\sum \ln v_n$ converge absolument.

Si $2\alpha - 3 \neq 0$, alors $\ln v_n \sim \frac{2\alpha-3}{2n}$. La série est à termes de signes fixes à partir d'un certain rang, par comparaison avec la série de Riemann pour $1 \leqslant 1$, la série diverge.

Conclusion : la série $\sum \ln v_n$ converge si et seulement si $\alpha = \frac{3}{2}$.

3) On prend désormais $\alpha = \frac{3}{2}$. Pour tout $p \geq 2$, la somme $\sum_{n=1}^{p-1} \ln v_n$ vaut :

$$\sum_{n=1}^{p-1}\left[\left(\ln\left((n+1)^{\frac{3}{2}}\right) - \ln\left(n^{\frac{3}{2}}\right)\right) + (\ln u_{n+1} - \ln u_n)\right]$$

La somme étant téléscopique :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p-1}\ln v_n &= \ln(p^{\frac{3}{2}}) - \ln 1 + \ln u_p - \ln u_1\\ &= \frac{3}{2}\ln p + \ln u_p - \ln u_1\end{aligned}$$

Donc $u_p = \exp\left(\sum_{n=1}^{p-1}\ln v_n + \ln u_1 - \frac{3}{2}\ln p\right)$.

En notant S la somme de $\sum \ln v_n$, qui converge d'après la question 2, on obtient :

$$u_p \sim u_1 \frac{\mathrm{e}^S}{p^{\frac{3}{2}}}$$

Par comparaison avec la série de Riemann pour $\frac{3}{2} > 1$, la série $\sum u_n$ converge (absolument).

4) Revenant à la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $(2k+5)u_{k+1} = (2k+2)u_k$ et donc

$$2(k+1)u_{k+1} + 3u_{k+1} = 2ku_k + 2u_k$$

Il suffit de sommer ces égalités pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

5) En simplifiant les termes qui apparaissent à la fois à gauche et à droite de l'égalité précédente, nous obtenons :

$$2(n+1)u_{n+1} + 3u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k = 2u_0$$

Or d'après la question 3, il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim \frac{c}{n\frac{3}{2}}$; donc $\lim u_n = \lim nu_n = 0$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 2u_0 = 2$ et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 3$.

19.28

1) Effectuons le calcul pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n}((k-1+1)a_{k-1} - ka_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}[(k-1)a_{k-1} - ka_k]}_{\text{somme téléscopique}}\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} + 0 - na_n\end{aligned}$$

Un changement d'indice dans la somme donne

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - na_n$$

a) Discutons suivant la parité de n :

• Si $n = 2p$, montrons premièrement que $pa_{2p} \to 0$.

On note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. La décroissance et la positivité de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnent :

$$0 \leqslant pa_{2p} = \sum_{k=p+1}^{2p} a_{2p} \leqslant \sum_{k=p+1}^{2p} a_k = A_{2p} - A_p$$

Or la série $\sum a_n$ converge donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie et donc $\lim A_{2p} - A_p = 0$. Le théorème d'encadrement donne $\lim_{p\to\infty} pa_{2p} = 0$.

Ainsi, $\lim_{p\to\infty} 2pa_{2p} = 0$.

• Si $n = 2p+1$, alors la décroissance et la positivité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnent :

$$0 \leq (2p+1)a_{2p+1} \leqslant 2pa_{2p} + a_{2p}$$

Or $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ est une condition nécessaire à la convergence de la série $\sum a_n$ et l'étude du cas pair donnent

$\lim(2pa_{2p} + a_{2p}) = 0$. Le théorème d'encadrement donne $\lim_{p\to\infty}(2p+1)a_{2p+1} = 0$

Finalement, nous obtenons $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

b) On reporte le résultat de la question 2.a) dans celui de la question 1), ainsi la suite des sommes partielles de $\sum b_n$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

3) a) Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une minoration en partant du membre de droite :

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j = \sum_{j=n+1}^{n+k} \underbrace{j(a_{j-1} - a_j)}_{\geqslant 0} \geqslant \underbrace{\sum_{j=n+1}^{n+k} n(a_{j-1} - a_j)}_{\text{somme téléscopique}}$$

Ainsi, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j \geqslant n(a_n - a_{n+k})$.

b) Considérant d'une part la convergence de la série $\sum b_n$ et d'autre part que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle, le théorème de passage à la limite, pour $k \to +\infty$ et à n fixé, appliquée à l'inégalité précédente donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant na_n \leqslant \sum_{j=n+1}^{+\infty} b_j$$

La convergence de la série $\sum b_n$ donne que la suite de ses restes est de limite nulle, donc le théorème d'encadrement pour $n \to +\infty$, appliqué à cette dernière inégalité donne $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

En reportant ce résultat dans celui de la question 1), la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Fonctions de deux variables

CHAPITRE 20

Plan

20.1 Rappels sur le plan. Éléments de topologie 528
20.2 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, continuité 534
20.3 Calcul différentiel 538
Synthèse 543
Tests et exercices 544
Corrigés des exercices 547

Introduction

La plupart des fonctions utilisées dans les modèles économiques sont des fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ (où $n \geqslant 2$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par exemple, lorsque l'on calcule ce que peut produire une entreprise en fonctions de n facteurs de production, on obtient une fonction de n variables, appelée fonction de production. Le principal objectif sera de chercher les valeurs maximales ou minimales prises par de telles fonctions : on parle alors d'optimisation.

L'étude des fonctions de plusieurs variables sera surtout menée en ECS2. En première année, on se limite à une initiation aux fonctions de deux variables.

Prérequis

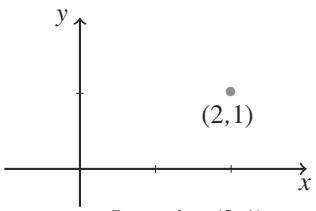
- Étude locale des fonctions.
- Étude globale des fonctions.
- Dérivation.

Objectifs

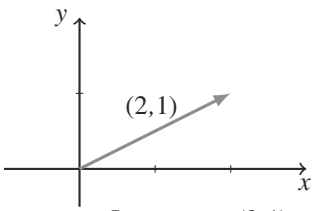
- Introduire quelques éléments de topologie du plan.
- Étudier la continuité d'une fonction de deux variables.
- Initier au calcul différentiel sur les fonctions de deux variables.

20.1 Rappels sur le plan. Éléments de topologie

Dans ce chapitre, le plan $\mathbb{R}^2$ est vu à la fois comme ensemble de points et comme ensemble de vecteurs.



Le point (2,1)

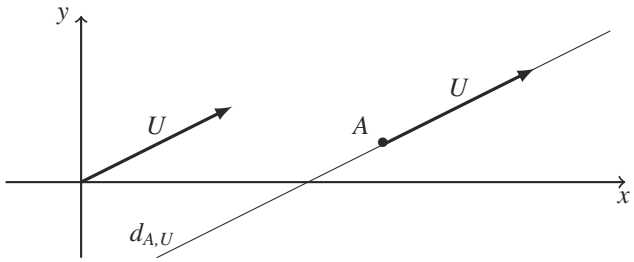


Le vecteur (2,1)

20.1.1 Droites et segments

Définition – Droite passant par A et de vecteur directeur U

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $U \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On appelle **droite passant par A et de vecteur directeur U**, et on note $d_{A,U}$, l'ensemble des points du plan de la forme $M = A + tU$ où $t \in \mathbb{R}$.

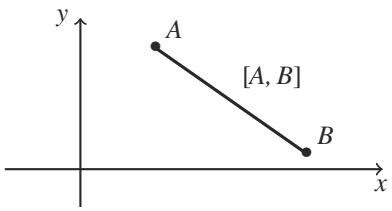


Remarque – Notons $A = (a, b)$ et $U = (u, v)$. Pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$M \in d_{A,U} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \,\Big|\, \begin{cases} x = a + tu \\ y = b + tv \end{cases}$$

Définition – Segment $[A, B]$

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $B \in \mathbb{R}^2$. On appelle **segment** $[A, B]$ l'ensemble des points du plan de la forme $M = A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$ où $t \in [0, 1]$.



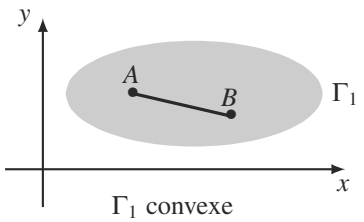
Remarques

1. On a $[A, B] = [B, A]$.
2. Notons $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$. Pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

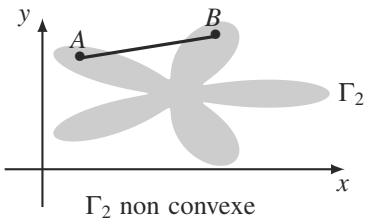
$$M \in [A, B] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1] \,\Big|\, \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) = (1 - t)a_1 + tb_1 \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) = (1 - t)a_2 + tb_2 \end{cases}$$

Définition – Partie convexe

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. On dit que Γ est **convexe** lorsque pour tout couple $(A, B) \in \Gamma^2$ on a $[A, B] \subset \Gamma$.



Γ_1 convexe



Γ_2 non convexe

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Montrons que le quart de plan $\Gamma = \mathbb{R}_+^2$ est convexe.
Soient $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$ deux points quelconques de Γ.
Pour tout $M = (x, y) \in [A, B]$, il existe $t \in [0, 1]$ tel que :

$$x = (1 - t)a_1 + tb_1 \quad \text{et} \quad y = (1 - t)a_2 + tb_2$$

Or A et B sont dans Γ donc a_1, a_2, b_1 et b_2 sont positifs. De plus $t \in [0, 1]$ donc t et $1 - t$ sont positifs. Donc $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, c'est-à-dire $M \in \Gamma$.
Donc $[A, B] \subset \Gamma$ et par conséquent Γ est convexe.

20.1.2 Produit scalaire et norme

Produit scalaire

Définition – Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$

Soient $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **produit scalaire** de X et de Y, et on note $\langle X, Y \rangle$, le réel :

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Proposition – Propriétés élémentaires du produit scalaire
Pour tous X, Y et Z dans $\mathbb{R}^2$, et λ et μ dans $\mathbb{R}$:

- $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$,
- $\langle \lambda X + \mu Y, Z \rangle = \lambda \langle X, Z \rangle + \mu \langle Y, Z \rangle$,
- $\langle Z, \lambda X + \mu Y \rangle = \lambda \langle Z, X \rangle + \mu \langle Z, Y \rangle$,
- $\langle X, 0 \rangle = \langle 0, X \rangle = 0$,
- $\langle X, X \rangle \geqslant 0$,
- $\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Norme et distance euclidienne

Définition – Norme euclidienne

Soit $X \in \mathbb{R}^2$. On appelle **norme euclidienne** de X, et on note $\|X\|$ le réel positif :

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}.$$

Remarque – Si X est vu comme vecteur, $\|X\|$ correspond à la longueur de vecteur X ; si X est vu comme point, $\|X\|$ est la distance de X à l'origine.

Proposition – *Pour tous $X \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :*

- $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$,
- $\|\lambda X\| = |\lambda| . \|X\|$,

Proposition – *Pour tous X et Y dans $\mathbb{R}^2$, on a :*

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2 \langle X, Y \rangle + \|Y\|^2 .$$

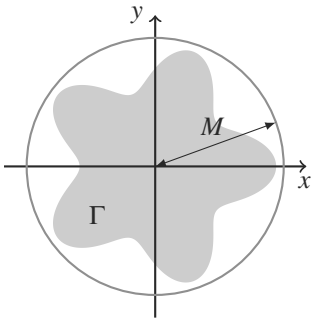
Démonstration

$$\begin{aligned}\|X+Y\|^2 &= \langle X+Y, X+Y\rangle\\ &= \langle X, X+Y\rangle + \langle Y, X+Y\rangle\\ &= \langle X, X\rangle + \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle + \langle Y, Y\rangle\\ &= \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|^2 \quad \text{car } \langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle\end{aligned}$$ ■

Définition – Partie bornée

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. On dit que Γ est **bornée** lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall X \in \Gamma,\ \|X\| \leqslant M \quad .$$



Définition – Distance euclidienne

Soient $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **distance euclidienne** entre X et Y, et on note $d(X, Y)$, le réel positif :

$$d(X, Y) = \|X - Y\| .$$

Remarque – D'après les propriétés de la norme, pour tous X et Y dans $\mathbb{R}^2$:

$$d(X, Y) = d(Y, X) \quad \text{et} \quad d(X, Y) = 0 \ \Leftrightarrow\ X = Y.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous $X \in \mathbb{R}^2$ et $Y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\left|\langle X, Y\rangle\right| \leqslant \|X\| . \|Y\| ,$$

avec égalité si et seulement si X et Y sont proportionnels :

$$\left|\langle X, Y\rangle\right| = \|X\| . \|Y\| \ \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, X = \lambda Y \text{ ou } Y = \lambda X.$$

Remarque – L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit également :

$$\langle X, Y\rangle^2 \leqslant \|X\|^2 . \|Y\|^2 \quad \text{ou} \quad \langle X, Y\rangle^2 \leqslant \langle X, X\rangle \langle Y, Y\rangle .$$

Démonstration

Notons tout d'abord que si $Y = 0$ (c'est-à-dire si $\|Y\| = 0$) alors d'une part $\langle X, Y\rangle = 0 = \|X\| . \|Y\|$ et d'autre part Y est colinéaire à X. Le théorème est donc vérifié dans ce cas particulier.

Supposons désormais $Y \neq 0$, et posons pour tout $\mu \in \mathbb{R}$:

$$P(\mu) = \|X + \mu Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\mu \langle X, Y\rangle + \mu^2 \|Y\|^2$$

P est un polynôme de degré 2 (puisque $\|Y\|^2 \neq 0$) dont le discriminant est :

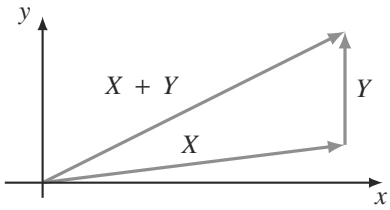
$$\Delta = 4\langle X, Y\rangle^2 - 4\|X\|^2 . \|Y\|^2$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

- **inégalité :** pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $P(\mu) = \|X + \mu Y\|^2 \geqslant 0$, donc P a un signe constant sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, son discriminant est négatif ou nul. De $\Delta \leqslant 0$, on déduit : $\langle X, Y\rangle^2 \leqslant \|X\|^2 . \|Y\|^2$, soit $\left|\langle X, Y\rangle\right| \leqslant \|X\| . \|Y\|$.
- **caractérisation du cas d'égalité :** si $\left|\langle X, Y\rangle\right| = \|X\| . \|Y\|$, alors $\Delta = 0$ et P admet une (unique) racine réelle μ_0. On a $P(\mu_0) = 0$, donc $\|X + \mu_0 Y\| = 0$, puis $X + \mu_0 Y = 0$. On obtient $X = -\mu_0 Y$, donc X et Y sont colinéaires.
 Réciproquement, supposons X et Y colinéaires. Comme $Y \neq 0$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda Y$. Donc $P(-\lambda) = \|X - \lambda Y\|^2 = 0$. Ainsi P admet une racine, donc $\Delta \geqslant 0$. Mais on sait par ailleurs que $\Delta \leqslant 0$, donc $\Delta = 0$. On en déduit que $\langle X, Y\rangle^2 = \|X\|^2 . \|Y\|^2$, soit $\left|\langle X, Y\rangle\right| = \|X\| . \|Y\|$. ■

Théorème – Inégalité triangulaire
Pour tous X, Y et Z dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\| \quad \text{et} \quad d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z)$$



Démonstration
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left|\langle X, Y\rangle\right| \leqslant \|X\| . \|Y\|$.
A fortiori, on a $\langle X, Y\rangle \leqslant \|X\| . \|Y\|$, donc :

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2+2\langle X, Y\rangle+\|Y\|^2 \leqslant \|X\|^2+2\|X\| . \|Y\|+\|Y\|^2 = (\|X\|+\|Y\|)^2$$

On en déduit (les normes étant positives) que : $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$.

- Démontrons maintenant l'inégalité triangulaire pour la distance :

$$d(X, Z) = \|X-Z\| = \|(X-Y)+(Y-Z)\| \leqslant \|X-Y\|+\|Y-Z\| = d(X, Y)+d(Y, Z)$$ ■

20.1.3 Ouverts, fermés

Définition – Boule ouverte, boule fermée

Soit $A \in \mathbb{R}^2$.
On appelle **boule ouverte de centre A et de rayon $r > 0$** l'ensemble :

$$B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(A, X) < r\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|X - A\| < r\}.$$

On appelle **boule fermée de centre A et de rayon $r \geqslant 0$** l'ensemble :

$$\overline{B}(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(A, X) \leqslant r\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|X - A\| \leqslant r\}.$$

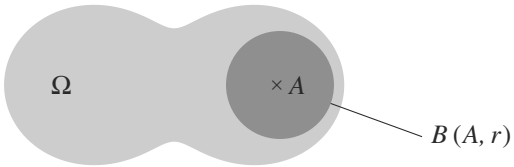
Remarques

1. $B(A, r)$ est tout simplement le disque de centre A et de rayon r, cercle non compris, et $\overline{B}(A, r)$ le disque de centre A et de rayon r, cercle compris. En particulier, $B(A, r) \subset \overline{B}(A, r)$.

2. Les boules ouvertes (resp. les boules fermées) de $\mathbb{R}^2$ jouent un rôle analogue à celui des intervalles ouverts (resp. des segments) de $\mathbb{R}$. Par exemple, si on note $a = \dfrac{\lambda+\mu}{2}$ le milieu de l'intervalle $]\lambda, \mu[$ (avec $\lambda < \mu$) et $r = \dfrac{\mu-\lambda}{2}$ la moitié de la longueur de cet intervalle, on a :
$$]\lambda, \mu[= \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x-a| < r\}.$$
3. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ est donc borné si et seulement s'il est inclus dans une boule fermée de centre $(0,0)$.

Définition – Ensemble ouvert

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On dit que Ω est une **partie ouverte de** $\mathbb{R}^2$ lorsque $\Omega = \emptyset$ ou lorsque pour tout $A \in \Omega$, il existe $r > 0$, tel que $B(A, r) \subset \Omega$.



Exemple

$\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte.

Proposition – *Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.*

Proposition

Une intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ensemble ouvert.
Une réunion quelconque d'ouverts est un ensemble ouvert.

Démonstration

- Soit, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Ω_k une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. On pose $\Omega = \bigcap_{k=1}^{n} \Omega_k$.

 Soit A un point quelconque de Ω. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $A \in \Omega_k$, et donc, par définition d'une partie ouverte, il existe $r_k > 0$ tel que $B(A, r_k) \subset \Omega_k$.
 Posons $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$, on a $r > 0$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $B(A, r) \subset B(A, r_k) \subset \Omega_k$. Donc $B(A, r) \subset \Omega$. Donc Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
- Soient I un ensemble d'indices (pas nécessairement fini) et, pour tout $i \in I$, Ω_i une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. On pose $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

 Soit A un point quelconque de Ω. Il existe $j \in I$ tel que $A \in \Omega_j$. Par définition d'une partie ouverte, on en déduit qu'il existe $r > 0$ tel que $B(A, r) \subset \Omega_j$. Or $\Omega_j \subset \Omega$ donc $B(A, r) \subset \Omega$. Donc Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. ■

Définition – Ensemble fermé

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On dit que Ω est une **partie fermée de** $\mathbb{R}^2$ lorsque son complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Une partie de $\mathbb{R}^2$ peut être à la fois ouverte et fermée (c'est le cas de $\mathbb{R}^2$ et de $\emptyset$).
Une partie de $\mathbb{R}^2$ peut n'être ni ouverte, ni fermée.

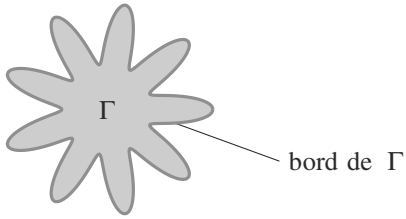
Exemple

$\mathbb{R}^2$ est une partie fermée car son complémentaire $\emptyset$ est ouvert.
$\emptyset$ est une partie fermée car son complémentaire $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Proposition – *Toute boule fermée de $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.*

Proposition
Une réunion d'un nombre fini de fermés est un ensemble fermé.
Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Remarque – Intuitivement, un ensemble fermé est un ensemble qui contient tous les points de son bord ; un ensemble ouvert est un ensemble qui ne contient aucun point de son bord.



20.2 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, continuité

20.2.1 Graphe d'une fonction réelle de deux variables

Définition – Fonction réelle de deux variables

On appelle **fonction réelle de deux variables** toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire toute fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x + \cos(x+y) \end{cases}, \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \ln(uv) + \dfrac{1}{u+v} \end{cases}$$

Définition – Graphe d'une fonction de deux variables

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$. On appelle **graphe** de f l'ensemble :

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, (x,y) \in D \text{ et } z = f(x,y)\}.$$

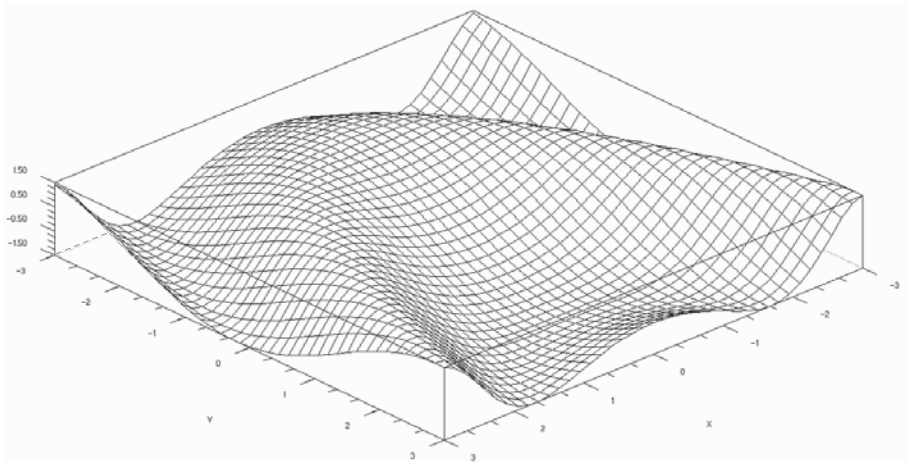
Remarque – Le graphe d'une fonction d'une variable est une courbe dans $\mathbb{R}^2$; celui d'une fonction de deux variables est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Définition – Plan affine de $\mathbb{R}^3$

On appelle **plan affine de** $\mathbb{R}^3$ toute partie $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^3$ ayant une équation de la forme :

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, ax + by + cz = d\}$$

où a, b, c et d sont des constantes réelles telles que a, b et c ne soient pas toutes nulles.



Graphe de la fonction $(x, y) \mapsto \frac{3}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x^2 - y\right)$

Remarque – Cette définition est à rapprocher de celle d'une droite affine dans $\mathbb{R}^2$. Une droite affine dans $\mathbb{R}^2$ est une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ ayant une équation de la forme :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by = c\}$$

où a, b et c sont des constantes réelles telles que a et b ne soient pas toutes les deux nulles.

Définition – Fonction affine de deux variables

On appelle **fonction affine de deux variables** toute fonction de la forme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & ax + by + c \end{cases}$$

où a, b et c sont trois constantes réelles.

Proposition – *Le graphe d'une fonction affine de deux variables est un plan affine de* $\mathbb{R}^3$.

Définition – Courbes de niveau

Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel λ, on appelle courbe de niveau λ l'ensemble $\{(x, y) \in D \,|\, f(x, y) = \lambda\}$.

Remarque – Sur une carte géographique, les courbes de niveau relient les points qui sont à la même altitude : ce sont les courbes de niveau de la fonction qui, à un point donné, associe l'altitude de ce point.
Sur une carte des pressions atmosphériques, les isobares relient les points où la pression atmosphérique est la même : ce sont les courbes de niveau de la fonction qui, à un point donné, associe la pression atmosphérique en ce point.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

1. Considérons une fonction affine $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ax + by + c$ où $(a, b) \neq (0, 0)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. La courbe de niveau λ de f est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax + by = \lambda - c$: il s'agit d'une droite affine de $\mathbb{R}^2$.
2. Considérons la fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$.
 - pour tout $\lambda < 0$, la courbe de niveau λ de g est vide,
 - la courbe de niveau 0 de g est réduite au point $(0, 0)$,
 - pour tout $\lambda > 0$, la courbe de niveau λ de g est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

20.2.2 Fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Dans toute la suite du chapitre, Ω désignera une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Définition – Fonction continue en un point de Ω

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $A \in \Omega$. On dit que f est **continue en** A lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall X \in B(A, r) \cap \Omega,\ |f(X) - f(A)| < \varepsilon.$$

Définition – Fonction continue sur Ω

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue sur** Ω lorsqu'elle est continue en tout point A de Ω.

Théorème – Opérations algébriques sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions définies sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $A \in \Omega$, si f et g sont continues en A alors $f + g$, λf et fg sont continues en A.
 Si de plus $g(A) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en A.
- Si f et g sont continues sur Ω alors $f + g$, λf et fg sont continues sur Ω.
 Si de plus g ne s'annule pas sur Ω, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur Ω.

Théorème – Composition à gauche par une fonction continue d'une variable

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(\Omega) \subset I$.

- Si f est continue en $A \in \Omega$ et si φ est continue en $f(A)$ alors $\varphi \circ f$ est continue en A.
- Si f est continue sur Ω et si φ est continue sur I alors $\varphi \circ f$ est continue sur Ω.

Définition – Fonctions polynomiales et rationnelles de deux variables

- On appelle **fonction polynomiale de deux variables**, toute fonction de la forme :
 $$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x^{p_k} y^{q_k}$$
 où les a_k sont des nombres réels, et les p_k et les q_k des entiers naturels.

- On appelle **fonction rationnelle de deux variables** tout quotient de fonctions polynomiales de deux variables.

Exemples

1. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x^3y - \pi x^2 + 8xy^2$ est une fonction polynomiale de deux variables.
2. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \dfrac{x^2y - 3xy^4}{x^2 + 2y^2}$ est une fonction rationnelle de deux variables.

Théorème – Exemples fondamentaux de fonctions continues

- Les fonctions polynomiales de deux variables sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- Les fonctions rationnelles de deux variables sont continues sur leur ensemble de définition.
- La fonction norme $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples

1. Montrons que $f : (x, y) \mapsto \ln(2x^2 + 3y^4)$ est continue sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 $(x, y) \mapsto 2x^2 + 3y^4$ est continue sur Ω, car polynomiale, et à valeurs dans $]0, +\infty[$.
 Or ln est continue sur $]0, +\infty[$, donc f est continue sur Ω en tant que composée de fonctions continues.
2. Étudions la continuité de $g : (x, y) \mapsto \cos\left(\dfrac{3xy + x^2y^3}{2x^2 - xy}\right)$.
 On remarque que : $2x^2 - xy = 0 \Leftrightarrow x(2x - y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 2x$.
 On pose donc $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x \neq 0 \text{ et } y \neq 2x\}$ et on montre la continuité de g sur V.
 $(x, y) \mapsto \dfrac{3xy + x^2y^3}{2x^2 - xy}$ est une fonction rationnelle définie sur V, elle est donc continue sur V et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
 Or cos est continue sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur V en tant que composée de fonctions continues.

20.2.3 Propriétés des fonctions continues

Rappels

- Si f est une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ et I une partie de $\mathbb{R}$, on appelle image réciproque de I par f l'ensemble $f^{-1}(I) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, f(x, y) \in I\}$.
- On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]a, b[$ où a et b sont tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
- On appelle intervalle fermé de $\mathbb{R}$, tout intervalle de l'un des trois types suivants :
 - les segments $[a, b]$, où a et b sont des réels tels que $a \leqslant b$,
 - les demi-droites de la forme $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$, où $a \in \mathbb{R}$,
 - $\mathbb{R}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors l'image réciproque par f de tout intervalle ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^2$.

Exemples

1. La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 3xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On en déduit que :
 - l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 3xy > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, car c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par la fonction f,
 - l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 3xy \geqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, car c'est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[1, +\infty[$ par la fonction f.
2. Ce théorème permet de redémontrer que les boules ouvertes sont des ouverts et les boules fermées des fermés. Montrons par exemple que $B(A, r)$, où $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
 On considère $g : X = (x, y) \mapsto \|X - A\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.
 La fonction $(x, y) \mapsto (x-a)^2 + (y-b)^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et à valeurs dans $[0, +\infty[$. Or $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc g est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions continues.
 Or $B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(X) < r\}$ est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]-\infty, r[$ par g. Donc $B(A, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Théorème – Soient C une partie **fermée**, **bornée** et **non vide** de $\mathbb{R}^2$, et f une fonction continue sur un ouvert contenant C. Alors f est bornée sur C et elle y atteint ses bornes, autrement dit il existe $M_1 \in C$ et $M_2 \in C$ tels que :

$$\forall\, M \in C,\ f(M_1) \leqslant f(M) \leqslant f(M_2).$$

Exemple

$f : (x, y) \mapsto 2xy - 7x^2y^3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.
La boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ fermée, bornée et non vide .
Donc f est bornée $\overline{B}(0, 1)$ et elle y atteint ses bornes : il existe $M_1 \in \overline{B}(0, 1)$ et $M_2 \in \overline{B}(0, 1)$ tels que :

$$\forall X \in \overline{B}(0, 1),\ f(M_1) \leqslant f(X) \leqslant f(M_2).$$

20.3 Calcul différentiel

On rappelle que Ω désigne une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

20.3.1 Dérivées partielles, gradient

Définition – Dérivées partielles

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $A = (a, b) \in \Omega$.

- Si la fonction $x \mapsto f(x, b)$ admet une dérivée en a, cette dérivée est appelée **dérivée partielle de f en A selon x**, et elle est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

- Si la fonction $y \mapsto f(a, y)$ admet une dérivée en b, cette dérivée est appelée **dérivée partielle de f en A selon y**, et elle est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Exemple

Étudions la dérivabilité en $(0, 0)$ selon x et y de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos(x) + y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Pour $x \neq 0$: $\dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \dfrac{x \cos(x)}{x} = \cos(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.
 Donc f admet une dérivée partielle en $(0, 0)$ selon x et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$.
- Pour $y \neq 0$: $\dfrac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \dfrac{1}{y}$. Or $\dfrac{1}{y}$ n'a pas de limite finie quand $y \to 0$, donc f n'admet pas de dérivée partielle en $(0, 0)$ selon y.

Méthode 1 Calculer une dérivée partielle

Lorsque l'on souhaite calculer les dérivées partielles selon x d'une fonction $f : (x, y) \in \Omega \mapsto f(x, y)$ définie par une formule unique, on considère y comme un paramètre, et on dérive l'expression de f comme si x était l'unique variable.
On procède de même pour obtenir les dérivées partielles selon y.

Exemple d'application

Déterminons les dérivées partielles de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule :

$$f(x, y) = x^3 + 4xy^2 - x^2y^5$$

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, donc f admet une dérivée partielle selon x en tout point de $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy^5.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, donc f admet une dérivée partielle selon y en tout point de $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8xy - 5x^2y^4.$$

Remarque – Pour justifier l'existence des dérivées partielles, on montrera le plus souvent que la fonction est de classe C^1. Cette notion sera étudiée au paragraphe 20.3.2

Définition – Gradient

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles selon x et y au point $A \in \Omega$. On appelle **gradient de f en A**, et on note $\nabla f(A)$ ou ∇f_A, le vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$\nabla f_A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

20.3.2 Fonctions de classe C^1

Définition – Fonction de classe C^1

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur Ω lorsque f admet des dérivées partielles selon x et y en tout point de Ω et que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur Ω.

Théorème – Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^1

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f+g$, λf et fg sont de classe C^1 sur Ω.
- Si de plus g ne s'annule pas sur Ω alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe C^1 sur Ω.

Corollaire

- Les fonctions polynomiales sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Les fonctions rationnelles sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition.

Théorème – Composition à gauche par une fonction d'une variable de classe C^1

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(\Omega) \subset I$.

Si f est de classe C^1 sur Ω et si φ est de classe C^1 sur I alors $\varphi \circ f$ est de classe C^1 sur Ω.

Exemple

Montrons que la fonction norme est de classe C^1 sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
$(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est polynomiale, donc de classe C^1 sur Ω, à valeurs dans $]0,+\infty[$. Or $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Donc $N : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ est de classe C^1 sur Ω.
En particulier, N admet des dérivées partielles selon x et y en tout point de Ω :

$$\forall (x,y) \neq (0,0),\ \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

En revanche, la fonction norme n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car elle n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$. En effet, pour $x \neq 0$: $\dfrac{N(x,0)-N(0,0)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{|x|}{x}$ n'a pas de limite en 0. Donc N n'admet pas de dérivée partielle en $(0,0)$ selon x, ni selon y, pour la même raison.

20.3.3 Développement limité à l'ordre 1

Théorème - Définition – Développement limité à l'ordre 1

On suppose f de classe C^1 sur Ω. Alors, pour tout $A \in \Omega$, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nulle en $(0,0)$ et continue en $(0,0)$ telle que, pour tout $H \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $A+H \in \Omega$:

$$f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f_A, H \rangle + \|H\|\,\varepsilon(H)$$

On dit alors que f admet **un développement limité à l'ordre 1 en** A.

Remarques

1. On note également : $f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f_A, H\rangle + o(\|H\|)$.
2. En posant $A = (a,b)$ et $H = (h,k)$, le développement limité s'écrit également :
$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(\,\|(h,k)\|\,)$$

Remarque – On admettra que l'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point. Par conséquent, le résultat ci-contre n'est pas trivial.

Corollaire – Si f est de classe C^1 sur Ω alors elle est continue sur Ω.

Démonstration

Soit $A = (a,b)$ un point quelconque de Ω. Comme f est de classe C^1 sur Ω, elle admet en A un développement limité de la forme :
$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k)$$
où ε est nulle en $(0,0)$ et continue en $(0,0)$.
Or la fonction norme est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc en $(0,0)$, et il en est de même pour la fonction affine $(h,k) \mapsto f(a,b) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.
Donc $(h,k) \mapsto f(a+h, b+k)$ est continue en $(0,0)$, autrement dit f est continue en $A = (a,b)$. ■

Définition – Fonction affine tangente. Plan tangent

Soient f de classe C^1 sur Ω et $A \in \Omega$. On a vu que :
$$f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f_A, H\rangle + o(\|H\|).$$
En posant $X = A + H$, il vient :
$$\forall X \in \Omega,\ f(X) = f(A) + \langle \nabla f_A, X - A\rangle + o(\|X - A\|)$$
La fonction $X \mapsto f(A) + \langle \nabla f_A, X - A\rangle$ est appelée **fonction affine tangente** à f au point A. Le graphe de cette fonction affine est appelé **plan affine tangent** au graphe de f au point A.

Remarques

1. En posant $X = (x,y)$ et $A = (a,b)$, la fonction affine tangente à f au point A a pour expression :
$$(x,y) \mapsto f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$
Le plan affine tangent au graphe de f au point A, admet alors pour équation :
$$z = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

2. Rappelons que si f est une fonction d'une variable dérivable en a, alors la fonction tangente affine à f en a est :
$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$$
et la droite affine tangente au graphe de f au point a a pour équation :
$$y = f(a) + (x-a)f'(a)$$
Les expressions obtenues pour les fonctions de deux variables sont donc à rapprocher de celles déjà connues pour les fonctions d'une variable.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

20.3.4 Dérivées directionnelles

Théorème – Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et u et v deux fonctions d'une variable définies sur un intervalle I telles que :

$$\forall t \in I,\ (u(t), v(t)) \in \Omega.$$

Si f est de classe C^1 sur Ω et si u et v sont dérivables sur I, alors $g : t \in I \mapsto f(u(t), v(t))$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)).$$

Corollaire – Soient f de classe C^1 sur Ω, $A \in \Omega$ et $U \in \mathbb{R}^2$. On note I l'ensemble des réels t tels que $A + tU \in \Omega$.
Alors $g : t \in I \mapsto f(A + tU)$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = \langle \nabla f_{A+tU}, U \rangle .$$

Démonstration

Posons $A = (a, b)$ et $U = (h, k)$. Alors : $\forall t \in I,\ A + tU = (a + th, b + tk)$. On applique le théorème précédent avec les fonctions $u : t \in I \mapsto a + th$ et $v : t \in I \mapsto b + tk$, qui sont dérivables sur I. On obtient alors que g et dérivable sur I et que :

$$\begin{aligned}\forall t \in I,\ g'(t) &= u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) \\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(A + tU) + k\frac{\partial f}{\partial y}(A + tU) \\ &= \langle U, \nabla f_{A+tU} \rangle = \langle \nabla f_{A+tU}, U \rangle \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Définition – Vecteur unitaire

On dit qu'un vecteur $U \in \mathbb{R}^2$ est **unitaire** lorsque $\|U\| = 1$.

Définition – Dérivées directionnelles

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$, A un point de Ω et U un vecteur de $\mathbb{R}^2$ unitaire. On dit que f admet une **dérivée directionnelle en A dans la direction U** lorsque la fonction $t \mapsto f(A + tU)$ est dérivable en 0.
Le cas échéant, on note $f'_U(A)$ cette dérivée.

Une conséquence immédiate du corollaire énoncé ci-dessus est :

Théorème – Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω, alors pour tout point A de Ω et tout vecteur unitaire U de $\mathbb{R}^2$, f admet une dérivée directionnelle en A dans la direction U et :

$$f'_U(A) = \langle \nabla f_A, U \rangle$$

Remarque – La dérivée directionnelle de f en A dans la direction $\overrightarrow{\imath} = (1, 0)$ est $\left\langle \nabla f_A, \overrightarrow{\imath} \right\rangle = \dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$. Celle dans la direction $\overrightarrow{\jmath} = (0, 1)$ est $\left\langle \nabla f_A, \overrightarrow{\jmath} \right\rangle = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$.

Synthèse

Savoirs

- inégalité de Cauchy-Schwarz, et cas d'égalité,
- opérations sur les fonctions continues/de classe C^1,
- une fonction continue sur une partie fermée, bornée et non vide est bornée et atteint ses bornes,
- existence d'un développement limité à l'ordre 1 pour les fonctions de classe C^1,
- dérivée d'une fonction de la forme $t \mapsto f(u(t), v(t))$,
- expression des dérivées directionnelles d'une fonction de classe C^1.

Savoir-faire

- montrer qu'une fonction de deux variables est continue/de classe C^1,
- calculer les dérivées partielles d'une fonction de deux variables.

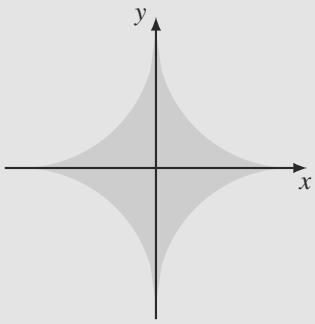
Mots-clés

- Partie de $\mathbb{R}^2$ convexe/bornée/ouverte/fermée,
- boule ouverte/fermée,
- produit scalaire,
- norme euclidienne,
- courbes de niveau,
- continuité d'une fonction de deux variables,
- dérivées partielles,
- fonction de deux variables de classe C^1,
- développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de deux variables,
- fonction affine tangente,
- plan affine tangent,
- dérivées directionnelles.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

20.1 La partie Γ du plan représentée ci-dessous est-elle convexe ? Est-elle bornée ?



20.2 Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y + x^4y^2$ et $A = (1, -1)$.

a) Comment peut-on justifier l'existence de ∇f_A ?

b) Calculer ∇f_A.

20.3 **Vrai ou faux ?**

a) Pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a :

$$\langle X, Y\rangle = \|X\| \,.\, \|Y\| \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ colinéaires}$$

b) Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$X = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall Y \in \mathbb{R}^2,\ \langle X, Y\rangle = 0$$

c) Pour tout $(X, Y, U, V) \in (\mathbb{R}^2)^4$, on a :

$$\langle X, Y\rangle + \langle U, V\rangle = \langle X + U, Y + V\rangle$$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 546.

■ Topologie de $\mathbb{R}^2$ et continuité

20.4 ◎

a) Montrer que toute boule fermée de $\mathbb{R}^2$ est bornée et convexe.

b) Même question pour les boules ouvertes.

20.5 ◎

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si I et J sont ouverts, alors $I \times J$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que si I et J sont fermés, alors $I \times J$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

20.6

Représenter chacun des ensembles suivants, montrer que ce sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ et déterminer s'ils sont bornés ou convexes.

a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y < 2\}$,

b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y > 0,\ x + y < 2\}$,

c) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < |y| < 1\}$.

20.7 ◎

On pose $O = (0, 0)$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|X\| > 1 \Rightarrow f(X) \leqslant f(O)$$

Montrer qu'il existe $A \in \overline{B}(O, 1)$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2,\ f(X) \leqslant f(A)$$

■ Calcul différentiel

20.8

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur Ω et déterminer leurs dérivées partielles :

a) $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $f : (x, y) \in \Omega \mapsto \cos(2x^3y^2 - xy^4)$,

b) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $g : (x, y) \in \Omega \mapsto \dfrac{3xy^2 + x}{x^2 + y^2}$,

c) $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $h : (x, y) \in \Omega \mapsto \exp\left(\dfrac{xy^2 + y}{x^2 + 1}\right)$.

20.9

Soit $f : (x, y) \mapsto \ln(1 + xy)$. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$ et déterminer les dérivées partielles de f sur $\mathcal{D}$.

20.10

Soit $f : (x, y) \mapsto \sin\left((x^2 + y^2)\pi\right)$, $A = (1, 1)$ et U le vecteur suivant :

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

a) Vérifier que U est un vecteur unitaire.

b) Justifier l'existence de la dérivée directionnelle de f en A dans la direction U, et la calculer.

20.11

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^4 + y^4 + x^3y$.

a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

b) Donner le développement limité d'ordre 1 de f en $(1, 0)$.

c) Donner l'équation du plan tangent au graphe de f en $(1, 0)$.

20.12 ◎

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \nabla f(x,y) = (x,y)$$

Montrer que les points de $\mathbb{R}^2$ de la forme :

$$(\cos(t), \sin(t)) \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

appartiennent tous à la même ligne de niveau de f.

20.13 d'après EML 2007

Si G est une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, on appelle point critique de G tout point $M \in \Omega$ vérifiant $\nabla G_M = 0$.

On considère la fonction d'une variable :

$$f : x \in [0, +\infty[\mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $F : x \in]0, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et on définit $G :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y)$$

a) Montrer que G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$.

b) Exprimer, pour tout $(x,y) \in]0, +\infty[^2$, les dérivées partielles G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$.

c) Établir que G admet $(1,1)$ comme unique point critique.

20.14 d'après ESC 2009 voie E

Si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω, on appelle point critique de f sur Ω tout point $M \in \Omega$ vérifiant $\nabla f_M = 0$.

1) a) Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^4 - 4x + 1$ (On précisera les limites aux bornes).

b) En déduire que l'équation $(E) : x^4 - 4x + 1 = 0$ d'inconnue le réel x, admet exactement deux solutions réelles α et β (en notant α la plus petite).

c) Justifier que $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

2) Soit la fonction de deux variables :

$$f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 4xy - 4xy^2.$$

a) Justifier l'existence des dérivées partielles de f en tout point de $]0,1[^2$ et les calculer.

b) En déduire que le seul point critique de f sur $]0,1[^2$ est $A = \left(\alpha, \dfrac{1}{2}\right)$.

20.15 d'après Ecricome 2010 et 2011 ◎

a) On note U l'ensemble :

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \neq y\}$$

et f la fonction :

$$f : (x,y) \in U \mapsto f(x,y) = x^2 + y^2 - \ln|x - y|.$$

On admet que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer ses dérivées partielles.

b) Justifier l'existence des dérivées partielles de la fonction :

$$f : (x,y) \in]0, +\infty[^2 \mapsto x^y - y^x$$

et les calculer.

Exercices d'approfondissement

20.16 Adapté d' Ecricome 2009 voie E

Si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω, on appelle point critique de f sur Ω tout point $M \in \Omega$ vérifiant $\nabla f_M = 0$.

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[,\ f(x,y) = \mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy).$$

1) Étude des zéros de φ.

a) Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.

b) Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

c) On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$. Montrer l'existence de deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \text{ avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$$

Justifier que ce sont les seuls réels strictement positifs solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$.

2) Étude des points critiques de f.

a) Justifier que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

b) Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x et y strictement positifs :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y) + \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4f(x,y) + \dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$

c) Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont les seuls points critiques de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

20.17 ◎

Si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on appelle point critique de f tout point $A \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f_A = 0$.

1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f admet un maximum au point $M \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2,\ f(X) \leqslant f(M)$$

a) Soit U un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la dérivée directionnelle de f en M dans la direction U est nulle.

b) En déduire que : $\forall X \in \mathbb{R}^2,\ \langle \nabla f_M, X\rangle = 0$.

c) Montrer enfin que M est un point critique de f.
On montrerait de même que si f admet un minimum au point M, alors M est un point critique de f.

2) *Application :* on considère la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y + y^2 + x$$

a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

b) Montrer que $A = (1, -\frac{1}{2})$ est l'unique point critique de f.

c) Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, calculer :

$$\delta(h, k) = f\left(1 + h, -\frac{1}{2} + k\right) - f\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

d) Montrer que $\delta(h, k)$ n'a pas de signe constant sur $\mathbb{R}^2$ et en déduire que f n'admet ni maximum, ni minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Indications

20.4

a) Si $X \in \overline{B}(A, r)$, on peut majorer $\|X\|$ en écrivant $X = X - A + A$ et en utilisant l'inégalité triangulaire.
Pour la convexité, si U et V sont dans $\overline{B}(A, r)$, on écrira :

$$\begin{aligned}&(1-t)U + tV - A\\ &= (1-t)U + tV - ((1-t)A + tA)\\ &= (1-t)(U-A) + t(V-A)\end{aligned}$$

b) Attention aux inégalités strictes !

20.5

Introduire les fonctions
$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$ et $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y$
et exprimer $I \times J$ en fonction de $f^{-1}(I)$ et $g^{-1}(J)$.

20.7

$\overline{B}(O, 1)$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ fermée, bornée et non vide.

20.12

Il s'agit de montrer que f est constante sur l'ensemble $\{(\cos(t), \sin(t)) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.
À cette fin, on peut dériver $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$.

20.15

a) Si u est une fonction dérivable ne s'annulant pas, alors la dérivée de $\ln|u|$ est $\frac{u'}{u}$.
b) $x^y = \mathrm{e}^{y\ln(x)}$ et $y^x = \mathrm{e}^{x\ln(y)}$.

20.17

1) a) La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(M + tU)$ admet un maximum en 0. Que peut-on en déduire pour sa dérivée en 0 ?

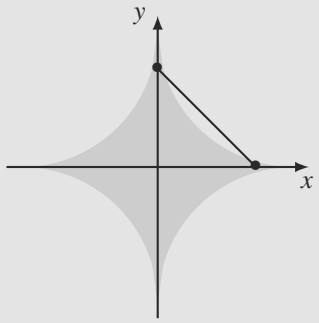
b) Si X est un vecteur non nul, alors $\dfrac{X}{\|X\|}$ est un vecteur unitaire.

c) Choisir X judicieusement et appliquer la question précédente.

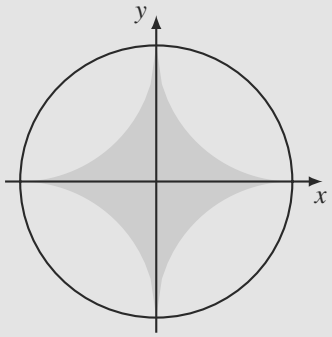
2) d) Donner un exemple de couple (h, k) tel que $\delta(h, k) > 0$, et un autre pour lequel $\delta(h, k) < 0$. En déduire que f n'admet ni maximum, ni minimum en A.

20.1

Γ n'est pas convexe car on peut trouver deux points de Γ tels que le segment joignant ces deux points ne soit pas inclus dans Γ :



Γ est bornée car on peut trouver une boule centrée en $(0,0)$ et contenant Γ :



20.2

a) f est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, elle admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, et en particulier en A. Donc le gradient de f en A est bien défini.

b) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 4x^3y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2x^4y$$

Donc $\nabla f_A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\right) = (2,-1)$.

20.3

a) FAUX. Il manque une valeur absolue :

$$\left|\langle X,Y\rangle\right| = \|X\|.\|Y\| \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ colinéaires}$$

b) VRAI. Si $X = 0$, alors pour tout $Y \in \mathbb{R}^2$, $\langle X,Y\rangle = \langle 0,Y\rangle = 0$. Réciproquement, si pour tout $Y \in \mathbb{R}^2$, $\langle X,Y\rangle = 0$, alors en prenant en particulier $Y = X$, on obtient $\|X\|^2 = \langle X,X\rangle = 0$. Or le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul, donc $X = 0$.

c) FAUX. Quand on développe l'expression de droite, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle X+U, Y+V\rangle &= \langle X, Y+V\rangle + \langle U, Y+V\rangle \\ &= \langle X,Y\rangle + \langle X,V\rangle + \langle U,Y\rangle + \langle U,V\rangle\end{aligned}$$

20.4

a) Soit $\overline{B}(A,r)$ une boule fermée ($A \in \mathbb{R}^2$ et $r \geqslant 0$).

• Pour tout $X \in \overline{B}(A,r)$, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\|X\| = \|X - A + A\| \leqslant \|X - A\| + \|A\| \leqslant r + \|A\|$$

$r + \|A\|$ ne dépend pas de X, donc $\overline{B}(A,r)$ est bornée.

• Soient U et V deux points quelconques de $\overline{B}(A,r)$. Montrons que $[U,V] \subset \overline{B}(A,r)$.
Soit X un point quelconque de $[U,V]$. Il existe $t \in [0,1]$ tel que $X = (1-t)U + tV$.

$$\begin{aligned}\|X - A\| &= \|(1-t)U + tV - A\| \\ &= \|(1-t)U + tV - ((1-t)A + tA)\| \\ &= \|(1-t)(U-A) + t(V-A)\| \\ &\leqslant \|(1-t)(U-A)\| + \|t(V-A)\|\end{aligned}$$

Or $t \geqslant 0$ et $V \in \overline{B}(A,r)$donc :

$$\|t(V-A)\| = |t|\,\|V-A\| = t\,\|V-A\| \leqslant tr$$

De même $1 - t \geqslant 0$ et $U \in \overline{B}(A,r)$ donc :

$$\|(1-t)(U-A)\| = (1-t)\,\|U-A\| \leqslant (1-t)r$$

Ainsi $\|X - A\| \leqslant (1-t)r + tr = r$ et donc $X \in \overline{B}(A,r)$.
Par conséquent $[U,V] \subset \overline{B}(A,r)$ et $\overline{B}(A,r)$ est convexe.

b) Soit $B(A,r)$ une boule ouverte ($A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$).

• $B(A,r) \subset \overline{B}(A,r)$, or $\overline{B}(A,r)$ est bornée, donc $B(A,r)$ est également bornée.

• Soient U et V deux points quelconques de $B(A,r)$. Montrons que $[U,V] \subset B(A,r)$.
Soit X un point quelconque de $[U,V]$. Il existe $t \in [0,1]$ tel que $X = (1-t)U + tV$. Si $t = 0$ alors $X = U \in B(A,r)$, et si $t = 1$ alors $X = V \in B(A,r)$. Supposons donc pour la suite que $t \in]0,1[$.
On a vu en a) que :

$$\|X - A\| \leqslant (1-t)\,\|U-A\| + t\,\|V-A\|$$

Or $\|U - A\| < r$ et $1 - t > 0$ donc :

$$(1-t)\,\|U-A\| < (1-t)r$$

De même $\|V - A\| < r$ et $t > 0$ donc :

$$t\,\|V-A\| < tr$$

Ainsi $\|X - A\| < r$, donc $X \in B(A,r)$.
Par conséquent $[U,V] \subset B(A,r)$ et $B(A,r)$ est convexe.

20.5

a) On considère les fonctions
$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$ et $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales.
Or $I \times J$ s'exprime de la façon suivante :

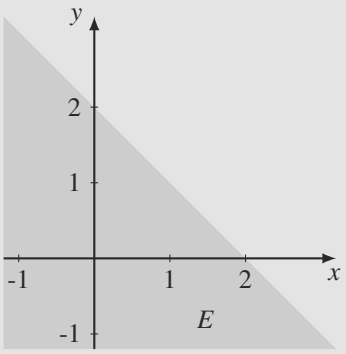
$$\begin{aligned} I \times J &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x \in I \text{ et } y \in J\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x \in I\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| y \in J\} \\ &= f^{-1}(I) \cap g^{-1}(J) \end{aligned}$$

Or $f^{-1}(I)$ et $g^{-1}(J)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'images réciproques par des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, une intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
Donc $I \times J$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) $I \times J = f^{-1}(I) \cap g^{-1}(J)$.
Or $f^{-1}(I)$ et $g^{-1}(J)$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'images réciproques par des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, une intersection de fermés est un fermé.
Donc $I \times J$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

20.6

a) E est un demi-plan.

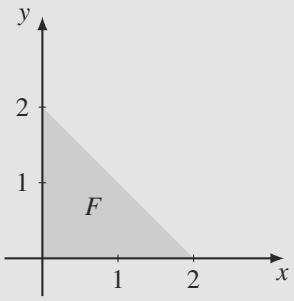


• E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, car $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (elle est polynomiale), et $E = f^{-1}(]-\infty, 2[)$ est l'image réciproque par f d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
• E est convexe : soit $M = (x,y)$ et $M' = (x',y')$ deux points de E, alors tout point N du segment $[M,M']$ s'écrit $N = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y')$ avec $t \in [0,1]$. Si $t = 0$, $N = M'$, et si $t = 1$, $N = M$, qui sont bien dans E. Supposons donc $t \in]0,1[$. Alors $t > 0$ et $(1-t) > 0$, donc

$$\begin{aligned} &(tx + (1-t)x') + (ty + (1-t)y') \\ &= t(x+y) + (1-t)(x'+y') \\ &< 2t + (1-t)2 = 2 \end{aligned}$$

car $x + y < 2$ (puisque $M \in E$) et $x' + y' < 2$ (car $M' \in E$). Donc $N \in E$, ce qui prouve bien que $[M,M'] \subset E$, donc E est convexe.
• E n'est pas bornée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-n,0) \in E$, or $\|(-n,0)\| = n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b)



• Considérons les ensembles :

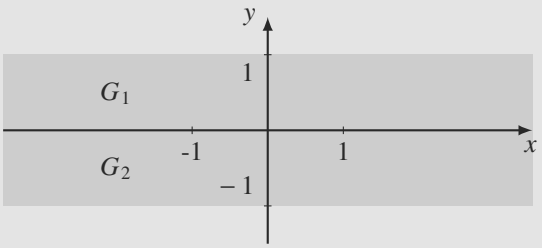
$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\} \\ F_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\} \\ F_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y < 2\} \quad (F_3 = E) \end{aligned}$$

Alors $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$.
Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x,y) = x$, alors g est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale, donc $F_1 = g^{-1}(]0,+\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (image réciproque d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$). De même, F_2 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (en considérant $h : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y \in \mathbb{R}$, $F_2 = h^{-1}(]0,+\infty[)$). Puis, $F_3 = E$, et on a déjà vu que E était un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc F est l'intersection de trois ouverts de $\mathbb{R}^2$, donc il est lui-même un ouvert.
• F est convexe : soit $M = (x,y)$ et $M' = (x',y')$ deux points de F, alors tout point N du segment $[M,M']$ s'écrit $N = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y')$ avec $t \in [0,1]$. Si $t = 0$, $N = M'$, et si $t = 1$, $N = M$, qui sont bien dans F. Supposons donc $t \in]0,1[$. Alors $t > 0$ et $(1-t) > 0$, donc comme $x > 0$ et $x' > 0$ (car M et M' sont dans F), on a $tx + (1-t)x' > 0$, et de même $ty + (1-t)y' > 0$. Enfin, on a vu que E était convexe, donc comme M et M' sont dans E, N aussi, donc $(tx + (1-t)x') + (ty + (1-t)y') < 2$. Donc $N \in F$, puis $[M,M'] \subset F$.
• F est bornée : soit $M = (x,y) \in F$, alors $x > 0$, $y > 0$ et $x + y < 2$, donc $2 - x > y > 0$, donc $x < 2$, et de même, $y < 2$. Donc $x^2 + y^2 < 4$, ce qui donne :

$$\forall M = (x,y) \in F, \|M\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2$$

ce qui prouve bien que F est bornée.

c) • Remarquons que $0 < |y| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < y < 1 \\ y \neq 0 \end{cases}$, donc $0 < |y| < 1 \Leftrightarrow 0 < y < 1$ ou $-1 < y < 0$. Notons alors $G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < 1\}$ et $G_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 < y < 0\}$, on a $G = G_1 \cup G_2$.



Comme $h : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, $G_1 = h^{-1}(]-1,0[)$ et $G_2 = h^{-1}(]-1,0[)$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, comme image réciproque d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc G est l'union de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, donc est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

• G n'est pas convexe : si $M = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ et $M' = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$, alors M et M' sont dans G, mais le milieu du segment $[M, M']$ est $O = (0,0)$, qui n'appartient pas à G.

• G n'est pas bornée : pour tout entier n, $\left(n, \frac{1}{2}\right) \in G$, or $\left\|\left(n, \frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

20.7

$\overline{B}(O,1)$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ fermée, bornée et non vide. Or f est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $\overline{B}(O,1)$. Par conséquent f est bornée sur $\overline{B}(O,1)$, et elle y atteint ses bornes.
En particulier, il existe $A \in \overline{B}(O,1)$ réalisant le maximum de f sur $\overline{B}(O,1)$:

$$(1)\ \forall X \in \overline{B}(O,1),\ f(X) \leqslant f(A)$$

Si $X \notin \overline{B}(O,1)$, alors par hypothèse $f(X) \leqslant f(0)$. Mais $O \in \overline{B}(O,1)$ donc $f(O) \leqslant f(A)$ et donc :

$$(2)\ \forall X \notin \overline{B}(O,1),\ f(X) \leqslant f(A)$$

Avec (1) et (2), on conclut :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2,\ f(X) \leqslant f(A)$$

20.8

a) $(x,y) \mapsto 2x^3y^2 - xy^4$ est de classe C^1 sur Ω car polynomiale, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Or cos est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe C^1 sur Ω en tant que composée de fonctions de classe C^1.
On obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en considérant y comme un paramètre, et en dérivant l'expression de f selon la variable x. Il vient pour tout $(x,y) \in \Omega$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y^4 - 6x^2y^2)\sin(2x^3y^2 - xy^4)$$

On obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en considérant x comme un paramètre, et en dérivant l'expression de f selon la variable y. Il vient pour tout $(x,y) \in \Omega$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy(y^2 - x^2)\sin(2x^3y^2 - xy^4)$$

b) Pour tout $(x,y) \in \Omega$, $x^2 + y^2 \neq 0$ donc g est de classe C^1 sur Ω car c'est une fonction rationnelle définie sur Ω.
Pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{(3y^2+1)(x^2+y^2) - (3xy^2+x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{(3y^2+1)(x^2+y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{(3y^2+1)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{6xy(x^2+y^2) - (3xy^2+x)(2y)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{6x^3y - 2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{2xy(3x^2-1)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

c) $\forall (x,y) \in \Omega$, $x^2 + 1 \neq 0$ donc $u : (x,y) \mapsto \frac{xy^2+y}{x^2+1}$ est de classe C^1 sur Ω (fonction rationnelle définie sur Ω) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Or exp est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc h est de classe C^1 sur Ω en tant que composée de fonctions de classe C^1.
Calculons dans un premier temps les dérivées partielles de u.
Pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2(x^2+1) - (xy^2+y)(2x)}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{y(y-2x-x^2y)}{(x^2+1)^2}\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{2xy+1}{x^2+1}\end{aligned}$$

On obtient alors les dérivées partielles de h :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y-2x-x^2y)}{(x^2+1)^2}\exp\left(\frac{xy^2+y}{x^2+1}\right)$$

et :

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy+1}{x^2+1}\exp\left(\frac{xy^2+y}{x^2+1}\right)$$

20.9

f est définie sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (image réciproque de l'intervalle ouvert $]-1,+\infty[$ par l'application continue $(x,y) \mapsto xy$). Pour visualiser ce domaine de définition, on trace $xy = -1$ (c'est à dire la courbe $y = -\frac{1}{x}$), et on ne garde que la partie contenant $(0,0)$.
$(x,y) \mapsto 1 + xy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et ln est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$, donc admet des dérivées partielles.
Pour calculer les dérivées partielles, on dérive comme composée :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+xy}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

20.10

a) $\|U\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$. Donc U est bien un vecteur unitaire.

b) $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)\pi$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et sin est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, elle admet une dérivée directionnelle en A dans la direction U.
On sait que $f'_U(A) = \langle \nabla f_A, U\rangle$, or par définition $\nabla f_A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\pi x \cos\left((x^2 + y^2)\pi\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\pi y \cos\left((x^2 + y^2)\pi\right),$$

donc $\nabla f(A) = (2\pi, 2\pi)$ (car $\cos(2\pi) = 1$). D'où

$$f'_U(A) = \left\langle (2\pi, 2\pi), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\pi$$

20.11

a) f est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 3x^2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + x^3$.

b) $f(1, 0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 4$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1$, donc le développement limité de f à l'ordre 1 en $(1, 0)$ est

$$f(1 + h, k) = f(1, 0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) + o\left(\|(h, k)\|\right) = 1 + 4h + k + o\left(\|(h, k)\|\right)$$

c) L'équation du plan tangent en $(1, 0)$ est :

$$z = f(1, 0) + (x - 1)\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$$

c'est-à-dire $z = 4x + y - 3$.

20.12

Remarquons d'abord que l'hypothèse faite sur le gradient signifie que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y$.
Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$.
f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = \cos'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), \sin(t)) + \sin'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t), \sin(t)) = -\sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t) = 0$$

La dérivée de g est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que la valeur de $f(\cos(t), \sin(t))$ ne dépend pas de t, autrement dit que les points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(\cos(t), \sin(t))$, où $t \in \mathbb{R}$, appartiennent tous à la même ligne de niveau de f.

20.13

a) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas, et est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, F est la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0 (théorème fondamental de l'intégration), donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
$(x, y) \mapsto xy$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$ (polynomiale) à valeurs dans $]0, +\infty[$, donc par composition, $(x, y) \mapsto F(xy)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$.
Par ailleurs $(x, y) \mapsto x$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$ (polynomiale) à valeurs dans $]0, +\infty[$, donc par composition, $(x, y) \mapsto F(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$.
De même $(x, y) \mapsto F(y)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$.
Donc G est aussi de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$.

b) $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = yF'(xy) - F'(x) = yf(xy) - f(x)$

et $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = xF'(xy) - F'(y) = xf(xy) - f(y)$.

c) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.

$$\nabla G(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ xf(xy) - f(y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(1 + xy)}{x} - \frac{\ln(1 + x)}{x} = 0 \\ \frac{\ln(1 + xy)}{y} - \frac{\ln(1 + y)}{y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(1 + xy) = \ln(1 + x) \\ \ln(1 + xy) = \ln(1 + y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + xy = 1 + x \\ 1 + xy = 1 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = x \\ xy = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

On a pu simplifier respectivement par x et par y à la dernière étape car ils sont tous les deux non nuls.
On a $\nabla G(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1)$ donc $(1, 1)$ est l'unique point critique de G sur $]0, +\infty[^2$.

20.14

1) a) h est un polynôme, donc dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$. Or, $X^2 + X + 1$ n'a pas de racines réelles, est strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc h' est du

signe de $x-1$, ne s'annule qu'en 1, donc h est strictement décroissant sur $]-\infty,1]$ et strictement croissant sur $[1,+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.
b) $h(1) = -2 < 0$, or h est continue strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty,1]$, donc du théorème de la bijection, on déduit que h réalise une bijection de $]-\infty,1]$ sur $[h(1), \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)[= [-2,+\infty[$. Donc, $\forall y \in [-2,+\infty[$ (en particulier $y=0$), $\exists! x \in]-\infty,1]$ avec $h(x)=y$.
De même, h induit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$. Donc, $\forall y \in [-2,+\infty[$ (en particulier $y=0$), $\exists! x \in [1,+\infty[$ avec $h(x)=y$.
Seul $y=1$ donne le même x dans $[1,+\infty[$ et $]-\infty,1]$, par conséquent, $h(x)=0$ admet bien deux solutions réelles, α et β, vérifiant $\alpha<1<\beta$.
c) $h(0)=1>0$ et $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{16} < 0$, ainsi $h(\frac{1}{2}) < h(\alpha) < h(0)$. Or h est strictement décroissant sur $]-\infty,1]$ donc $0<\alpha<\frac{1}{2}$.
2) a) f est de classe C^1 sur $]0,1[^2$ car polynomiale, et admet donc des dérivées partielles en tout point :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^4 - 4x + 4y - 4y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 8xy$$

b) Si (x,y) est un point critique de f, alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$, donc $4x(1-2y)=0$, donc soit $x=0$, soit $y=\frac{1}{2}$. Mais $x=0$ est à rejeter, car f est définie sur $]0,1[^2$.
De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$, donc comme $y=\frac{1}{2}$, l'équation devient $x^4-4x+1=0$, soit $h(x)=0$, donc $x=\alpha$ ou $x=\beta$, mais comme on veut $0<x<1$, et que $\beta>1$, et que $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$, on a bien $x=\alpha$.
Réciproquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \alpha^4 - 4\alpha + 1 = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 4\alpha - 4\alpha = 0$$

Donc A est le seul point critique de f sur $]0,1[^2$.

20.15

a) $(x,y) \mapsto x-y$ est de classe C^1 sur U (car polynomiale, et donc C^1 sur $\mathbb{R}^2$) à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ (par définition de U), $z \mapsto |z|$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $(x,y) \mapsto \ln|x-y|$ est de classe C^1 sur U.
$(x,y) \mapsto x^2$ et $(x,y) \mapsto y^2$ sont aussi de classe C^1 sur U, donc par combinaison linéaire de fonctions de classe C^1, f est bien de classe C^1 sur U.
Pour la dérivation, on utilise la formule $\ln|u|' = \frac{u'}{u}$ (où u est une fonction dérivable ne s'annulant pas).
On obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - \frac{1}{x-y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - \frac{1}{y-x}$$

Remarque – Pour montrer que U est un ouvert, on introduit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x-y$. f est continue et $U = f^{-1}(]-\infty,0[) \cup f^{-1}(]0,+\infty[)$.

b) $]0,+\infty[^2$ est un ouvert (voir l'exo 5). Sur cet ouvert, $f(x,y) = e^{y\ln(x)} - e^{x\ln(y)}$.
$(x,y) \mapsto y$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ (car polynomiale) à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, ln est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$. Puis, $(x,y) \mapsto x$ est aussi de classe C^1, donc par produit, $(x,y) \mapsto x\ln(y)$ est aussi de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et comme exp est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, par composition, $(x,y) \mapsto e^{x\ln(y)}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$.
De même $(x,y) \mapsto e^{y\ln(x)}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$.
Donc f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} - \ln(y)y^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)x^y - xy^{x-1}$$

20.16

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = 2\ln(x) - 2\ln(2) + \frac{1}{x}$.
φ est donc la somme sur $\mathbb{R}_+^*$ de fonctions usuelles définies et de classe C^∞, donc φ est de classe C^∞.
$\forall x>0$, $\varphi'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{2x\ln(x)+1}{x} - 2\ln(2)$.
$x\ln(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$, donc $\frac{2x\ln(x)+1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x) = +\infty$.
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	$2-4\ln(2)$	↗	$+\infty$

c) $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,8 < 0$. Or, φ est continue strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ (car $\varphi' < 0$ sur cet intervalle), donc d'après le théorème de la bijection, φ induit une bijection de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ sur $\left]\varphi\left(\frac{1}{2}\right),+\infty\right[$ (car $\lim\limits_{\frac{1}{2}} \varphi = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$). Comme $0 \in \left]\varphi\left(\frac{1}{2}\right),+\infty\right[$, par définition d'une bijection, il existe un unique $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha)=0$.
De même, puisque φ est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, il existe un unique $\beta \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ tel que $\varphi(\beta)=0$.
2) a) $(x,y) \mapsto xy$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ (car polynomiale), à valeurs dans $]0,+\infty[$. Or ln est de classe C^1 sur

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

$]0,+\infty[$, donc $(x,y) \mapsto \ln(xy)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$.
$(x,y) \mapsto x+4y$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ (car polynomiale), à valeurs dans $\mathbb{R}$. Or exp est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x+4y}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$.
Par produit, f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$.

b) Pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy) + \mathrm{e}^{x+4y}\frac{y}{xy}\\ &= \mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy) + \mathrm{e}^{x+4y}\frac{1}{x}\\ &= f(x,y) + \mathrm{e}^{x+4y}\frac{1}{x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4\mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy) + \mathrm{e}^{x+4y}\frac{x}{xy}\\ &= 4\mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy) + \mathrm{e}^{x+4y}\frac{1}{y}\\ &= 4f(x,y) + \mathrm{e}^{x+4y}\frac{1}{y}\end{aligned}$$

c) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^{x+4y}\left(\ln(xy)+\dfrac{1}{x}\right) = 0\\ \mathrm{e}^{x+4y}\left(4\ln(xy)+\dfrac{1}{y}\right) = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(xy) = -\dfrac{1}{x}\\ \ln(xy) = -\dfrac{1}{4y}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(xy) = -\dfrac{1}{x}\\ -\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{4y}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(xy) = -\dfrac{1}{x}\\ x = 4y\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\ln\left(\dfrac{x^2}{4}\right)+\dfrac{1}{x} = 0\\ y = \dfrac{x}{4}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{x} = 0\\ y = \dfrac{x}{4}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\varphi(x) = 0\\ y = \dfrac{x}{4}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \left(x=\alpha \text{ et } y=\frac{\alpha}{4}\right)\\ &\qquad \text{ou } \left(x=\beta \text{ et } y=\frac{\beta}{4}\right)\end{aligned}$$

Donc $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont les seuls points critiques de f.

20.17

1) a) Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = f(M+tU)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(t) = f(M+tU) \leqslant f(M) = \varphi(0)$$

Donc φ admet un maximum en 0. Or φ est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un intervalle ouvert, et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, car f est de classe C^1.
Donc $\varphi'(0) = 0$. Or $\varphi'(0)$ est, par définition, la dérivée directionnelle de f en M dans la direction U. Donc $f'_U(M) = 0$.

b) Si $X = 0$, on a $\langle \nabla f_M, X\rangle = 0$.
Si $X \neq 0$, on pose $U = \dfrac{X}{\|X\|}$, alors :

$$\|U\| = \left|\frac{1}{\|X\|}\right| \|X\| = \frac{1}{\|X\|}\|X\| = 1$$

Donc U est unitaire, et d'après **1)** a), $f'_U(M) = 0$.
Or f étant C^1, $f'_U(M) = \langle \nabla f_M, U\rangle$. Comme $\langle \nabla f_M, U\rangle = \dfrac{1}{\|X\|}\langle \nabla f_M, X\rangle$ et que $f'_U(M) = 0$, on en déduit que :

$$\langle \nabla f_M, X\rangle = 0$$

c) En prenant $X = \nabla f_M$ dans la question précédente, on obtient $\|\nabla f_M\|^2 = \langle \nabla f_M, \nabla f_M\rangle = 0$. Or un vecteur est de norme nulle si et seulement s'il est nul. Donc $\nabla f_M = 0$, c'est-à-dire M est un point critique de f.

2) a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy+1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2+2y\end{aligned}$$

b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2xy+1 = 0\\ x^2+2y = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-x^3+1 = 0\\ 2y = -x^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ y = -\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $A\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ est l'unique point critique de f sur $\mathbb{R}^2$.

c) On a $f\left(1,-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ et :

$$\delta(h,k) = (1+h)^2\left(k-\tfrac{1}{2}\right) + \left(k-\tfrac{1}{2}\right)^2 + (1+h) - \tfrac{3}{4}$$

On obtient après développement et simplification :

$$\delta(h,k) = k^2 - \frac{1}{2}h^2 + 2hk + h^2k$$

d) On a $\delta(0,1) = 1 > 0$ donc $f(1,\frac{1}{2}) > f(A)$. Donc f n'admet pas de maximum en A.
Par ailleurs, $\delta(1,0) = -\frac{1}{2} < 0$ donc $f(2,-\frac{1}{2}) < f(A)$. Donc f n'admet pas de minimum en A.
Or si f admet un maximum ou un minimum en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est nécessairement un point critique (d'après **1)** c)) donc le seul point en lequel f est susceptible d'admettre un maximum ou un minimum est A. Or on vient de voir que ce n'est pas le cas. Donc f n'admet ni maximum, ni minimum sur $\mathbb{R}^2$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Dénombrement

CHAPITRE 21

Plan

21.1 Définition et propriété 555
21.2 Dénombrements usuels 558
21.3 Exemple : jeu de carte et dénombrement 564
Synthèse 567
Tests et exercices 568
Corrigés des exercices 571

Introduction

Les formules de dénombrement sont essentielles pour l'étude des probabilités sur un ensemble fini : la probabilité la plus simple sur un ensemble fini Ω se ramène en effet à un dénombrement :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

Dans cette optique, il importe de bien maîtriser les techniques élémentaires de dénombrement pour étudier les probabilités sur les ensembles finis. Les outils, modèles et formules fondamentaux à connaître et maîtriser sont :

- le modèle du tirage sans remise, le dénombrement des listes sans répétition et les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$,
- le modèle du tirage avec remise,
- la formule du crible.

Dans un problème de dénombrement, il faut souvent définir explicitement un modèle de référence, et savoir dénombrer rapidement :

- dénombrement direct,
- dénombrement par la formule du crible,
- dénombrement indirect, par passage au complémentaire.

Prérequis

Aucun.

Objectifs

- Savoir dénombrer les ensembles élémentaires : ensemble des permutations de n éléments, parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, liste de k éléments (avec ou sans répétition) dans un ensemble à n éléments,
- Savoir utiliser les techniques élémentaires de dénombrement : dénombrement direct, dénombrement par passage au complémentaire, utilisation de la formule du crible,
- Savoir interpréter les formules usuelles sur les coefficients binomiaux par un dénombrement.

21.1 Définition et propriété

Définition – Cardinal

Le **cardinal** d'un ensemble fini A, noté $\text{card}(A)$, est le nombre d'élément de A.
Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ a un cardinal nul.

Propriété – Opérations ensemblistes usuelles

1. Si A et B sont des ensembles finis, l'ensemble des parties de A, $\mathcal{P}(A)$ et le produit cartésien $A \times B$ sont des ensembles finis, de cardinal respectifs :

$$\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\text{card}(A)}$$
$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

2. Le cardinal du complémentaire d'un sous ensemble A d'un ensemble Ω se déduit du cardinal de A et de Ω :

$$\text{card}\left(\overline{A}\right) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$$

3. Le cardinal de la réunion de deux sous-ensembles disjoints est la somme des cardinaux :

$$A \cap B = \emptyset \implies \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

De plus, si A et B sont deux sous ensembles d'un ensemble fini, ils vérifient la *formule du crible* :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

La formule du crible se généralise à la réunion de n sous ensembles d'un ensemble fini. Pour démontrer la formule du crible généralisée, nous allons utiliser la *fonction caractéristique* d'un sous ensemble A et ses propriétés :

Définition – Fonction caractéristique

La **fonction caractéristique** d'un sous ensemble A d'un ensemble Ω est la fonction $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Propriété – Opérations ensemblistes élémentaires

La fonction caractéristique de l'intersection de deux sous ensembles A et B d'un ensemble Ω est le produit des fonctions caractéristiques :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

La fonction caractéristique du complémentaire d'un sous ensemble A d'un ensemble Ω est le complémentaire de la fonction caractéristique :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A \text{ c'est-à-dire : } \forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Si Ω est un ensemble fini, le cardinal de A se calcule à partir de la fonction caractéristique :

$$\text{card}\,(A) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_A(\omega)$$

Nous en déduisons :

Théorème – Formule du crible
Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ sont n sous ensembles d'un ensemble fini Ω, le cardinal de la réunion se déduit des cardinaux des intersections finies par la formule du crible :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \underbrace{\sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!]\\ \text{card}(J)=k}} \overbrace{\text{card}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)}^{\text{intersections } k \text{ à } k}}_{\binom{n}{k} \text{ termes}}$$

Remarque – Le nombre de termes dans la somme sur J est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. Lorsque l'on applique la formule du crible généralisée, les termes de la somme sur J seront souvent tous égaux et donc la somme sur J sera cette valeur commune multipliée par $\binom{n}{k}$.

Remarque – La formule du crible peut s'écrire sous forme développée :

- lorsque $n = 2$:

$$\text{card}\,(A\cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A\cap B)$$

- lorsque $n = 3$:

$$\begin{aligned}\text{card}\,(A\cup B\cup C) = {} & \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) + \text{card}\,(C)\\ & - \underbrace{\text{card}\,(A\cap B) - \text{card}\,(A\cap C) - \text{card}\,(B\cap C)}_{\text{intersections 2 à 2}}\\ & + \underbrace{\text{card}\,(A\cap B\cap C)}_{\text{intersections 3 à 3}}\end{aligned}$$

- en général :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) - \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{card}\left(A_i \cap A_j\right)}_{\text{intersections 2 à 2}}$$
$$+ \cdots + (-1)^{k+1} \underbrace{\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{1\le j\le k} A_{i_j}\right)}_{\text{intersections } k \text{ à } k}$$
$$+ \cdots + (-1)^{n+1} \operatorname{card}\left(\bigcap_{1\le i\le n} A_i\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{1\le j\le k} A_{i_j}\right)$$

Démonstration

D'après les lois de de Morgan, le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires. La fonction caractéristique du complémentaire vérifie :

$$\mathbb{1}_A = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}$$

Nous en déduisons donc, en passant au complémentaire :

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{1\le i\le n} A_i} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{\bigcup_{1\le i\le n} A_i}} = 1 - \mathbb{1}_{\bigcap_{1\le i\le n} \overline{A_i}}$$
$$= 1 - \prod_{1\le i\le n} \mathbb{1}_{\overline{A_i}} = 1 - \prod_{1\le i\le n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

Si nous développons le produit $\prod_{1\le i\le n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$, nous obtiendrons 2^n termes en choisissant tantôt 1, tantôt $-\mathbb{1}_{A_i}$. À chaque terme du produit développé, nous pouvons associer la partie J de $[\![1, n]\!]$ des entiers j pour lesquels le terme $-\mathbb{1}_{A_j}$ apparaît. À chaque partie J non vide correspond donc le terme :

$$\prod_{j\in J} \left(-\mathbb{1}_{A_j}\right) = (-1)^{\operatorname{card}(J)} \prod_{j\in J} \mathbb{1}_{A_j}$$

Lorsque $J = \emptyset$, nous obtenons $-1 \times 1 \times \cdots \times 1 = -1$ et nous en déduisons (après avoir simplifié $1 - 1 = 0$) :

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!] \\ J\neq\emptyset}} (-1)^{\operatorname{card}(J)+1} \prod_{j\in J} \mathbb{1}_{A_j} \quad \blacksquare$$

Comme le cardinal se déduit des fonctions caractéristiques :

$$\operatorname{card}(A) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_A(\omega)$$

et comme la fonction caractéristique d'une intersection est le produit des fonctions caractéristiques, nous en déduisons la formule du crible.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Corollaire – Réunion d'ensembles disjoints

Le cardinal de la réunion de sous ensembles deux à deux disjoints est la somme des cardinaux :

$$\left(\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset\right) \implies \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i)$$

Exemple – Méthode du crible d'Érathostène

La formule du crible doit son nom à la *méthode du crible d'Érathostène*, qui permet d'identifier les nombres premiers. Par exemple, pour identifier les nombres premiers de 1 à 48, on commence par barrer les multiples de 2, puis les multiples de 3 et de 5. Les nombres qui n'ont pas été barrés sont alors exactement le nombre 1 et les nombres premiers (différents de 2, 3 et 5) inférieurs à 48.

En effet, un nombre inférieur à 48 qui n'est pas premier a un diviseur premier inférieur à $\sqrt{48}$, donc strictement inférieur à 7. Ce facteur premier est nécessairement égal à 2, 3 ou 5.

La formule du crible permet de savoir a priori combien de nombres ont été barrés. Si on note A_n l'ensemble des multiples de l'entier n compris entre 1 et 48, nous pouvons remarquer que $\operatorname{card}(A_n)$ est la partie entière de $\frac{48}{n}$.

L'ensemble des nombres barrés est $B = A_2 \cup A_3 \cup A_5$. D'après la formule du crible :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(B) = {} & \operatorname{card}(A_2) + \operatorname{card}(A_3) + \operatorname{card}(A_5) \\ & - (\operatorname{card}(A_2 \cap A_3) + \operatorname{card}(A_2 \cap A_5) + \operatorname{card}(A_3 \cap A_5)) \\ & + \operatorname{card}(A_2 \cap A_3 \cap A_5)\end{aligned}$$

Notons que $A_2 \cap A_3 = A_6$ est l'ensemble des multiples de 2 et de 3, donc l'ensemble des multiples de 6. De même, $A_2 \cap A_5 = A_{10}$, $A_3 \cap A_5 = A_{15}$ et $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$. Donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(B) &= \operatorname{card}(A_2) + \operatorname{card}(A_3) + \operatorname{card}(A_5) \\ &\quad - (\operatorname{card}(A_6) + \operatorname{card}(A_{10}) + \operatorname{card}(A_{15})) + \operatorname{card}(A_{30}) \\ &= 24 + 16 + 9 - 8 - 4 - 3 + 1 = 35\end{aligned}$$

Il y a donc :

- 35 nombres barrés (dont 3 nombres premiers) entre 1 et 48,
- 13 nombres qui n'ont pas été barrés, parmi lesquels le nombre 1 et 12 nombres premiers.

Sans avoir besoin de les identifier explicitement, nous savons donc qu'il y a exactement 15 nombres premiers entre 1 et 48.

21.2 Dénombrements usuels

21.2.1 Permutations d'un ensemble fini

Définition – Permutation

Une **permutation** d'un ensemble fini Ω est une bijection de Ω dans Ω.

Théorème – Dénombrement des permutations
Le nombre de permutations d'un ensemble Ω à n éléments est le nombre noté $n!$ (factorielle n) :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Démonstration
Une permutation σ d'un ensemble à n éléments ω_i, numérotés de 1 à n est caractérisée par les images successives de ses éléments :

1. il y a n possibilités pour l'image de ω_1,
2. une fois fixée l'image de ω_1, il y a $n-1$ possibilités pour l'image de ω_2,
3. puis $n-2$ possibilités pour celle de ω_3, et ainsi de suite

Le nombre total de possibilités est donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1$. ■

Exemple

Le nombre de façons de trier un jeu de 32 cartes est le nombre de permutations d'un ensemble à 32 éléments, c'est-à-dire 32!.

21.2.2 Modèle du tirage avec remise

Le tirage avec remise consiste à réaliser le tirage successif de p éléments d'un ensemble Ω, en remettant l'élément tiré à l'issue de chaque tirage. Le résultat est la liste ordonnée des éléments tirés successivement (dans laquelle un élément donné peut éventuellement apparaître plusieurs fois) :

Définition – Liste (avec répétition)
Soit Ω un ensemble fini à n éléments. Une ***p*-liste** à valeur dans Ω est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de Ω.

Théorème – Dénombrement des *p* listes
Si $\Lambda_p(\Omega)$ est l'ensemble des p-listes à valeur dans un ensemble Ω à n éléments :

$$\text{card}\left(\Lambda_p(\Omega)\right) = n^p$$

Démonstration

$$\Lambda_p(\Omega) = \Omega^p = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega}_{p \text{ fois}}$$

Donc : $$\text{card}\left(\Lambda_p(\Omega)\right) = \underbrace{\text{card}\,(\Omega) \times \text{card}\,(\Omega) \times \cdots \times \text{card}\,(\Omega)}_{p \text{ fois}} = n^p$$ ■

Exemple

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On effectue 5 tirages successifs avec remise et on note les numéros obtenus. Le nombre total de tirages possibles est le nombre de 5-listes à valeur dans $\{1, 2, \ldots, 10\}$, c'est-à-dire 10^5.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

21.2.3 Modèle du tirage sans remise

Le tirage sans remise consiste à réaliser p tirages successifs d'éléments d'un ensemble Ω, sans remettre l'élément tiré à l'issue de chaque tirage. Le résultat est la liste ordonnée des éléments tirés successivement (dans laquelle un élément donné ne peut pas apparaître plus d'une fois) :

Définition – Liste sans répétition
Une ***p*-liste sans répétition** à valeur dans un ensemble Ω est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de Ω deux à deux distincts. On parle aussi d'**arrangement de *p* éléments pris parmi *n***.

Théorème – Dénombrement des listes sans répétition
Le nombre de p-listes sans répétition à valeur dans un ensemble à n éléments est :

$$\mathcal{A}_n^p = \underbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}_{p \text{ termes}} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque – Dénombrement des injections entre ensembles finis
$\mathcal{A}_n^p$ est le nombre d'injections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble à n éléments. En effet, si $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ est un ensemble à p éléments et $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ un ensemble à n éléments, on peut associer à toute injection $\sigma : A \to B$ la p-listes des images des éléments de A : $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_p))$.

Démonstration
Lorsque l'on réalise un tirage sans répétition, on a n choix possibles pour le premier tirage, $n-1$ choix possibles pour le deuxième tirage et ainsi de suite, soit :

$$\mathcal{A}_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$$

Si $p \leq n$, on en déduit $\mathcal{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Si $p \geq n+1$, l'un des termes du produit est nul, donc $\mathcal{A}_n^p = 0$. ■

Exemple

20 athlètes s'affrontent lors d'une compétition On suppose qu'il ne peut pas y avoir d'ex-æquo. Le nombre de podiums possibles est le nombre de 3-listes sans répétition dans l'ensemble des 20 athlètes : il y a donc $\mathcal{A}_{20}^3$ podiums possibles.

21.2.4 Modèle du tirage simultané

Le tirage simultané consiste à tirer simultanément k éléments d'un ensemble Ω. Le résultat est une partie à k éléments de l'ensemble Ω :

Définition – Coefficients binomiaux
Soient k et n deux entiers. Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarque – Notation obsolète C_n^k
On utilise parfois la notation C_n^k (« combinaison de k éléments parmi n ») pour désigner le coefficient binomial $\binom{n}{k}$. La notation $\binom{n}{k}$ a remplacé la notation C_n^k dans les programmes officiels de classes préparatoires en 1995.

Remarque – Par convention, nous définirons :

$$\binom{n}{k} = 0$$

lorsque $k < 0$.

Exemple

Blaise joue au loto une grille de 6 numéros distincts choisis entre 1 et 49. Le nombre de grilles possibles est égal à $\binom{49}{6}$.

Propriété – Coefficients binomiaux
Les coefficients binômiaux vérifient :

1. Complémentaire :
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$
2. Formule de Pascal :
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
3. Identité de Van der Monde :
$$\sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{m}{k-p} = \binom{n+m}{k}$$

Démonstration
Toutes les formules présentées peuvent se démontrer par un dénombrement approprié.

1. *Complémentaire :* $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n. Or il revient au même de sélectionner les $n-k$ éléments mis de côté. Comme il y a $\binom{n}{n-k}$ façons de sélectionner ces $n-k$ éléments, on obtient :
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$
2. *Formule de Pascal :* il y a deux types de parties à $k+1$ éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments :
 (a) Les parties qui contiennent le $n+1$-ième élément ω_{n+1}, qui sont obtenues par réunion de ω_{n+1} avec une partie à k éléments dans l'ensemble des n premiers éléments, ce qui fait $\binom{n}{k}$ possibilités,
 (b) Les parties qui ne contiennent pas le $n+1$-ième élément, qui sont donc des parties à $k+1$ éléments dans l'ensemble des n premiers éléments, ce qui fait $\binom{n}{k+1}$ possibilités.

 On obtient ainsi deux sous-ensembles disjoints, dont la réunion est l'ensemble des parties à $k+1$ éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments. Le cardinal total est alors la somme des cardinaux des sous-ensembles, d'où :
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

3. *Identité de Van der Monde :* un ensemble à $n + m$ éléments peut être obtenu comme réunion d'un ensemble à n éléments (par exemple : n boules vertes numérotées de 1 à n) et d'un ensemble à m éléments (par exemple : m boules rouges numérotées de $n + 1$ à $n + m$). Nous pouvons décomposer les parties à k éléments suivant le nombre de boules vertes.

 Si l'ensemble contient p boules vertes, il est obtenu par réunion :

 (a) d'un ensemble de p boules vertes choisies parmi n, soit $\binom{n}{p}$ possibilités,

 (b) d'un ensemble de $k - p$ boules rouges choisies parmi m, soit $\binom{m}{k-p}$ possibilités,

 En faisant la somme sur tous les cas possibles (qui sont deux à deux disjoints) :

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{m}{k-p} = \binom{n+m}{k} \qquad \blacksquare$$

Remarque – Coefficient binomial négatif

Remarquons que lorsque $k > n$, $\binom{n}{k}$ a un sens combinatoire : c'est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. Comme $k > n$, il n'y a pas de partie à k éléments, donc $\binom{n}{k} = 0$. Par contre, $\binom{n}{n-k}$ n'a pas de sens combinatoire : on ne peut pas définir de parties ayant un nombre $n - k < 0$ d'éléments. Par convention, nous avons posé : $\binom{n}{n-k} = 0 = \binom{n}{k}$.

Remarque – Triangle de Pascal

La formule de Pascal fournit un algorithme explicite de calcul des coefficients binomiaux : on dessine un tableau (appelé *triangle de Pascal*), dans lequel on indique le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ à la $n + 1$-ième ligne et la $p + 1$-ième colonne (sans indiquer les valeurs nulles). Le tableau se remplit ligne après ligne, chaque terme se calculant en faisant la somme du terme immédiatement au dessus et au dessus à gauche :

	$p = 0$	1	2	3	4	5
$n = 0$	1					
$n = 1$	1	1				
$n = 2$	1	2	1			
$n = 3$	1	3	3	1		
$n = 4$	1	4	6	4	1	
$n = 5$	1	5	10	10	5	1

Exemple – Autres propriétés des coefficients binomiaux

En utilisant des méthodes de dénombrement, nous pouvons vérifier les propriétés supplémentaires :

1. Formule de Pascal généralisée : lorsque $k \leq n$:
$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$
2. Double produit binomial : lorsque $p \leq k \leq n$:
$$\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-k}{k-p}$$
 En particulier, lorsque $p = 1$:
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration

1. *Formule de Pascal généralisée :* on décompose l'ensemble des parties à $k+1$ éléments dans l'ensemble à $n+1$ éléments $[\![1, n+1]\!]$ selon leur plus grand élément, qui peut varier de $k+1$ à $n+1$.
 Si le plus grand élément est $p+1$, la partie considérée est la réunion de $p+1$ et d'une partie à k éléments dans l'ensemble $[\![1, p]\!]$ des p premiers éléments, ce qui fait $\binom{p}{k}$ possibilités. En faisant la somme sur tous les cas possibles (qui sont deux à deux disjoints), c'est-à-dire pour p variant de k à n, on en déduit :
 $$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$
2. *Double produit binomial :* fixons trois entiers $k \leq p \leq n$.
 Un manager gère une équipe de n personnes. Il doit choisir d'offrir une promotion à p subordonnés, et d'attribuer une primes à k personnes promues. Il peut commencer par choisir les p promotions parmi ses n subordonnés, puis les k primes parmi les p promotions, soit au total : $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$ possibilités.
 Il peut également commencer par choisir les k primes, puis les $p-k$ promotions sans primes parmi les $n-k$ personnes restantes, soit au total : $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ possibilités. ■

Remarque – La formule du double produit binomial est utilisée en probabilité pour calculer l'espérance ou la variance des loi binomiales ou hypergéométriques.

Il existe une formule explicite pour calculer les coefficients binomiaux :

Théorème – Formule de calcul des coefficients binomiaux
Si on note $0! = 1$ par convention, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se calcule par la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\mathcal{A}_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration
Nous avons dénombré le nombre de k-listes sans répétition dans un ensemble à n éléments en notant que nous avons n choix possibles pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, etc..., et $n-k+1$ pour le dernier :

$$\mathcal{A}_n^k = \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{k \text{ termes}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nous pouvons également le dénombrer en deux temps :

1. en fixant les k éléments de la liste, qui est un sous ensemble à k éléments parmi n, soit en tout $\binom{n}{k}$ possibilités,
2. une fois fixés ces éléments, en déterminant l'ordre de tirage des k éléments : nous avons k choix pour le premier élément, $k-1$ pour le deuxième etc..., soit $k!$ choix au total.

Donc :

$$\mathcal{A}_n^k = k!\binom{n}{k} \quad ■$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

21.3 Exemple : jeu de carte et dénombrement

Méthode 1 Dénombrer

Pour dénombrer un ensemble E, on dispose des méthodes suivantes :

1. dénombrement direct de E
 (a) identifier un des trois modèles primaires : tirages simultanés (combinaisons), tirages successifs sans remise (arrangements), tirages successifs avec remise (k-liste avec répétition),
 (b) découper E en parties **disjointes** que l'on sait dénombrer,
 (c) en dernier recours, découper E en parties **non disjointes** que l'on sait dénombrer et appliquer la formule du crible.
2. dénombrement du complémentaire de E à l'aide des méthodes ci-dessus.

Exemple d'application

Nous disposons d'un jeu de 32 cartes, et nous distribuons une main de 8 cartes à un joueur. Nous nous intéressons aux problèmes suivants :

1. Combien peut-on former de mains ne contenant pas l'As de Pique ?
2. Combien peut-on former de mains contenant au moins 1 As ?
3. Combien peut-on former de mains contenant exactement 2 As ?
4. Combien peut-on former de mains contenant au plus 1 Pique ?
5. Combien peut-on former de mains contenant exactement 2 As ou exactement 5 Piques ?

Solution

Le modèle de référence est celui des tirages simultanés. Le nombre total de mains possibles est donc le nombre de combinaisons de 8 éléments pris parmi 32. Il y a donc $\binom{32}{8}$ mains possibles.

1. Dénombrement direct : mains sans l'As de Pique

Nous pouvons dénombrer directement le nombre de mains sans l'As de Pique. Il s'agit de choisir 8 cartes parmi les 31 cartes différentes de l'As de Pique. Le nombre de mains sans l'As de Pique est donc le nombre de combinaisons de 8 éléments pris parmi 31, soit $\binom{31}{8}$ possibilités.

2. Dénombrement indirect : mains contenant au moins un As

Nous pouvons dénombrer le nombre de mains contenant au moins un As, en dénombrant l'ensemble complémentaire : les mains ne contenant aucun As. Le nombre de mains sans As est le nombre de combinaisons de 8 cartes prises parmi les 28 cartes différentes des 4 As, c'est-à-dire $\binom{28}{8}$. Or il y a $\binom{32}{8}$ mains possibles. Donc le nombre de mains contenant au moins un As est :

$$\binom{32}{8} - \binom{28}{8}$$

3. Dénombrement direct plus compliqué : mains contenant exactement deux As

Pour dénombrer le nombre de mains contenant exactement deux As, notons que chaque main est constituée de :

1. 2 As, choisis parmi les 4 As du jeu : il y a $\binom{4}{2}$ possibilités,
2. 6 autres cartes, choisies parmi les 28 autres cartes du jeu : il y a $\binom{28}{6}$ possibilités,

ce qui fait au total $\binom{4}{2}\binom{28}{6}$ possibilités. Le nombre total de mains contenant exactement deux As est donc :

$$N = \binom{4}{2}\binom{28}{6}$$

Remarque – Pourquoi a-t-on multiplié les nombres $\binom{4}{2}$ et $\binom{28}{6}$? Lorsque l'on dit qu'il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir les 2 As, on « découpe » l'ensemble des mains cherchées en $\binom{4}{2}$ sous-parties deux à deux disjointes. Chacune de ces sous-parties contient les mains pour lesquelles les 2 As sont les mêmes : les mains avec les As de Cœur et Carreau, les mains avec les As de Cœur et Pique, etc.

Ensuite, lorsque l'on dit qu'il y a $\binom{28}{6}$ choix pour les 6 autres cartes, on dénombre ces sous-parties : pour un couple d'As donné, il y a $\binom{28}{6}$ mains contenant ces 2 As.

Le cardinal de l'ensemble des mains contenant exactement 2 As est la somme des cardinaux des sous-parties (elles sont **deux à deux disjointes**). Or il y a $\binom{4}{2}$ sous-parties, toutes de cardinal $\binom{28}{6}$. Ainsi le cardinal de l'ensemble des mains contenant exactement 2 As est :

$$\underbrace{\binom{28}{6} + \binom{28}{6} + \cdots + \binom{28}{6}}_{\binom{4}{2} \text{ termes}} = \binom{4}{2}\binom{28}{6}$$

4. Dénombrement direct : mains contenant au plus 1 *Pique*

Pour dénombrer les mains contenant au plus 1 Pique, on distingue :

1. *Les mains ne contenant aucun Pique*

 Il y a 24 cartes différentes des 8 Piques, donc le nombre de mains ne contenant aucun Pique est $\binom{24}{8}$.
2. *Les mains contenant exactement* 1 *Pique*

 (a) on choisit l'unique Pique parmi les 8 Piques disponibles : il y a $\binom{8}{1} = 8$ choix possibles,

 (b) on choisit les 7 autres cartes parmi les 24 cartes différentes des Piques, il y a $\binom{24}{7}$ choix possibles.

 Il y a donc $8\binom{24}{7}$ mains contenant exactement 1 Pique.

Le nombre de mains contenant au plus 1 Pique est donc :

$$\binom{24}{8} + 8\binom{24}{7}$$

Remarques

1. Pourquoi a-t-on multiplié 8 et $\binom{24}{7}$? L'explication est la même que pour le dénombrement précédent : on a « découpé » l'ensemble des mains contenant exactement 1 Pique en 8 sous-parties deux à deux disjointes, toutes de cardinal $\binom{24}{7}$. Chacune de ces sous-parties est constituée des mains contenant la même carte de Pique.
2. Pourquoi a-t-on additionné $\binom{24}{8}$ et $8\binom{24}{7}$? On a « découpé » l'ensemble des mains contenant au plus 1 Pique en deux sous-parties disjointes : l'ensemble des $\binom{24}{8}$ mains ne contenant aucun Pique et l'ensemble des $8\binom{24}{7}$ mains contenant exactement 1 Pique. Le cardinal de l'ensemble des mains contenant au plus 1 Pique est alors la somme des cardinaux des deux sous-parties disjointes.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

5. Dénombrement par la formule du crible : mains contenant exactement 2 *As ou exactement 5 Piques*

Si on note E l'ensemble des mains contenant exactement 2 As, F l'ensemble des mains contenant exactement 5 Piques, nous devons dénombrer la réunion $E \cup F$.



Une des principales sources d'erreurs en dénombrement est de considérer comme disjointes des parties qui ne le sont pas. Ici, E et F ne sont pas des parties disjointes : nous allons dénombrer $E \cup F$ en utilisant la formule du crible.

D'après la formule du crible :

$$\text{card}\,(E \cup F) = \text{card}\,(E) + \text{card}\,(F) - \text{card}\,(E \cap F)$$

Nous avons dénombré :

$$\text{card}\,(E) = \binom{4}{2}\binom{28}{6}$$

Pour dénombrer F, notons qu'une main contenant exactement 5 Piques est constituée de :

1. 5 Piques, choisis parmi les 8 Piques du jeu : il y a $\binom{8}{5}$ possibilités,
2. 3 autres cartes, choisies parmi les 24 autres cartes du jeu : il y a $\binom{24}{3}$ possibilités,

c'est-à-dire

$$\text{card}\,(F) = \binom{8}{5}\binom{24}{3}$$

Pour dénombrer $E \cap F$, c'est-à-dire les mains contenant exactement 2 As et exactement 5 Piques, il faut distinguer :

1. *Les mains contenant l'As de Pique*
 (a) Il faut choisir l'As de Pique,
 (b) Il faut choisir 1 As parmi les 3 autres As du jeu : $\binom{3}{1}$ possibilités,
 (c) Il faut choisir 4 Piques parmi les 7 autres Piques du jeu $\binom{7}{4}$ possibilités,
 (d) Il faut encore choisir 2 cartes parmi les 21 cartes restantes (ni As, ni Pique : 7 Cœurs, 7 Carreau et 7 Trèfles) : $\binom{21}{2}$ possibilités,

 Le nombre de mains contenant exactement 2 As et exactement 5 Piques, dont l'As de Pique est donc :
 $$N = \binom{3}{1}\binom{7}{4}\binom{21}{2}$$
2. *Les mains ne contenant pas l'As de Pique*
 (a) Il faut choisir 2 As parmi les 3 autres As du jeu : $\binom{3}{2}$ possibilités,
 (b) Il faut choisir 5 Piques parmi les 7 autres Piques du jeu : $\binom{7}{5}$ possibilités,
 (c) Il faut encore choisir 1 carte parmi les 21 cartes restantes : $\binom{21}{1}$ possibilités,

 Le nombre de mains contenant exactement 2 As et exactement 5 Piques, mais pas l'As de Pique est donc :
 $$N = \binom{3}{2}\binom{7}{5}\binom{21}{1}$$

Le nombre de mains contenant exactement 2 As ou exactement 5 Piques est donc :

$$N = \underbrace{\binom{4}{2}\binom{28}{6}}_{\text{2 As}} + \underbrace{\binom{8}{5}\binom{24}{3}}_{\text{5 Piques}} - \underbrace{\underbrace{\binom{3}{1}\binom{7}{4}\binom{21}{2}}_{\text{avec l'As de Pique}} - \underbrace{\binom{3}{2}\binom{7}{5}\binom{21}{3}}_{\text{sans l'As de Pique}}}_{\text{2 As et 5 Piques}}$$

Synthèse

Savoirs

- Formule du crible : le cardinal d'une réunion de n sous ensembles d'un ensemble fini se déduit des cardinaux des sous ensembles et de toutes leurs intersections possibles,
- Les modèles usuels de dénombrement :
 - Il y a $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments
 - Tirage avec remise de p éléments dans un ensemble à n éléments : il y a n^p p-listes (avec répétition éventuelle) dans un ensemble à n éléments,
 - Tirage sans remise de p éléments dans un ensemble à n éléments : il y a $\mathcal{A}_n^p$ p-listes sans répétition dans un ensemble à n éléments, où :

$$\mathcal{A}_n^p = \underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{p \text{ termes}} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

 - Il y a $\binom{n}{p}$ parties à p éléments dans un ensemble à n élément, où le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ se calcule :
 1. en complétant le triangle de Pascal
 2. ou par la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p!}\mathcal{A}_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Par convention, on pose $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p < 0$.

Les différents tirages possibles de p éléments dans un ensemble à n éléments sont récapitulés dans le tableau ci dessous :

Tirage	Ordre	Répétition	Modélisation	Dénombrement
Avec remise	oui	oui	p-liste	n^p
Sans remise	oui	non	p-liste sans répétition	$\mathcal{A}_n^p$
Simultané	non	non	partie à p éléments	$\binom{n}{p}$

Savoir-faire

- Dénombrement : dénombrement direct, dénombrement du complémentaire, utilisation de la formule du crible,
- Reconnaître les modèles usuels : tirage avec remise (p-listes avec répétition éventuelle), tirage sans remise, permutations, parties d'un ensemble fini,
- Calculer les coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

21.1 Combien y-a-t-il de manière d'obtenir 10 € avec des pièces de 1 et 2 € ?

1. 5
2. 6
3. 10

21.2 Le nombre de p-listes dans un ensemble à n éléments est :

1. n^p
2. $\binom{n}{p}$
3. $\mathcal{A}_n^p$

21.3 On distribue une main de 8 cartes dans un jeu de cartes de 32 cartes. On ne distingue pas les mains contenant les mêmes cartes. Combien y-a-t-il de mains contenant au moins 1 roi ?

1. $\binom{4}{1}\binom{31}{7}$
2. $\binom{32}{8} - \binom{28}{8}$
3. $\binom{4}{1}\binom{28}{7} + \binom{4}{2}\binom{28}{6} + \binom{4}{3}\binom{28}{5} + \binom{4}{4}\binom{28}{4}$

21.4 On pioche simultanément 3 boules dans une urne contenant 4 boules blanches numérotées de 1 à 4 et 3 boules noires numérotées de 5 à 7. Combien y-a-t-il de tirages contenant exactement 2 boules noires ?

1. $\binom{3}{2}\binom{4}{1}$
2. $\mathcal{A}_3^2\mathcal{A}_4^1$
3. $3!\binom{3}{2}\binom{4}{1}$

21.5 On pioche à nouveau simultanément 3 boules dans une urne contenant 4 boules blanches numérotées de 1 à 4 et 3 boules noires numérotées de 5 à 7. Combien y-a-t-il de tirages tels que le plus grand numéro tiré est inférieur ou égal à 5 ?

1. $\binom{5}{3}$
2. $\mathcal{A}_5^3$
3. $\binom{7}{3} - \binom{6}{2} - \binom{5}{2}$

21.6 On tire avec remise 4 boules dans une urne contenant 4 boules blanches numérotées de 1 à 4 et 3 boules noires numérotées de 5 à 7. Combien y-a-t-il de tirages contenant exactement 2 boules noires ?

1. $3^2 4^2$
2. $\binom{4}{2} 3^2 4^2$
3. $\mathcal{A}_3^2\mathcal{A}_4^2$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 570.

21.7

Une PME de 498 employés procède à l'élection de 7 délégués du personnel. Chaque employé vote pour 7 candidats. On suppose qu'il n'y a ni vote nul, ni abstention. On considère 3 candidats A, B et C. 265 employés ont voté pour A, 160 pour A et B, 144 pour A et C, 108 pour A, B et C, 71 pour B et C mais pas pour A, 57 pour C mais pas pour A ni pour B, 114 pour B mais pas pour A.

1. Combien d'employés ont voté pour B ?
2. Combien d'employés ont voté pour C ?
3. Combien d'employés n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C ?

21.8

Les numéros de téléphone en France métropolitaine sont constitués de 10 chiffres :

- le premier chiffre est 0
- le deuxième chiffre est 1, 2, 3, 4, 5 ou 8

Combien peut-on avoir de numéros de téléphone en France métropolitaine ?

21.9

Un étudiant a acheté les 5 volumes des *Recherches sur la nature et les causes de la richesse des nations* d'Adam Smith. Au gré de ses lectures et relectures, il range ces 5 volumes dans un ordre quelconque sur une étagère : combien d'ordres lui sont proposés ?

21.10

Une société de voyage propose à ses clients le tour de l'Europe en 8 jours. Il s'agit de visiter 4 capitales européennes en passant deux jours dans chaque ville. Les capitales sont à choisir parmi Rome, Paris, Londres, Amsterdam, Madrid, Prague et Budapest.
Combien y-a-t-il de circuits possibles ?

21.11

Harpagon range ses dix livres de compte, numérotés de 1 à 10 sur une étagère.

De combien de manières peut-il ranger ses livres de façon à ce que les livres 1, 2 et 3 soient côte à côte (pas nécessairement dans cet ordre).

21.12

Un sac contient six boules blanches numérotées de 1 à 6, quatre boules rouges numérotées de 1 à 4, et deux boules vertes numérotées de 1 à 2. On tire quatre boules simultanément.

1. Quel est le nombre total de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages :
 (a) ne comportant que des chiffres pairs ?
 (b) comportant exactement deux boules blanches et une boule rouge ?
 (c) comportant exactement une boule verte et une boule numérotée 1 ?

21.13 ◎

Le jeu de triomino est un jeu de domino avec des tuiles de forme triangulaire, chaque sommet du triangle étant numéroté de 0 à 5.

Combien y-a-t-il de tuiles non superposables dans un jeu de triomino ?

21.14

Le code confidentiel d'une carte bancaire est un nombre constitué de 4 chiffres tous non nuls.

1. Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Combien existe-t-il de codes :
 (a) de quatre chiffres différents ?
 (b) comportant une seule fois le chiffre 1 ?
 (c) comportant deux fois le chiffre 1, les deux autres chiffres étant différents entre eux ?
 (d) deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2 ?
 (e) deux fois deux chiffres distincts ?

Exercices d'approfondissement

21.15

1. Quel est le nombre de surjections de $[\![1,4]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$?
2. Quel est le nombre de surjections de $[\![1,6]\!]$ dans $[\![1,4]\!]$?

21.16

Un drapeau est un quadrillage avec différentes couleurs, où deux portions de couleur identique ne peuvent pas avoir un côté commun.

a_1	a_2
b_1	b_2

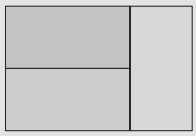
On dispose de $n \geq 2$ couleurs possibles pour colorier un drapeau.

1. combien y-a-t-il de drapeaux à 2 lignes et 2 colonnes ?
2. combien y-a-t-il de drapeaux à 2 lignes et k colonnes ?

21.17

Un quadrillage Q_n a une longueur de n carreaux et une largeur de 2 carreaux. On pave Q_n par des dominos, c'est à dire par des rectangles d'une longueur de 2 carreaux et d'une largeur d'1 carreau.

Par exemple, lorsque $n = 3$, on peut paver Q_3 avec 3 dominos :



On note u_n le nombre de façons de paver Q_n avec des dominos.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n puis sous forme de somme.

21.18 ◎

Une « main » est un sous-ensemble d'un jeu de cartes. On distingue par convention 4 « couleurs » dans un jeu : carreau, cœur, pique, trèfle. Avec un jeu de 52 cartes, combien peut-on former de mains de 8 cartes contenant :

1. 2 cœurs et 6 piques ;
2. 2 cartes d'une couleur et 6 d'une autre.
3. les 4 couleurs.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

21.18 ◎

On place r boules dans n tiroirs numérotés. Quel est le nombre de répartitions possibles dans chacun des cas suivants :

1. $r \leq n$ et chaque tiroir peut contenir au plus une boule ; les boules sont discernables (par exemple numérotées)
2. $r \leq n$ et chaque tiroir peut contenir au plus une boule ; les boules sont indiscernables.
3. Chaque tiroir peut contenir la totalité des boules ; les boules sont discernables.
4. **Difficile :** chaque tiroir peut contenir la totalité des boules ; les boules sont indiscernables

21.19

Dans une urne, il y a N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise d'une boule dans cette urne. On appelle résultat la suite de ces tirages.

1. Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels une boule donnée B_i est prélevée exactement k fois ?
2. Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels une boule donnée B_i est prélevée exactement m fois au cours des r premiers tirages ?
3. Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels une boule donnée B_i est prélevée pour la s-ième fois au r-ième tirage ?

21.20

Soient n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$.

1. Démontrer
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$
2. En déduire une expression simplifiée de
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

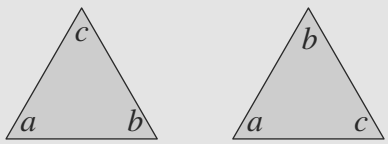
21.21 ◎

Dans une assemblée, il y a n hommes et p femmes. On doit choisir un bureau comprenant a personnes ($1 \leq a \leq n+p$)

1. Combien y-a-t-il de bureaux comprenant j hommes et $a-j$ femmes ?
2. En déduire
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{p}{a-j} = \binom{n+p}{a}$$
en adoptant la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.
3. En déduire
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}^2 = n(n-1)\binom{2n-2}{n-2}$$

Indications

21.13 On pourra distinguer les cas où les trois sommets ont le même numéro, les cas où deux sommets ont le même numéro a, le troisième ayant un numéro b distinct de a, et les cas où les trois sommets ont des numéros distincts $a < b < c$. Lorsque les sommets ont des numéros distincts $a < b < c$, on peut former deux tuiles non superposables avec ces trois numéros :



21.18 Question 3 : si on note M_1 l'ensemble des mains qui ne contiennent pas de pique, M_2 : pas de c
oeur, M_3 : pas de trèfle ou M_4 : pas de carreau, l'ensemble des mains qui contiennent les 4 couleurs est le complémentaire de $\bigcup_{1 \leq i \leq 4} M_i$, que l'on peut dénombrer avec la formule du crible.

21.18 Question 4 : lorsque les boules sont indiscernables, on peut imaginer déposer successivement le contenu de chaque tiroir sur des emplacements numérotés, en commençant par l'emplacement numéro 1 et en ménageant un emplacement vide avant de poser le contenu (éventuellement vide) de chaque tiroir.

En notant T pour chaque emplacement vide, B pour chaque boule déposée, on représente chaque répartition possible par une liste de la forme :

$$\overbrace{T\underbrace{B\ldots B}_{p_1 \text{ termes}}}^{\text{tiroir 1}}\overbrace{T\underbrace{B\ldots B}_{p_2 \text{ termes}}}^{\text{tiroir 2}}\ldots\ldots\ldots\overbrace{T\underbrace{B\ldots B}_{p_n \text{ termes}}}^{\text{tiroir } n}$$

où p_k est le nombre de boules dans le k-ième tiroir. Il faut alors dénombrer ces représentations.

21.21 Question 3 : on pourra exprimer $i(i-1)\binom{n}{i}$ en fonction de $\binom{n-1}{i-1}$ puis de $\binom{n-2}{i-2}$, et utiliser la formule de la question 2 en remarquant que $\binom{n}{i}^2 = \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$.

21.1 La réponse 2 est correcte. Si on utilise k pièces de 2 €, il faut utiliser $10-2k$ pièces de 1 €. On utilise donc entre 0 et 5 pièces de 2 €, ce qui fait 6 possibilités (5 en utilisant de 1 à 5 pièces de 2 €, plus une en n'utilisant que des pièces de 1 €).

21.2 La réponse 1 est correcte.

La réponse 2. calcule le nombre de sous ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments.

La réponse 3. calcule le nombre de p-listes *sans répétition* dans un ensemble à n éléments.

21.3 Les réponses 2 et 3 sont correctes : on ne distingue pas les mains contenant les même cartes, donc l'ensemble des résultats possibles est l'ensemble des parties à 8 éléments parmi les 32 cartes du jeu. Il y a $\binom{32}{8}$ mains possibles (avec ou sans roi)

- réponse 2 : il y a $\binom{32}{8}$ mains possibles, dont $\binom{28}{8}$ sans roi (parties de 8 éléments parmi les 28 cartes différentes des 4 rois),
- réponse 3 : une main contenant exactement k rois est caractérisée :
 - par le choix de k rois parmi 4 : $\binom{4}{k}$ possibilités,
 - par le choix de $8-k$ cartes parmi les 28 autres : $\binom{28}{8-k}$ possibilités.

 Une main qui contient au moins un roi peut contenir de 1 à 4 rois : en faisant la somme sur tous les cas possibles, on obtient au total $\underbrace{\binom{4}{1}\binom{28}{7}}_{1\text{ roi}}+\underbrace{\binom{4}{2}\binom{28}{6}}_{2\text{ rois}}+\underbrace{\binom{4}{3}\binom{28}{5}}_{3\text{ rois}}+\underbrace{\binom{4}{4}\binom{28}{4}}_{4\text{ rois}}$ possibilités.

21.4 La réponse 1 est correcte : les résultats possibles sont les parties à 3 éléments parmi les 7 boules. Le tirage contient exactement 2 boules noires lorsque :

- on tire 2 boules parmi les 3 noires : $\binom{3}{2}$ possibilités,
- on tire 1 boules parmi les 4 blanches : $\binom{4}{1}$ possibilités,

soit au total : $\binom{3}{2}\binom{4}{1}$ tirages contenant exactement 2 boules noires.

21.5 Les réponses 1 et 3 sont correctes :

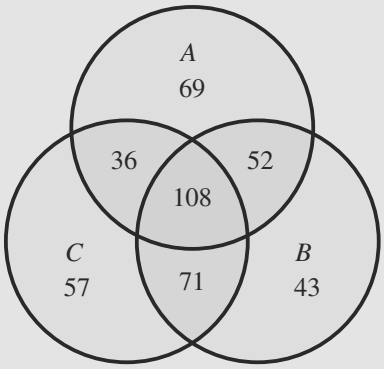
- réponse 1 : on tire 3 boules parmi les 5 boules de numéro inférieur ou égal à 5 : $\binom{5}{3}$ possibilités,
- réponse 3 : il y a $\binom{7}{3}$ tirages possibles,
 - si le plus grand numéro tiré est 7, on a tiré le numéro 7 et 2 boules parmi les boules numérotées de 1 à 6 : $\binom{6}{2}$ possibilités,
 - si le plus grand numéro tiré est 6, on a tiré le numéro 6 et 2 boules parmi les boules numérotées de 1 à 5 : $\binom{5}{2}$ possibilités,
 - sinon, le plus grand numéro tiré est inférieur ou égal à 5

21.6 La réponse 2 est correcte : les résultats possibles sont les 4-listes avec répétition éventutelle parmi les 7 boules. Le tirage contient exactement 2 boules noires lorsque :

- on détermine les instants où on tire les 2 boules noires parmi les 4 tirages consécutifs : $\binom{4}{2}$ possibilités,
- on tire 1 boule parmi les 3 noires à chacun de ces 2 instants : 3^2 possibilités,
- on tire 1 boule parmi les 4 blanches à chacun des 2 instants restants : 4^2 possibilités,

soit au total : $\binom{4}{2}3^2 4^2$ tirages contenant exactement 2 boules noires.

21.7 Nous pouvons résumer les informations connues sur les votes par le diagramme suivant, qui précise les votes pour A, B et/ou C suivant les différents cas possibles :



où on indique les effectifs de chaque case en suivant les chiffres donnés par l'énoncé, en commençant par le centre, vers l'extérieur :

$$\text{card}\,(A\cap B\cap C)=108$$

car 108 employés ont voté pour A, B et C,

$$\text{card}\left(A\cap B\cap \overline{C}\right)=160-108=52$$

car 160 employés ont voté pour A et B, dont 108 ont également voté pour C,

$$\text{card}\left(A\cap \overline{B}\cap C\right)=144-108=36$$

car 144 employés ont voté pour A et C, dont 108 ont également voté pour B,

$$\text{card}\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)=71$$

car 71 employés ont voté pour B et C mais pas pour A,

$$\text{card}\left(A\cap \overline{B}\cap \overline{C}\right)=265-52-36-108=69$$

car 265 employés ont voté pour A, dont 52 ont voté pour B mais pas pour C, dont 36 ont voté pour C mais pas pour B, et 108 ont voté pour B et C,

$$\text{card}\left(\overline{A}\cap B\cap \overline{C}\right)=114-71=43$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

car 114 employés ont voté pour B mais pas pour A, dont 71 ont voté pour C,

$$\text{card}\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) = 57$$

car 57 employés ont voté pour C mais ni pour A, ni pour B,

1. Nous en déduisons que :

$$108 + (52 + 71) + 43 = 274$$

employés ont voté pour B.

2. Nous en déduisons que :

$$108 + (36 + 71) + 57 = 272$$

employés ont voté pour C.

3. Nous en déduisons que :

$$108 + (71 + 36 + 52) + (69 + 57 + 43) = 436$$

employés parmi les 498 employés ont voté pour A, B ou C, donc :

$$498 - 436 = 62$$

employés n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C.

21.8 Les numéros de téléphone en France métropolitaine sont constitués de 10 chiffres :

- le premier chiffre est 0,
- le deuxième chiffre est 1, 2, 3, 4, 5 ou 8, soit 6 possibilités,
- les huit chiffres restants sont l'un des 10 chiffres de 0 à 9, donc forment une 8-liste (avec répétition éventuelle) à valeurs dans $[\![0, 9]\!]$.

Il y a donc $1 \times 6 \times 10^8 = 600\ 000\ 000$ numéros de téléphone en France métropolitaine.

21.9 Il s'agit de choisir l'ordre de rangement des 5 livres : en numérotant les livres de 1 à 5, on peut associer à chaque rangement possible une permutation de $[\![1, 5]\!]$. Il y a donc $5! = 120$ ordres de rangement possibles.

21.10 Un circuit est entièrement déterminé :

1. par le choix de 4 capitales parmi les 7 proposées : $\binom{7}{4} = 35$ possibilités,
2. par le choix de l'ordre de visite des 4 capitales choisies : $4! = 24$ possibilités.

Il y a donc $35 \times 24 = 840$ circuits possibles.

Notons que l'on peut également considérer qu'un circuit est une 4-liste sans répétition parmi les 7 capitales proposées (le k-ième élément de la liste étant la k-ième capitale visitée). Il y a alors

$$\mathcal{A}_7^4 = \underbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4}_{\text{4 termes}} = 840$$

circuits possibles.

21.11 Numérotons les emplacements où Harpagon range ses livres, en partant de la gauche vers la droite. Pour que les livres 1, 2 et 3 soient côte à côte (pas nécessairement dans cet ordre) :

1. il faut choisir les trois emplacements consécutifs où placer les livres 1 à 3. Si le premier de ces trois livres est posé à l'emplacement n, les deux autres sont placés aux emplacements $n + 1$ et $n + 2 \leq 10$, donc $n \leq 8$: 8 possibilités,
2. il faut placer les livres 1 à 3 dans un ordre quelconque sur les trois emplacements consécutifs à partir de l'emplacement n : $3! = 6$ possibilités,
3. puis placer les 7 livres restants dans un ordre quelconque dans les 7 emplacements restants : $7! = 5040$ possibilités

Il y a donc au total :

$$8 \times 6 \times 5040 = 241\ 920$$

possibilités pour ranger 10 livres de façon à ce que les livres 1, 2 et 3 soient côte à côte (pas nécessairement dans cet ordre)

21.12

1. On tire 4 boules simultanément. Le résultat est donc une partie de 4 boules parmi les 12 boules de l'urne : il y a $\binom{12}{4} = 495$ tirages possibles.
2. (a) Il y a 6 chiffres pairs. Les tirages ne comportant que des chiffres pairs sont tous les tirages de 4 boules parmi les 6 boules avec un numéro pair : il y a donc $\binom{6}{4} = 15$ tirages possibles ne comportant que des chiffres pairs.

 (b) Un tirage comportant exactement deux boules blanches et une boule rouge est déterminé par :

 i. le choix de 2 boules parmi les 6 blanches : $\binom{6}{2} = 15$ possibilités,

 ii. le choix d'une boule parmi les 4 rouges : $\binom{4}{1} = 4$ possibilités,

 iii. le choix d'une boule parmi les boules ni blanches, ni rouges, donc parmi les 2 boules vertes : $\binom{2}{1} = 2$ possibilités,

 Il y a donc $\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{1} = 120$ tirages comportant exactement deux boules blanches et une boule rouge.

 (c) Un tirage comportant exactement une boule verte et une boule numérotée 1 est déterminé par :

 i. soit par le choix de la boule verte numéro 1, et le choix de 3 boules parmi les 8 boules ni vertes, ni numérotées 1 : $\binom{8}{3} = 56$ possibilités,

 ii. soit par le choix de la boule verte numéro 2, puis :

A. le choix d'une boule numéroté 1 parmi la boule blanche ou rouge numéro 1 : 2 possibilités,

B. le choix de deux boules parmi les 8 boules qui ne sont ni vertes, ni numérotées 1 : $\binom{8}{2} = 28$ possibilités

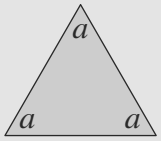
soit au total $2 \times 28 = 56$ possibilités,

Les deux choix pour la boule verte forment des situations disjointes, donc le cardinal cherché sera la somme des cardinaux trouvés. Il y a donc $56 + 56 = 112$ tirages comportant exactement une boule verte et une boule numérotée 1.

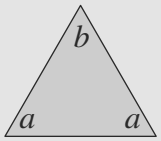
21.13

Distinguons suivant le nombre de chiffres différents inscrits sur la tuile :

1. Si les trois chiffres sont égaux, on peut former une seule tuile utilisant ces trois chiffres : 6 possibilités.

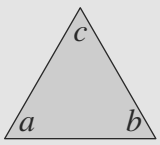


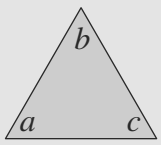
2. Si deux chiffres sont égaux à a, le troisième égal à $b \neq a$, on peut former une seule tuile deux fois a, une fois b. En posant les deux sommets avec a en bas :



Il y a 6 possibilités pour le choix de a, une fois choisi a, 5 possibilités pour b, donc : $6 \times 5 = 30$ possibilités au total.

3. Si les trois chiffres a, b et c sont tous différents, on peut former deux tuiles non superposables avec ces trois numéros. En posant le sommet a en bas à gauche :





Il y a $\binom{6}{3} = 20$ possibilités pour choisir les trois chiffres (parmi les 6 chiffres de 0 à 5) sur les sommets, puis deux possibilités pour les placer de façon à former des tuiles distinctes, donc $2\binom{6}{3} = 40$ possibilités au total.

Ces trois cas formant des situations disjointes, les cardinaux s'additionnent, donc le nombre de tuiles non superposables dans un jeu de triomino est égal à :

$$6 + 30 + 40 = 76$$

21.14

1. Un code est une 4-liste (avec répétition éventuelle) dans $[\![1, 9]\!]$. Il y a donc $9^4 = 6561$ codes possibles.

2. (a) Un code de quatre chiffres différents est une 4-liste sans répétition dans $[\![1, 9]\!]$. Il y a donc $\mathcal{A}_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ codes de quatre chiffres différents.

(b) Un code comportant une seule fois le chiffre 1 est déterminé :

i. en choisissant la position du chiffre 1 : 4 possibilités,

ii. en choisissant pour chacun des trois autres chiffres un des 8 chiffres différents de 1 : 8^3 possibilités

Il y a donc $4 \times 8^3 = 2048$ codes comportant une seule fois le chiffre 1.

(c) Un code comportant deux fois le chiffre 1, les deux autres chiffres étant différents entre eux est déterminé :

i. en choisissant la position des deux chiffres 1 parmi les 4 positions possibles : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,

ii. en choisissant pour le premier des chiffres restant un des 8 chiffres différents de 1 : 8 possibilités

iii. en choisissant pour le dernier des chiffres restant un des 7 chiffres différents de 1 et du chiffre précédemment choisi : 7 possibilités

Il y a donc $6 \times 8 \times 7 = 336$ codes comportant deux fois le chiffre 1, les deux autres chiffres étant différents entre eux.

(d) Un code comportant deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2 est déterminé par le choix de la position des chiffres 1 (les chiffres 2 étant placés aux positions restant libres).

Il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ codes comportant deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2.

(e) Un code comportant deux fois deux chiffres distincts est déterminé :

i. en choisissant les deux chiffres, parmi les 9 chiffres possibles : $\binom{9}{2} = 36$ possibilités,

ii. en choisissant la position des deux plus petits chiffres parmi les 4 positions possibles : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,

iii. les deux plus grands chiffres sont alors placés aux positions restant libres.

Il y a donc $\binom{9}{2}\binom{4}{2} = 36 \times 6 = 216$ codes comportant comportant deux fois deux chiffres distincts.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

21.15

1. Soit s une surjection de $[\![1,4]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$. Soit $i \in [\![1,3]\!]$ et n_i le nombre d'antécédents de i par s. Comme s est une surjection, $n_i \geq 1$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$. De plus, comme s est définie sur $[\![1,4]\!]$: $n_1 + n_2 + n_3 = 4$. Il existe donc un unique élément $k \in [\![1,3]\!]$ qui a deux antécédents par s ; tous les autres éléments éléments de $[\![1,3]\!]$ étant l'image d'un unique élément de $[\![1,4]\!]$. s est donc entièrement déterminée par :
 (a) Le choix de l'élément $k \in [\![1,3]\!]$ tel que k a deux antécédents par s : 3 possibilités,
 (b) Une fois choisi k, le choix des deux éléments de $[\![1,4]\!]$ d'image k par s : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,
 (c) Une fois choisis ces deux éléments, le choix de l'image du premier élément restant dans $[\![1,4]\!]$, parmi les 2 entiers différents de k dans $[\![1,3]\!]$: 2 possibilités,
 (d) L'image du dernier élément restant dans $[\![1,4]\!]$ étant alors le dernier entier restant dans $[\![1,3]\!]$

 Au total, il y a donc $3 \times 6 \times 2 = 36$ surjections de $[\![1,4]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$.
2. Soit s une surjection de $[\![1,6]\!]$ dans $[\![1,4]\!]$. De deux choses l'une :
 (a) Il existe un élément $k \in [\![1,4]\!]$ qui a trois antécédents par s. Dans ce cas s est donc entièrement déterminée par :
 i. Le choix de l'élément $k \in [\![1,4]\!]$ qui a trois antécédents par s : 4 possibilités,
 ii. Une fois choisi k, le choix des trois éléments de $[\![1,6]\!]$ d'image k par s : $\binom{6}{3} = 20$ possibilités,
 iii. Une fois choisis ces trois éléments, le choix de l'image ℓ du premier élément restant dans $[\![1,6]\!]$, parmi les 3 entiers différents de k dans $[\![1,4]\!]$: 3 possibilités,
 iv. puis le choix de l'image du deuxième élément restant dans $[\![1,6]\!]$, parmi les 2 entiers différents de k et ℓ dans $[\![1,4]\!]$: 2 possibilités,
 v. L'image du dernier élément restant dans $[\![1,6]\!]$ étant alors le dernier entier restant dans $[\![1,4]\!]$

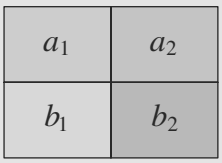
 Au total, il y a donc $4 \times 20 \times 3 \times 2 = 480$ surjections telles qu'il existe un élément $k \in [\![1,4]\!]$ qui a trois antécédents par s.
 (b) Il existe deux éléments $k < \ell$ dans $[\![1,4]\!]$ tel que k et ℓ ont deux antécédents par s. Dans ce cas s est donc entièrement déterminée par :
 i. Le choix des deux éléments $k < \ell$ dans $[\![1,4]\!]$ tels que k et ℓ ont deux antécédents par s. : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,
 ii. puis le choix des deux éléments de $[\![1,6]\!]$ d'image k par s : $\binom{6}{2} = 15$ possibilités,
 iii. puis le choix des deux éléments parmi les 4 éléments restants de $[\![1,6]\!]$ d'image ℓ par s : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,
 iv. puis le choix de l'image du premier élément restant dans $[\![1,6]\!]$, parmi les 2 entiers différents de k et ℓ dans $[\![1,4]\!]$: 2 possibilités,
 v. l'image du dernier élément restant dans $[\![1,6]\!]$ étant alors le dernier entier restant dans $[\![1,4]\!]$

 Au total, il y a donc $6 \times 15 \times 6 \times 2 = 1080$ surjections telles qu'il existe deux élément $k < \ell$ dans $[\![1,4]\!]$ qui ont deux antécédents par s.

 Les deux cas (a) et (b) induisent des situations disjointes, donc le cardinal cherché s'obtient en additionnant les cardinaux trouvés. Au total, il y a donc $480 + 1080 = 1560$ surjections de $[\![1,6]\!]$ dans $[\![1,4]\!]$.

21.16

1. Notons a_1, a_2, b_1 et b_2 les quatre carreaux d'un drapeau à 2 lignes et 2 colonnes :



 Pour colorier le drapeau :
 (a) nous pouvons commencer par colorier a_1 : n couleurs possibles,
 (b) puis nous pouvons colorier b_1 avec l'une des $n-1$ couleurs différentes de celle de a_1,
 (c) puis nous pouvons colorier a_2.
 i. si nous choisissons l'une des $n-2$ couleurs différentes de celle de a_1 et de b_1, nous pouvons colorier b_2 avec l'une des $n-2$ couleurs différentes de celle de a_2 et b_1,
 ii. si nous choisissons la couleur de b_1, nous pouvons colorier b_2 avec l'une des $n-1$ couleurs différentes de celle de a_2,

 ce qui fait $(n-2)^2 + (n-1)$ possibilités.

 Au total, il y a :

$$\begin{aligned} N &= n(n-1)\left((n-2)^2 + (n-1)\right) \\ &= n(n-1)\left(n^2 - 3n + 3\right) \end{aligned}$$

 façons de colorier un drapeau à 2 lignes et 2 colonnes avec n couleurs.
2. Notons $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les carreaux de la première ligne, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ les carreaux de la deuxième ligne d'un drapeau à 2 lignes et k colonnes

a_1	a_2		a_ℓ	$a_{\ell+1}$
b_1	b_2		b_ℓ	$b_{\ell+1}$

Pour colorier le drapeau, nous pouvons commencer par colorier la première colonne :

(a) nous pouvons commencer par colorier a_1 : n couleurs possibles,

(b) puis nous pouvons colorier b_1 avec l'une des $n-1$ couleurs différentes de celle de a_1,

soit $n(n-1)$ possibilités pour la première colonne.

Une fois coloriées les ℓ premières colonnes, nous pouvons colorier $a_{\ell+1}$:

(a) si nous choisissons l'une des $n-2$ couleurs différentes de celle de a_ℓ et de b_ℓ, nous pouvons colorier $b_{\ell+1}$ avec l'une des $n-2$ couleurs différentes de celle de $a_{\ell+1}$ et b_ℓ,

(b) si nous choisissons la couleur de b_ℓ, nous pouvons colorier $b_{\ell+1}$ avec l'une des $n-1$ couleurs différentes de celle de b_ℓ,

ce qui fait $(n-2)^2+(n-1)$ possibilités pour colorier la $\ell+1$-ième colonne.

Au total, il y a :

$$N = \underbrace{n(n-1)}_{\text{colonne 1}}\underbrace{\Big((n-2)^2+(n-1)\Big)^{k-1}}_{\text{colonne 2 à } k}$$
$$= n(n-1)\Big(n^2-3n+3\Big)^{k-1}$$

façons de colorier un drapeau à 2 lignes et k colonnes avec n couleurs.

21.17

1. Il existe une unique façon de paver Q_1 :



Donc $u_1 = 1$.

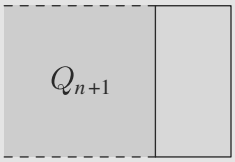
Il existe deux façons de paver Q_2 :



Donc $u_2 = 2$.

2. Pour paver Q_{n+2}, observons la dernière colonne de Q_{n+2}. Il y a deux possibilités exclusives :

(a) La dernière colonne est pavée par un domino posé verticalement.



Dans ce cas, le pavage de Q_{n+2} se déduit du pavage de Q_{n+1} auquel on a accolé un domino posé verticalement : u_{n+1} possibilités,

(b) La dernière colonne est pavée par deux dominos posés horizontalement.



Dans ce cas, le pavage de Q_{n+2} se déduit du pavage de Q_n auquel on a accolé deux dominos posés horizontalement : u_n possibilités,

Au total :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Notons que, si on pose $u_0 = 1$:

$$u_2 = 2 = 1 + 1 = u_0 + u_1$$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est (E) : $r^2 - r - 1 = 0$. Le discriminant de (E) est : $\Delta = 1+4 = 5$. Donc (E) admet deux solutions réelles distinctes :

$$\rho_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Nous savons que $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc a et b sont solutions du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

En regroupant les termes en $\sqrt{5}$ dans la seconde équation, le système est équivalent aux systèmes successifs :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ \dfrac{a+b}{2}+\sqrt{5}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ \sqrt{5}\,(a-b)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

En faisant la somme puis la différence des deux identités, on élimine b ou a et on obtient :

$$\begin{cases} 2a=1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ 2b=1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Donc :

$$u_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}\right]$$

Nous pouvons développer par la formule du binôme, en remarquant que les puissances paires de $\sqrt{5}$ s'éliminent et que les puissances impaires s'additionnent :

$$u_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(2\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\text{ tel que}\\ 0\leq 2k+1\leq n+1}}\binom{n+1}{2k+1}\sqrt{5}^{2k+1}\right)$$

qui se simplifie :

$$u_n=\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\text{ tel que}\\ 0\leq 2k+1\leq n+1}}\binom{n+1}{2k+1}5^k$$

21.18

1. Une main de 8 cartes contenant 2 cœurs et 6 piques est entièrement déterminée par :
 (a) le choix de 2 cœurs parmi les 13 cœurs : $\binom{13}{2}$ possibilités,
 (b) le choix de 6 piques parmi les 13 piques : $\binom{13}{6}$ possibilités,

 Il y a donc $\binom{13}{2}\binom{13}{6}$ mains de 8 cartes contenant 2 cœurs et 6 piques.

2. Une main de 8 cartes contenant 2 cartes d'une première couleur C_1 et 6 d'une deuxième couleur $C_2 \neq C_1$ est entièrement déterminée :
 (a) par le choix de la couleur C_1 : 4 possibilités,
 (b) par le choix de la couleur C_2 : 3 possibilités,
 (c) le choix de 2 cartes parmi les 13 cartes de la couleur C_1 : $\binom{13}{2}$ possibilités,
 (d) le choix de 6 cartes parmi les 13 cartes de la couleur C_2 : $\binom{13}{6}$ possibilités,

 Il y a donc $12\binom{13}{2}\binom{13}{6}$ mains de 8 cartes contenant 2 cartes d'une couleur et 6 d'une autre.

3. Pour énumérer les mains de 8 cartes contenant les 4 couleurs, énumérons les mains complémentaires avec la formule du crible.
 Soit M_1 l'ensemble des mains qui ne contiennent pas de pique, M_2 l'ensemble des mains qui ne contiennent pas de cœur, M_3 l'ensemble des mains qui ne contiennent pas de trèfle et M_4 l'ensemble des mains qui ne contiennent pas de carreau :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4) &= \sum_{1\leq i\leq 4}\operatorname{card}(M_i) \\ &\quad-\sum_{1\leq i<j\leq 4}\operatorname{card}\left(M_i\cap M_j\right) \\ &\quad+\sum_{1\leq i<j<k\leq 4}\operatorname{card}\left(M_i\cap M_j\cap M_k\right) \\ &\quad-\operatorname{card}(M_1\cap M_2\cap M_3\cap M_4)\end{aligned}$$

 (a) Si on fixe une couleur, une main qui ne contient pas cette couleur est uniquement déterminée par le choix de 8 cartes parmi les 39 d'une couleur différente, donc pour tout i :

$$\operatorname{card}(M_i)=\binom{39}{8}$$

 (b) Si on fixe deux couleurs $i<j$, une main qui ne contient pas ces deux couleurs est uniquement déterminée par le choix de 8 cartes parmi les 26 d'une des deux couleurs restantes, donc pour tout $i<j$:

$$\operatorname{card}\left(M_i\cap M_j\right)=\binom{26}{8}$$

 (c) Si on fixe trois couleurs $i<j<k$, une main qui ne contient pas ces trois couleurs est uniquement déterminée par le choix de 8 cartes parmi les 13 de la couleur restante, donc pour tout $i<j<k$:

$$\operatorname{card}\left(M_i\cap M_j\cap M_k\right)=\binom{13}{8}$$

(d) Enfin, il n'existe pas de main contenant ni carreau, ni cœur, ni pique, ni trèfle.

Nous en déduisons, d'après la formule du crible :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4) &= \underbrace{\sum_{1\le i\le 4} \operatorname{card}(M_i)}_{4 \text{ termes}} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{1\le i<j\le 4} \operatorname{card}\left(M_i \cap M_j\right)}_{\binom{4}{2}=6 \text{ termes}} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{1\le i<j<k\le 4} \operatorname{card}\left(M_i \cap M_j \cap M_k\right)}_{\binom{4}{3}=4 \text{ termes}} \\ &= 4\binom{39}{8} - 6\binom{26}{8} + 4\binom{13}{8}\end{aligned}$$

Il y a $\binom{52}{8}$ mains de 8 cartes dans un jeu de 52 cartes, donc il y a :

$$\binom{52}{8} - 4\binom{39}{8} + 6\binom{26}{8} - 4\binom{13}{8}$$

mains de 8 cartes contenant les 4 couleurs.

21.19

1. Nous rangeons r boules numérotées de 1 à r dans n tiroirs numérotés de 1 à n, chaque tiroir pouvant contenir au plus une boule.

 À chaque rangement possible est associée une r-liste sans répétition à valeur dans $[\![1, n]\!]$, le k-ième élément de la liste étant le numéro du tiroir où est rangé la boule numéro k.

 Il y a donc $\mathcal{A}_n^r$ rangements possibles de r boules discernables dans n tiroirs discernables, chaque tiroir pouvant contenir au plus une boule.

2. Nous rangeons r boules indiscernable dans n tiroirs numérotés de 1 à n, chaque tiroir pouvant contenir au plus une boule.

 À chaque rangement possible est associé l'ensemble des tiroirs qui contiennent une boule. Chaque rangement est donc caractérisé par une partie à r éléments parmi les n tiroirs.

 Il y a donc $\binom{n}{r}$ rangements possibles de r boules indiscernables dans n tiroirs discernables, chaque tiroir pouvant contenir au plus une boule.

3. Nous rangeons r boules numérotées de 1 à r dans n tiroirs numérotés de 1 à n, chaque tiroir pouvant contenir jusqu'à la totalité des boules.

 À chaque rangement possible est associée une r-liste (avec répétition possible) à valeur dans $[\![1, n]\!]$, le k-ième élément de la liste étant le numéro du tiroir où est rangé la boule numéro k.

 Il y a donc n^r rangements possibles de r boules discernables dans n tiroirs discernables, chaque tiroir pouvant contenir jusqu'à la totalité des boules.

4. Nous rangeons r boules indiscernables dans n tiroirs, numérotées de 1 à n, qui peuvent contenir chacun la totalité des boules.

 Déposons successivement le contenu de chaque tiroir sur des emplacements numérotés, en commençant par l'emplacement numéro 1, en ménageant un emplacement vide avant de poser le contenu (éventuellement vide) de chaque tiroir. En notant T pour chaque emplacement vide, B pour chaque boule déposée, on représente chaque répartition possible par une liste de la forme :

 $$\overbrace{T\underbrace{B\ldots B}_{p_1 \text{ termes}}}^{\text{tiroir 1}}\overbrace{T\underbrace{B\ldots B}_{p_2 \text{ termes}}}^{\text{tiroir 2}}\ldots\ldots\ldots\overbrace{T\underbrace{B\ldots B}_{p_n \text{ termes}}}^{\text{tiroir } n}$$

 où p_k est le nombre de boules dans le k-ième tiroir.

 Nous obtenons ainsi une $n + r$-liste (avec répétition) à valeur dans $\{B, T\}$ dont le premier élément est T, qui contient n fois la valeur T et r fois la valeur B. Une telle suite est entièrement déterminée par le choix des positions des r valeur égales à B : ces r positions sont choisies parmi les $n + r - 1$ positions de 2 à $n + r$.

 Il y a donc $\binom{n+r-1}{r}$ rangements possibles de r boules indiscernables dans n tiroirs discernables, chaque tiroir pouvant contenir jusqu'à la totalité des boules.

21.20

On effectue n tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.

1. Pour qu'une boule donnée B_i soit prélevée exactement k fois,
 (a) il faut choisir les k instants (parmi les n tirages) où B_i est prélevée : $\binom{n}{k}$ possibilités,
 (b) pour les $n - k$ tirages restants, il faut choisir une boule différente de B_i, soit $N - 1$ possibilités à chacun des $n - k$ tirages.

 Au total, il y a donc $\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}$ tirages possibles où une boule donnée B_i est prélevée exactement k fois.

2. Pour qu'une boule donnée B_i soit prélevée exactement m fois au cours des r premiers tirages :
 (a) il faut choisir les m instants (parmi les r premiers tirages) où B_i est prélevée : $\binom{r}{m}$ possibilités,
 (b) pour les $r - m$ premiers tirages restants, il faut choisir une boule différente de B_i, soit $N - 1$ possibilités à chacun des $r - m$ tirages.
 (c) pour les $n - r$ derniers tirages, on peut choisir n'importe laquelle des N boules, soit N possibilités à chacun de ces $n - r$ tirages.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Au total, il y a donc $\binom{r}{m}(N-1)^{r-m}N^{n-r}$ tirages possibles pour lesquels une boule donnée B_i est prélevée exactement m fois au cours des r premiers tirages.

3. Pour qu'une boule donnée B_i soit prélevée pour la s-ième fois au r-ième tirage :
 (a) il faut choisir les $s-1$ instants (parmi les $r-1$ premiers tirages) où B_i est prélevée : $\binom{r-1}{s-1}$ possibilités,
 (b) pour les $r-s$ tirages restants entre le premier et le $r-1$-ième, il faut choisir une boule différente de B_i, soit $N-1$ possibilités à chacun des $r-s$ tirages.
 (c) on prélève B_i au r-ième tirage,
 (d) pour les $n-r$ derniers tirages, on peut choisir n'importe laquelle des N boules, soit N possibilités à chacun de ces $n-r$ tirages.

 Au total, il y a donc $\binom{r-1}{s-1}(N-1)^{r-s}N^{n-r}$ tirages possibles pour lesquels une boule donnée B_i est prélevée pour la s-ième fois au r-ième tirage.

21.21

Soient n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$.

1. Lorsque $n \geq p \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$ et $p! = p \times (p-1)!$ Utilisons la formule donnant les coefficients binomiaux en fonction des factorielles :

$$p\binom{n}{p} = \frac{p\,(n!)}{p!(n-p)!} = \frac{pn \times (n-1)!}{p \times (p-1)!((n-1)-(p-1))!}$$

 En simplifiant par p et en factorisant par n :

$$p\binom{n}{p} = n\left(\frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}\right) = n\binom{n-1}{p-1}$$

 Remarque : l'identité que nous avons démontrée est un cas particulier de la formule du double produit binomial $\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ *lorsque* $k = 1$.

2. Nous pouvons calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$$

 En factorisant par n et en posant $\ell = k-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}$$

 D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}1^{\ell}1^{(n-1)-\ell}}_{(1+1)^{n-1}} = n2^{n-1}$$

21.22

1. Un bureau comprenant j hommes et $a-j$ femmes est entièrement déterminé :
 (a) par le choix de j hommes parmi les n hommes de l'assemblée,
 (b) par le choix de $a-j$ femmes parmi les p femmes de l'assemblée,

 Il y a donc $\binom{n}{j}\binom{p}{a-j}$ bureaux possibles comprenant j hommes et $a-j$ femmes, avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$: si $j > n$ ou si $a - j < 0$, il n'y a aucun bureau possible comprenant j hommes et $a-j$ femmes.

2. Le nombre total de bureaux possibles est égal au nombre de choix de a personnes parmi les $n+p$ personnes de l'assemblée : il y a donc $\binom{n+p}{a}$ possibilités. En décomposant suivant le nombre j d'hommes possibles (qui varie entre 0 et n) :

$$\sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j}\binom{p}{a-j}}_{j \text{ hommes et } a-j \text{ femmes}} = \binom{n+p}{a}$$

3. Dans l'exercice 20, nous avons démontré, lorsque $p \geq 1$:

$$p\binom{m}{p} = m\binom{m-1}{p-1}$$

 Lorsque $i \geq 1$, pour $p = i$ et $m = n$ nous en déduisons :

$$i(i-1)\binom{n}{i} = (i-1)\underbrace{\left[i\binom{n}{i}\right]}_{n\binom{n-1}{i-1}} = n\left[(i-1)\binom{n-1}{i-1}\right]$$

 Lorsque $i \geq 2$, pour $p = i-1$ et $m = n-1$:

$$(i-1)\binom{n-1}{i-1} = (n-1)\binom{n-2}{i-2}$$

 Donc :

$$i(i-1)\binom{n}{i} = n(n-1)\binom{n-2}{i-2}$$

 Remarque : en divisant par 2*, on retrouve un cas particulier de la formule du double produit binomial :*

$$\binom{i}{2}\binom{n}{i} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{i-2}$$

 Nous pouvons calculer la somme :

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}^2 = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

en notant que les termes $i = 0$ et $i = 1$ sont nuls, et en remarquant que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}^2 = \sum_{i=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{i-2}\binom{n}{n-i}$$

Nous pouvons factoriser par $n(n-1)$:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}^2 = n(n-1)\sum_{i=2}^{n}\binom{n-2}{i-2}\binom{n}{n-i}$$

En posant $j = n - i$, $p = n - 2$ et $a = n - 2$:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}^2 = n(n-1)\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{a-j}\binom{n}{j}$$

D'après la question 2 :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}^2 &= n(n-1)\binom{n+p}{a} \\ &= n(n-1)\binom{2n-2}{n-2}\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Statistiques

CHAPITRE 22

Plan

22.1 Cadre mathématique 582
22.2 Représentation graphique 583
22.3 Caractéristiques de position 585
22.4 Caractéristiques de dispersion 589
Synthèse 590

Objectifs

- Définir les notions élémentaires de statistiques : fréquence, moyenne, médiane...
- Savoir résumer une série statistique par une représentation graphique et par ses caractéristiques de position (moyenne, médiane) et de dispersion (écart-type, quartiles)
- Dans l'optique de l'utilisation pratique des statistiques, comprendre les pièges liés au choix des indicateurs statistiques.

Prérequis

Aucun.

Les études statistiques sont basées sur l'observation de *caractères* d'une *population* composée d'*individus*. L'art du statisticien consiste à recueillir des données, puis à les dépouiller de façon à résumer par un petit nombre de graphiques et de paramètres l'information contenue dans la *série statistique* des données relevées. Avant de détailler le traitement purement mathématique des données statistiques, nous souhaitons adresser deux mises en gardes aux lecteurs sur deux problèmes pratiques auxquels sont confrontés les statisticiens :

1. *Recueil des données statistiques*

 La pertinence d'une étude statistique dépend en premier lieu de la méthodologie utilisée pour recueillir les informations statistiques. Nous pouvons l'illustrer par un exemple historique, célèbre pour marquer symboliquement la naissance des instituts de sondage modernes.

 Lors de l'élection présidentielle américaine de 1936, le magazine *Literary Digest* mena un sondage grandeur nature comme il l'avait déjà fait avec succès pour chaque élection présidentielle depuis 1920. Le magazine avait envoyé un bulletin de vote à 10 millions d'américains, et reçu plus de 2,3 millions de réponses qui prédirent une large victoire du candidat républicain Alf Landon, qui recueillait 55% des votes reçus par le magazine contre 41% au président sortant, le démocrate Franklin Roosevelt. Le résultat des élections démentit de manière cinglante les prédictions du magazine, puisque Roosevelt l'emporta largement avec 61% des votes contre 37%, sur quelques 44 millions de suffrages exprimés. À l'opposé,

l'institut Gallup avait prédit une victoire de Roosevelt avec 56% des votes contre 44%, par un sondage restreint à quelque 3 à 5 000 personnes, mais mené suivant les principes nettement plus rigoureux de la *méthode des quotas*.

2. *Interprétation des données statistiques*

Lorsque vous serez amenés à présenter ou à prendre connaissance des résultats d'un étude statistique, prenez la peine d'exercer votre sens critique et ne vous laissez pas abuser par un résumé rapide de quelques chiffres. Nous allons illustrer cette difficulté avec l'exemple des statistiques sur les revenus.

L'Institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) publie des statistiques sur les revenus fiscaux des ménages français. Les résultats de l'année 2004 sont résumés dans le tableau 22.1, qui précise les différents *déciles* de la distribution des revenus, où le décile D_n est le revenu annuel tel que n ménages sur 10 ont un revenu fiscal inférieur à D_n, et le reste un revenu supérieur à D_n.

Tranche	Limite supérieure de tranche (décile)	Revenu moyen
$\leq D_1$	9 400	4 970
D_1 à D_2	13 680	11 730
D_2 à D_3	17 040	15 350
D_3 à D_4	20 780	18 850
D_4 à D_5	24 860	22 780
D_5 à D_6	29 540	27 160
D_6 à D_7	34 800	32 100
D_7 à D_8	42 110	38 190
D_8 à D_9	54 920	47 800
$\geq D_9$		86 260

Tableau 22.1 Caractéristiques de la distribution des revenus fiscaux des ménages français en 2004 en euros.

On a coutume de résumer l'information extraite d'un tel tableau en calculant le revenu moyen des français. Il s'agit ici de la moyenne des revenus moyens de chaque classe, c'est à dire :

$$\overline{r} = 32\,519€$$

D'aucuns préfèrent mettre en avant le revenu *médian* des ménages, c'est à dire le revenu R_m qui divise l'ensemble des ménages en deux moitiés égales : 50% d'entre eux ayant un revenu inférieur au revenu médian, et 50% d'entre eux ayant un revenu supérieur au revenu médian. Dans le cas qui nous intéresse, le revenu médian est égal au cinquième décile, c'est à dire :

$$R_m = 24\,860€$$

Une lecture des données de l'INSEE basée sur l'un ou l'autre des indicateurs prend un sens assez nettement différent : ainsi, un ménage dont le revenu est égal au revenu moyen a-t-il un revenu supérieur d'un tiers au revenu médian… De plus, on peut estimer que près de 65% des ménages ont un revenu inférieur au revenu moyen !

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

22.1 Cadre mathématique

Une étude statistique porte sur une **population**, c'est à dire un ensemble fini Ω, dont on étudie un ou plusieurs **caractères**. Un **caractère** est une application X de Ω dans un ensemble E. X est un caractère **quantitatif** s'il est à valeurs dans $\mathbb{R}$, **qualitatif** sinon. Un élément de Ω est appelé **individu**.

Une série statistique est donnée par l'observation de X sur un échantillon de la population, c'est à dire la restriction de X à un sous ensemble $\mathcal{A}$ de Ω. Elle est donnée :

- dans le cas discret :
 - soit par une **distribution groupée**, c'est à dire par une suite de couples (x_i, n_i), où $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ sont les **modalités** du caractère et n_i le nombre de fois où X prend la valeur x_i dans l'échantillon $\mathcal{A}$.
 - soit par une **distribution non groupée** c'est à dire une suite $(x_1, \ldots, x_n)$ où x_i désigne la valeur de X pour le i-ème individu de la population Ω. En modifiant éventuellement l'ordre des individus, on peut supposer $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.
- dans le cas continu, par une suite de couples $([a_i, a_{i+1}[, n_i)$, où $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ et n_i le nombre de fois où la valeur de X appartient à la **classe** $[a_i, a_{i+1}[$ dans l'échantillon $\mathcal{A}$.

Dans l'exemple d'un sondage comme les sondages Gallup, l'échantillon $\mathcal{A}$ est couramment constitué d'un millier de personnes ; au contraire les données sur les revenus fiscaux de l'étude de l'INSEE, peuvent s'appuyer sur la collecte exhaustive des déclarations d'impôts des français, pour lequel l'échantillon $\mathcal{A}$ est confondu avec la population Ω.

Définition – Effectifs, fréquence

1. L'**effectif** de la valeur x_i (respectivement de la classe $[a_i, a_{i+1}[$) est le nombre d'éléments de la populations pour lequel le caractère X prend la valeur x_i (respectivement : appartient à la classe $[a_i, a_{i+1}[$)

$$n_i = \text{card}\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) = x_i\right\}$$

$$\left(\text{resp. } n_i = \text{card}\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) \in [a_i, a_{i+1}[\right\}\right)$$

2. La **fréquence** de la valeur x_i (respectivement de la classe $[a_i, a_{i+1}[$) est :

$$f_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\text{card}\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) = x_i\right\}}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où on a noté $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

3. La **fréquence cumulée** de la valeur x_i (respectivement de la classe $[a_i, a_{i+1}[$) est :

$$F_i = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_i}{n} = \frac{\text{card}\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) \leq x_i\right\}}{\text{card}\,(\Omega)}$$

Remarque – La somme des fréquences est : $\sum_{i=1}^{p} f_i = 1$.

Exemple – Pyramide des âges

Le tableau 22.2 décrit la pyramide des âges en France au 1 janvier 2010. Les chiffres disponibles sur le site de l'INSEE sont précisés par année et par sexe ; ils sont regroupés ici par décennies, sans distinction de sexe.

Naissance	Effectif	Fréquence	Fréquence cumulée
2000 à 2009	8 027 605	12,41%	12,41%
1990 à 1999	7 915 290	12,24%	24,65%
1980 à 1989	8 194 108	12,67%	37,32%
1970 à 1979	8 408 341	13,00%	50,33%
1960 à 1969	8 989 361	13,90%	64,23%
1950 à 1959	8 488 298	13,13%	77,35%
1940 à 1949	6 496 666	10,05%	87,40%
1930 à 1939	4 755 589	7,35%	94,75%
1920 à 1929	2 958 737	4,58%	99,33%
1910 à 1919	417 920	0,65%	99,98%
1909 et avant	15 459	0,02%	100,00%

Tableau 22.2 Pyramide des âges en France au 01/01/2010

Ainsi, si nous lisons la cinquième ligne du tableau, au 1 janvier 2010, un *effectif* de 8 989 361 personnes étaient âgées de 40 à 49 ans (nées entre 1960 et 1969), soit une *fréquence* de 13,90% de la population ; l'ensemble des personnes âgées de moins de 49 ans représentant une *fréquence cumulée* de 64,23% de la population totale de la France.

22.2 Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une série statistique :

1. Dans le cas discret, par un *diagramme en bâtons* ; dans lequel la hauteur du bâton d'abscisse x_i est égal à l'effectif de x_i,
2. Dans le cas continu, par un *histogramme* dans lequel l'aire du rectangle de base $[a_i, a_{i+1}[$ est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.

Exemple – Composition des familles

La composition des familles (au sens de l'INSEE) en France selon le nombre d'enfants en 2007 était la suivante :

Nombre d'enfants	Effectif	
	en milliers	en %
Sans enfant	8 296,2	47,4
1 enfant	3 933,0	22,5
2 enfants	3 547,0	20,3
3 enfants	1 293,0	7,4
4 enfants ou plus	431,4	2,5
Ensemble des familles	17 500,6	100,0

Tableau 22.3 Composition des familles selon le nombre d'enfants en 2007

On peut représenter cette série statistique par le diagramme en bâtons de la figure 22.1 page 584.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

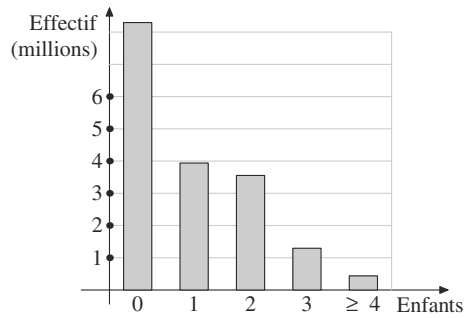


Figure 22.1 Composition des familles selon le nombre d'enfants en 2007

Exemple – Histogramme de la pyramide des âges

La pyramide des âges en France au 1 janvier 2010, donnée par le tableau 22.2 page 583, peut se représenter par l'histogramme de la figure 22.2 page 584.

De façon traditionnelle, la pyramide des âges est représenté par un histogramme tourné de 90°, qui distingue à gauche l'histogramme de la population masculine et à droite celui de la population féminine. Avec les chiffres disponibles sur le site de l'INSEE, en distinguant par année et par sexe, on dessine le double histogramme classique de la figure 22.4 page 585.

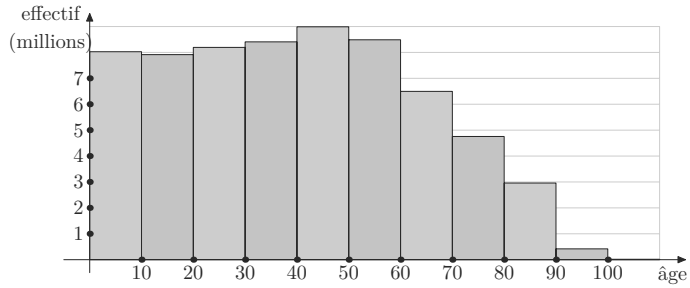


Figure 22.2 Pyramide des âges en France au 01/01/2010

Exemple – Histogramme du revenu des français

Le revenu fiscal des ménages français en 2004 détaillé par déciles dans le tableau 22.1 page 581 peut se représenter par l'histogramme de la figure 22.3 page 584.

Dans cet exemple, les classes n'ont pas toutes la même amplitude, et correspondent chacunes au même effectif (soit 10% de la population) : les différents rectangles de l'histogramme ont tous la même aire.

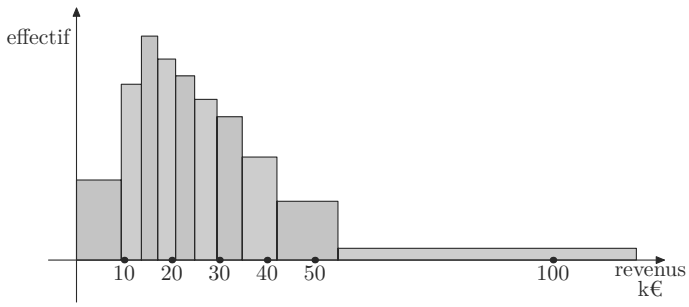


Figure 22.3 Revenu fiscal des ménages français en 2004

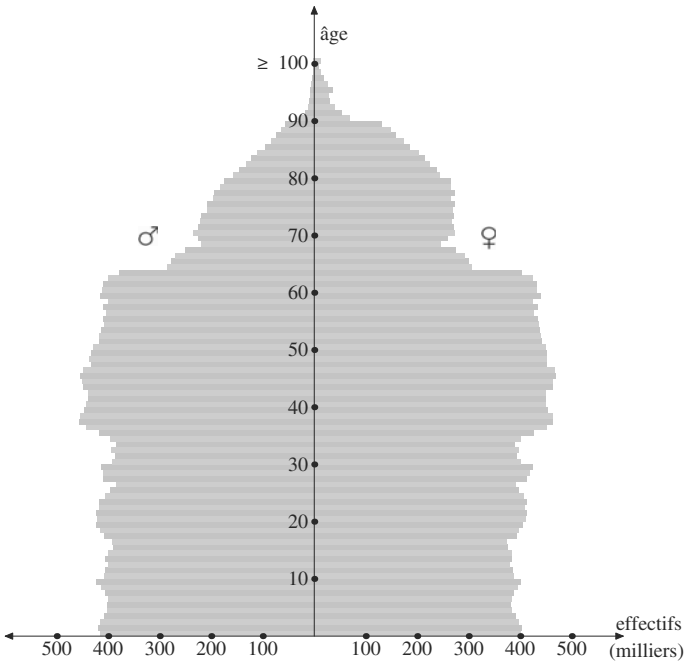


Figure 22.4 Pyramide des âges en France au 01/01/2010

22.3 Caractéristiques de position

Pour caractériser une série statistique, on peut rechercher une ou plusieurs valeurs qui résument au mieux la série, par exemple :

- une valeur dont l'effectif est maximal,
- une valeur qui minimise l'écart-moyen entre les valeurs observées et la position moyenne. Par exemple, on peut chercher une valeur x qui minimise l'écart moyen :

$$\sum_{i=1}^{p} f_i \, |x - x_i|$$

ou l'écart quadratique moyen :

$$\sum_{i=1}^{p} f_i \, |x - x_i|^2$$

Définition – Mode d'une série statistisque
Si X est une série statistique discrète, un **mode** de la série statisitique est une valeur x dont l'effectif est maximal. Si X est une série continue, une **classe modale** de la série statisitique est une classe $[a_i, a_{i+1}[$ pour laquelle la hauteur sur l'histogramme est maximale.

Définition – Moyenne d'une série statistique
Si X est une série statistique discrète, la **moyenne** $\overline{x}$ de la série est :

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Si X est une série continue, on se ramène au cas discret en associant à chaque classe son milieu, et la moyenne $\overline{x}$ est :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) = \sum_{i=1}^{p} f_i\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$$

Propriété – Écart quadratique et moyenne
La moyenne minimise l'écart quadratique moyen :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - \overline{x})^2 = \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - x)^2\right)$$

Définition – Médiane d'une série statistique discrète
Si X est une série statistique discrète, une **médiane** m_e de la série est une valeur qui sépare la série en deux parties d'effectifs égaux :

- $X \geq m_e$ pour 50% ou plus des effectifs,
- $X \leq m_e$ pour 50% ou plus des effectifs,

L'ensemble des médianes est soit réduit à un point, soit égal à un intervalle. Lorsque l'ensemble des médianes est un intervalle, par convention la **valeur médiane** m_e est le milieu de l'intervalle.

Définition – Fonction de répartition d'une série statistique discrète
Si X est une série statistique discrète, la **fonction de répartition** F est définie par :

$$F(x) = \frac{\text{card}\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) \leq x\right\}}{\text{card}\,(\Omega)} = \sum_{x_i \leq x} \frac{n_i}{n}$$

La fonction de répartition est une fonction en escalier, croissante, qui généralise les fréquences cumulées. En particulier : $F_i = F(x_i)$.

Propriété – Médiane d'une série ordonnée
Si X est donné sous forme d'une distribution non groupée ordonnée $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$:

- lorsque $n = 2m$ est pair, l'ensemble des médianes est l'intervalle $[x_m, x_{m+1}]$. La valeur médiane est alors
$$m_e = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$$
- lorsque $n = 2m + 1$ est impair, il y a une unique médiane :
$$m_e = x_{m+1}$$

Propriété – Médiane et écart moyen
Les médianes minimisent l'écart moyen :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\left|x_i - m_e\right| = \inf_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\left|x_i - x\right|\right)$$

Propriété – Médiane et fréquence cumulée
La médiane m_e est caractérisée par une fréquence cumulée de 50% :

$$F(m_e) = 0.5$$

où F est la fonction de répartition. Plus précisément, on a l'alternative :

- il existe i tel que $F_i = 0.5$. Dans ce cas :

$$m_e = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- il existe i tel que $F_{i-1} < 0.5 < F_i$. Dans ce cas : $m_e = x_i$.

Démonstration
Nous allons démontrer simultanément les trois propriétés que nous venons d'énoncer. Soit φ la fonction d'écart-moyen, définie par :

$$\varphi(x) = \sum_j f_j \left|x - x_j\right|$$

Si $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$\left|x - x_j\right| = \begin{cases} x - x_j & \text{si } j \leq i \\ -(x - x_j) & \text{si } j > i \end{cases}$$

Sur $[x_i, x_{i+1}]$, φ est la somme de fonctions affines de pente f_j lorsque $j \leq i$ ou $-f_j$ lorsque $j > i$. φ donc une fonction affine sur $[x_i, x_{i+1}]$, de pente :

$$a_i = \underbrace{\sum_{j \leq i} f_j}_{F_i} - \underbrace{\sum_{j > i} f_j}_{1-F_i} = 2F_i - 1$$

La pente est donc strictement négative tant que $F_i < 0.5$, nulle lorsque $F_i = 0.5$, strictement positive dès que $F_i > 0.5$. En particulier :

1. Lorsque qu'il existe i tel que $F_i = 0.5$:

$$\begin{cases} \text{si } j < i, F_j < 0.5, & a_j < 0 \text{ et } \varphi \text{ est strictement décroissante sur } [x_j, x_{j+1}] \\ \text{si } j = i, F_j = 0.5, & a_j = 0 \text{ et } \varphi \text{ est constante sur } [x_j, x_{j+1}] \\ \text{si } j > i, F_j > 0.5, & a_j > 0 \text{ et } \varphi \text{ est strictement croissante sur } [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

Le tableau de variation de φ est :

x	$-\infty$		x_i		x_{i+1}		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	0	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$		$\longrightarrow$		$\nearrow$	$+\infty$

L'écart moyen est minimum sur $[x_i, x_{i+1}]$. De plus :

(a) si $x \geq x_{i+1}$, $X \geq x$ pour moins de $1 - F_{i+1} < 50\%$ des effectifs.

(b) si $x < x_i$, $X \leq x$ pour moins de $F_{i-1} < 50\%$ des effectifs,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Les médianes sont exactement les points de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}[$: elles minimisent l'écart moyen.

Notons que, si $\text{card}(\Omega) = 2m$ est pair et si X est donnée par une distribution non groupée $x_1 \leq \cdots \leq x_{2m}$, alors $F_m = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$: l'ensemble des médianes est l'intervalle $[x_m, x_{m+1}[$

2. Lorsque qu'il existe i tel que $F_{i-1} < 0.5$ et $F_i > 0.5$:

$$\begin{cases} \text{si } j < i, F_j < 0.5, & a_j < 0 \text{ et } \varphi \text{ est strictement décroissante sur } [x_j, x_{j+1}] \\ \text{si } j \geq i, F_j > 0.5, & a_j > 0 \text{ et } \varphi \text{ est strictement croissante sur } [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

le tableau de variation de φ est :

x	$-\infty$		x_i		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		↘		↗	$+\infty$

l'écart moyen est minimum en un unique point qui est le point x_i. De plus :

(a) si $x \geq x_i$, $X \geq x$ pour moins de $1 - F_i < 50\%$ des effectifs.

(b) si $x < x_i$, $X \leq x$ pour moins de $F_{i-1} < 50\%$ des effectifs,

La médiane est alors unique, égale à x_i et minimise l'écart moyen.

Notons que, si $\text{card}(\Omega) = 2m + 1$ est impair et si X est donnée par une distribution non groupée $x_1 \leq \cdots \leq x_{2m+1}$, alors $F_m = \frac{m}{2m+1} < \frac{1}{2} < \frac{m+1}{2m+1} = F_{m+1}$: la médiane est x_{m+1}. ■

Exemple – Médiane de la composition des familles

Dans l'exemple 22.2, nous avons donné la statistique du nombre d'enfant par famille (au sens de l'INSEE). Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \sum_i f_i |x - x_i|$$

La figure 22.5 représente la graphe de la fonction φ. Nous pouvons vérifier par un calcul explicite que φ est affine par morceaux, minimale lorsque $x = 1$. La valeur médiane de la distribution est donc $m_e = 1$.

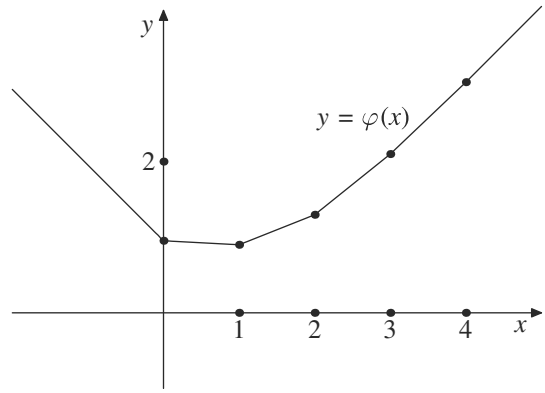


Figure 22.5 Écart moyen pour la statistique du nombre d'enfant par famille en 2007

Remarque – Choix d'une caractéristique de position
Le choix d'une ou plusieurs caractéristiques de position n'est pas neutre comme nous l'avons indiqué sur l'exemple du revenu des français illustré par le tableau 22.1. Il ne faut pas hésiter à réfléchir sérieusement à la caractéristique la plus pertinente suivant le contexte.

D'un point de vue pratique, la moyenne est plus facile à calculer que la médiane : il suffit d'additionner au fur et à mesure les résultats pour calculer la moyenne, alors qu'il faut ordonner les résultats avant d'identifier la médiane. Cela ne pose guère de problème aujourd'hui que nous disposons de moyens informatiques pour trier rapidement des données, mais vous pouvez imaginer le temps consacré à l'identification de la médiane lorsqu'il s'agissait de trier à la main quelques milliers de fiches...

22.4 Caractéristiques de dispersion

Définition – Caractéristiques de dispersion

1. La **variance empirique** (ou écart quadratique moyen) :

$$V = \sum_{i=1}^{p} f_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \overline{x})^2$$

où $\overline{x}$ est la moyenne de la série.

2. L'**écart-type empirique** $\sigma = \sqrt{V}$
3. Les **quartiles** Q_i pour $i \in [\![1, 3]\!]$ sont les solutions de : $F(Q_i) = \frac{i}{4}$
4. Les **déciles** D_i pour $i \in [\![1, 9]\!]$ sont les solutions de : $F(D_i) = \frac{i}{10}$

Remarque – Déciles, quartiles et équation $F(x) = y$
La définition de décile et de quartile est basée sur la résolution de l'équation d'inconnue x :

$$F(x) = y$$

où $y = \dfrac{i}{4}$ ou $\dfrac{i}{10}$ avec $i \in [\![1, 3]\!]$ ou $i \in [\![1, 9]\!]$ suivant les cas. Cette équation n'a pas nécessairement de solution. Plus précisément, on a l'alternative :

- Il existe i tel que $F_i = y$. Dans ce cas $F(x) = y$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$.
- Il existe i tel que $F_{i-1} < y$ et $F_i > y$.

À la différence de la médiane, il n'existe pas de convention universelle satisfaisante pour identifier les quartiles et les déciles, et les résultats peuvent varier suivant le logiciel utilisé entre x_i et x_{i+1}. Lorsque le nombre d'observation est suffisamment élevé, les différences entre conventions différentes sont généralement négligeables.

Remarque – Caractéristique de position et de dispersions associées
Pour chaque caractéristique de position, on peut associer une caractéristique de dispersion :

1. à la moyenne sont associés la variance et l'écart-type empirique,
2. à la médiane sont associés les quartiles et déciles.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – Variance empirique et variance corrigée

Dans le cours de seconde année, on distinguera la variance empirique V_e et la *variance corrigée* V_c :

$$V_c = \left(\frac{n}{n-1}\right) V_e$$

Si la série statistique est un échantillon d'une série qui suit une loi de moyenne m et de variance V, la variance empirique est un *estimateur biaisé* de V, et la variance corrigée un *estimateur sans biais* de V. Les notions d'*estimateur* et de *biais* seront définies et étudiées dans le cours de seconde année.

Synthèse

Savoirs

- Caractéristiques de positions : moyenne, médianes, modes. La moyenne minimise l'écart quadratique moyen (la valeur correspondante de l'écart quadratique est la variance), la médiane minimise l'écart moyen.
- Caractéristiques de dispersion associées : écart-type (associé à la moyenne), déciles et quartiles (associés à la médiane),
- Représentations graphiques : histogrammes, diagrammes en bâtons.

Savoir-faire

Le choix des caractéristiques de position et de dispersion a une influence importante sur l'interprétation des données statistiques. Vous pourrez en jouer lorsque vous présenterez une étude que vous aurez réalisé ; ne vous laissez pas abuser lorsque vous étudierez le résumé d'une étude statistique faite par d'autres personnes.

Espaces probabilisés finis

CHAPITRE 23

Plan

23.1 Le problème du chevalier de Méré 592
23.2 Probabilité sur un ensemble fini 593
23.3 Probabilité conditionnelle 598
23.4 Indépendance 603
Synthèse 605
Tests et exercices 606
Corrigés des exercices 609

Introduction

Les principes de base des probabilités ont été dégagés par Blaise Pascal et Pierre de Fermat, dans un échange épistolaire concernant des questions mathématiques. La lettre du 29 juillet 1654 de Pascal à Fermat, mentionne le problème du chevalier de Méré :

> *Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et je n'ai jamais pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.*
>
> *Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :*
>
> *Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.*
>
> *Si on entreprend de faire Sonnez avec deux dés*[1]*, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.*
>
> *Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).*
>
> *Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.*

Après avoir étudié le problème du chevalier de Méré, nous introduirons le vocabulaire des probabilités, en nous restreignant pour commencer aux ensembles finis. L'étude des probabilités sur les ensembles infinis pose des problèmes techniques délicats, et fera l'objet d'un chapitre spécifique.

Prérequis

- Dénombrement

Objectifs

- Définir le vocabulaire probabiliste des *événements* et comprendre le lien entre formulation probabiliste et opérations ensemblistes,
- Définir les notions de probabilités sur un ensemble fini et leur propriétés élémentaires,
- Définir les probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule de probabilités totales, formule de Bayes,
- Comprendre les paradoxes liés à la formule de Bayes,
- Définir la notion d'indépendance de plusieurs événements probabilistes.

1. Obtenir un double six

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

23.1 Le problème du chevalier de Méré

23.1.1 Premier cas : obtenir un six en quatre lancers

Décrivons avec le vocabulaire probabiliste moderne le premier problème évoqué par Pascal : *obtenir un six en quatre lancers.*

1. **Modèle :** tirage avec remise.
2. **Univers :** c'est l'ensemble des résultats observables. Ici, un résultat est une suite (n_1, n_2, n_3, n_4) où n_i est le résultat du lancer du i-ème lancer de dé. L'univers Ω est donc :
$$\Omega = [\![1, 6]\!]^4$$
Il contient : $\text{card}(\Omega) = 6^4 = 1296$ éléments.
3. **Événements :** les événements sont les parties de Ω. L'événement intéressant Pascal (succès) est l'ensemble des éléments de Ω de la forme (n_1, n_2, n_3, n_4) où l'un des n_i est égal à 6. Le complémentaire (échec) est l'ensemble des éléments de la forme (n_1, n_2, n_3, n_4) où $n_i \in [\![1, 5]\!]$ pour tout i. Il contient donc : $\text{card}(\text{échec}) = 5^4 = 625$ éléments.
En passant au complémentaire, le nombre de succès est donc :
$$\text{card}(\text{succès}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\text{échec}) = 671$$
4. **Probabilité :** les dés ne sont pas supposés pipés : nous utiliserons donc une probabilité uniforme. Si A est un événement (c'est à dire une partie de Ω),
$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$
c'est à dire : nombre de résultats favorables divisé par le nombre de résultats possibles.
La probabilité d'échec est donc : $P(\text{échec}) = \dfrac{625}{1296}$
et la probabilité de succès : $P(\text{succès}) = \dfrac{671}{1296} > \dfrac{1}{2}$

Le rapport entre la probabilité de succès et d'échec est donc bien 671 sur 625 comme l'écrit Pascal :

> *Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.*

23.1.2 Second cas : obtenir un double-six en vingt-quatre lancers

Pour fixer les idées, nous imaginons que nous lançons un dé bleu et un dé rouge.

1. **Modèle :** tirage avec remise.
2. **Univers :** Un résultat est une suite $((b_1, r_1), \ldots, (b_{24}, r_{24}))$ où b_i est le résultat du lancer du dé bleu au i-ème lancer, et r_i celui du dé rouge. L'univers Ω est donc : $\Omega = \left([\![1, 6]\!]^2\right)^{24}$
Il contient : $\text{card}(\Omega) = \left(6^2\right)^{24} = 36^{24}$ éléments.

3. **Évènements :** les événements sont les parties de Ω. L'événement intéressant Pascal (succès) est l'ensemble des éléments de Ω de la forme $((b_1, r_1), \ldots, (b_{24}, r_{24}))$ où l'un des couples (b_i, r_i) est égal à $(6, 6)$. Le complémentaire (échec) est l'ensemble des éléments de la forme $((b_1, r_1), \ldots, (b_{24}, r_{24}))$ où $(b_i, r_i) \neq (6, 6)$ pour tout i. Pour chaque lancer, on a donc 1 cas favorable (double-six) sur 36 cas possibles, donc :

$$\text{card}\,(\text{échec}) = (36 - 1)^{24} = 35^{24}$$

4. **Probabilité :** probabilité uniforme.

 La probabilité d'échec est donc : $P(\text{échec}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.5086 > \frac{1}{2}$

Ainsi, comme l'écrit Pascal :

Si on entreprend de faire Sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

23.2 Probabilité sur un ensemble fini

23.2.1 Algèbre des événements

Une **expérience aléatoire** est une expérience qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance. Par convention, nous noterons Ω l'ensemble de tous les résultats possibles, que nous appellerons **univers** des résultats possibles. Un résultat de l'expérience est appelé **événement élémentaire**. Un **événement** aléatoire (associé à l'expérience) est un sous-ensemble de l'univers Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.

Le tableau qui suit présente les correspondances entres le vocabulaire des **événements** d'une expérience aléatoire et leur modélisation par des sous-ensemble de Ω :

Événement aléatoire	Modélisation
Événement contraire à A	$\bar{A}$
A et B sont réalisés	$A \cap B$
A ou B est réalisé	$A \cup B$
La réalisation de A entraine celle de B	$A \subset B$
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
Événement certain (se réalise toujours)	Ω
Événement impossible (ne se réalise jamais)	$\emptyset$

Rappelons les propriétés élémentaires de l'intersection et de la réunion :

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Propriété – Intersections et réunions

1. L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

2. L'intersection et la réunion sont associatives :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. L'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

4. La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

5. **Formule de de Morgan :** le complémentaire d'une intersection est la réunion des complémentaires, et vice versa :

$$\overline{\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)} = \bigcup_{i \in I} \left(\overline{A}_i \right)$$
$$\overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)} = \bigcap_{i \in I} \left(\overline{A}_i \right)$$

Dans le cadre d'une expérience aléatoire modélisée par un univers Ω, l'ensemble des événements observables est stable par réunion et/ou intersection finie : $A \cup B$ correspond à l'événement : « A ou B est réalisé », $A \cap B$ à l'événement : « A et B sont réalisés simultanément ».

On dit que l'ensemble des événements est une **algèbre** dans le sens suivant :

Définition – Algèbre des événements

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathcal{A}$ un ensemble de partie de Ω. $\mathcal{A}$ est une **algèbre d'événements** sur Ω si :

1. $\mathcal{A}$ contient l'événement certain Ω,
2. L'événement complémentaire d'un événement de $\mathcal{A}$ est un événement de $\mathcal{A}$: si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. L'intersection et la réunion de deux événement de $\mathcal{A}$ est un événement de $\mathcal{A}$: si $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$,

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre d'événements sur un ensemble fini Ω, on dit que l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**.

Si Ω est un ensemble, $\mathcal{P}(\Omega)$ est un algèbre, tout comme $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Si on se fixe un ensemble arbitraire d'événements B, on peut définir **l'algèbre engendrée par** B :

Propriété – Algèbre engendré par une partie
Si B est un ensemble d'événements d'un univers Ω, l'intersection de toutes les algèbres contenant B est une algèbre qui contient B, appelée **algèbre engendrée par** B.

Définition – Système complet d'événements
Une famille finie d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** lorsque :

- Les événements sont deux à deux incompatibles :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ lorsque } i \neq j$$

- La réunion des événements est certaine :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$$

Si $\mathcal{B} = (A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements sur un univers fini Ω, l'algèbre engendrée par $\mathcal{B}$ est constituée par les réunions finies des A_j.

Exemple

Le chevalier de Méré lance 4 fois un dé. Notons V_k l'événement : « le chevalier de Méré obtient pour la première fois 6 au k-ième lancer » (victoire au k-ième lancer) et E l'événement : « le chevalier de Méré n'obtient aucun 6 à l'issue des 4 lancers. » Les événements (V_1, V_2, V_3, V_4, E) forment un système complet d'événements qui modélise l'information sur le rang du premier 6. Les événements $\left(V_1, \overline{V_1}\right)$ (respectivement $\left(E, \overline{E}\right)$) forment un système complet d'événements qui modélise l'information sur le fait d'obtenir un 6 au premier lancer (respectivement sur le fait d'obtenir un 6 parmi les 4 lancers).

23.2.2 Probabilité sur un ensemble fini

Définition – Probabilité sur un ensemble fini
Une **probabilité** P sur un ensemble fini Ω est une application définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de Ω, à valeur dans $[0, 1]$ telle que :

- P est additive : la probabilité de la réunion de deux événements incompatibles est la somme des probabilités, c'est à dire :

$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- La probabilité de l'événement certain est 1 :

$$P(\Omega) = 1$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

En pratique, une probabilité sur un ensemble fini Ω est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, l'algèbre des parties de Ω. Si $\Omega = [\![1, n]\!]$, la probabilité P est alors déterminée de façon unique par la suite $(p_k)_{1\leq k\leq n}$ définie par :

$$p_k = P(\{k\})$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Si $A \subset [\![1, n]\!]$, sa probabilité est :

$$P(A) = \sum_{k \in A} p_k$$

Une suite $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$ définit une probabilité sur $([\![1, n]\!], \mathcal{P}([\![1, n]\!]))$ si et seulement si :

1. $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite à valeurs positives ou nulles, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad p_k \geq 0$$

2. la probabilité totale vaut 1, c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Exemple – Probabilité sur un ensemble fini

Soit $n > 1$ et $\Omega = [\![1, n]\!]$. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la suite $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$ définie par :

$$p_k = \alpha k$$

définit-elle une probabilité sur $([\![1, n]\!], \mathcal{P}([\![1, n]\!]))$?

Solution

1. $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$ est à valeurs positives ou nulles lorsque $\alpha \geq 0$
2. la probabilité totale est :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} p_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} k &= \alpha \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\ = 1 &\iff \alpha = \frac{2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Exemple – Probabilité uniforme

Soit Ω un univers fini. La **probabilité uniforme** sur Ω est la probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

La probabilité d'un événement A est égale au nombre de cas favorables ($\text{card}\,(A)$) divisé par le nombre de cas possibles ($\text{card}\,(\Omega)$). En situation d'équiprobabilité, tous les événements élémentaires ont la même probabilité, égale à $\frac{1}{\text{card}(\Omega)}$, et le calcul des probabilité découle directement du dénombrement.

Exemple

Lorsque le chevalier de Méré lance deux dés équilibrés (un dé rouge et un dé vert), l'univers Ω des résultats possibles est $[\![1, 6]\!]^2$, qui contient 36 éléments et que l'on muni de la probabilité uniforme.

1. La probabilité de tirer un double 6 est égale à $\frac{1}{36}$: il y a un seul cas favorable, contre 36 cas possibles,
2. La probabilité d'obtenir un total de 7 est égale à $\frac{6}{36}$. Il y a 6 cas favorables : le chiffre rouge n_R peut varier de 1 à 6, le chiffre vert $n_V = 7 - n_R$ variant de 6 à 1.

Propriété – Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Probabilité du complémentaire d'un événement A :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

En particulier, l'événement impossible est de probabilité nulle :

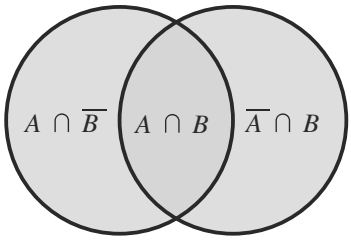
$$P(\emptyset) = 0$$

2. La probabilité est croissante (au sens de l'inclusion) : si $A \subset B$ sont deux événements de l'algèbre $\mathcal{A}$, alors $P(A) \leq P(B)$
3. La probabilité vérifie la **formule du crible**. Si A et B sont deux événements de l'algèbre $\mathcal{A}$, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration

1. Si $A \in \mathcal{A}$, nous savons que $A \cap \overline{A} = \emptyset$, donc $P(A \cap \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Comme $A \cup \overline{A} = \Omega$, nous en déduisons que : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
2. De même, si $A \subset B$: $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$ donc $P(A) \leq P(B)$.
3. On peut partitionner $A \cup B$ en trois parties disjointes : $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$ et $A \cap B$.



Puisque la probabilité est additive :

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

En ajoutant $P(A \cap B)$, nous pouvons reconnaître $P(A)$ et $P(B)$:

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = \underbrace{P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)}_{P(A)} + \underbrace{P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)}_{P(A)} \quad \blacksquare$$

La formule du crible est l'analogue probabiliste des formules du crible en dénombrement. Elle se généralise à la réunion d'un nombre fini d'événements :

Théorème – Formule du crible

Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont n événements de l'algèbre des événements d'un espace probabilisé, la probabilité de la réunion se déduit des probabilités des intersections finies par la formule du crible :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \text{card}(J)=k}} P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Cette formule peut se démontrer à partir de la formule du crible pour la réunion de 2 événements par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Elle peut également se démontrer à partir de la formule du crible sur les fonctions indicatrices, en utilisant la linéarité de l'espérance d'une variable aléatoire (définie au chapitre 24) en remarquant (comme nous le ferons dans le chapitre 24) que la probabilité d'un événement est égale à l'espérance de sa fonction indicatrice.

La formule du crible peut s'écrire sous forme dévelopée. Lorsque $n = 2$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Lorsque $n = 3$:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \underbrace{P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)}_{\text{intersections 2 à 2}} + \underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{\text{intersections 3 à 3}}$$

23.3 Probabilité conditionnelle

Définition – Probabilité conditionnelle

Si A est un événement de probabilité non nulle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La **probabilité conditionnelle sachant** A, notée P_A, est la probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par :

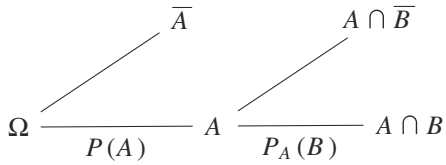
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On note parfois $P\left(B|A\right) = P_A(B)$.

Théorème – Probabilité conditionnelle

Si A est un événement de probabilité non nulle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

On représente couramment les probabilités conditionnelles par un arbre de probabilité :



Les nœuds de l'arbre sont des événements emboîtés, et on indique sous chaque branche menant d'un nœud A à un nœud $A \cap B$ la probabilité conditionnelle $P_A(B)$.

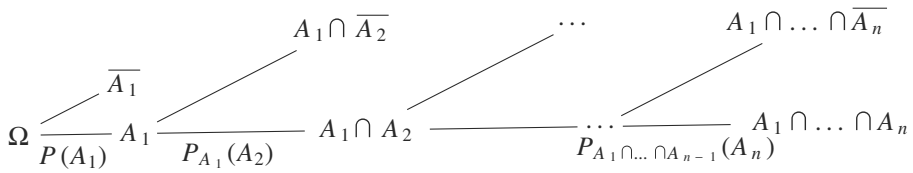
Notons que la probabilité d'un nœud $A \cap B$ se déduit des probabilités des branches menant à ce nœud :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

Si $A_1, \dots A_n$ sont n événements tels que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

on peut représenter cette situation par l'arbre de probabilité :



Théorème – Formule des probabilités composées

Dans un arbre de probabilité, pour calculer la probabilité d'un nœud, on calcule le produit des probabilités conditionnelles des branches qui mènent à ce nœud, c'est à dire : si A_1, $\dots A_n$ sont n événements tels que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

la probabilité pour que tous les événements se réalisent simultanément est :

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &\quad = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \end{aligned}$$

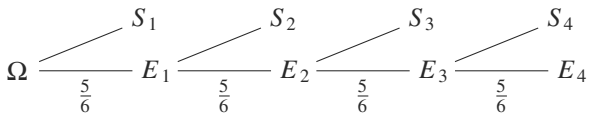
Remarque – L'hypothèse $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ nous assure que les probabilités conditionnelles sont bien définies.

Exemple

Comme le chevalier de Méré, nous entreprenons de faire un six en lançant quatre fois de suite un dé, et calculons la probabilité d'obtenir au moins un six.

Solution

1. **Modèle :** tirage avec remise.
2. **Univers :** l'ensemble des résultats possibles, c'est à dire l'ensemble des suites de 4 valeurs dans $[\![1, 6]\!]$.
$$\Omega = [\![1, 6]\!]^4$$
3. **Probabilité :** l'algèbre $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω, muni de la probabilité uniforme :
$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$
Le chevalier remporte son pari s'il a tiré au moins une fois 6 à l'issue des 4 lancers. En notant E_k l'événement : « le chevalier n'a tiré aucun 6 lors des k premiers lancers » (échec à l'issue du k-ième lancer) et S_k : « le chevalier tire pour la première fois 6 au k-ième lancer » (succès à l'issue du k-ième lancer), nous pouvons modéliser le problème par l'arbre de probabilité :



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(E_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

La probabilité de remporter le pari est donc :

$$P(\overline{E_4}) = 1 - P(E_4) = \frac{671}{1296}$$

Théorème – Formule des probabilités totales

Soit $A_1, \dots A_n$ un système complet d'événements. La probabilité totale d'un événement B se décompose :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

Lorsque $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la probabilité totale se déduit des probabilités conditionnelles :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)$$

Exemple – Tirage avec remise partielle

On tire 2 boules dans une urne contenant 3 boules noires et 3 boules blanches. Si on a tiré une ou plusieurs boules blanches, on les enlève définitivement et on remet la ou les boules noires tirées, puis on procède au tirage d'une nouvelle boule. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage ?

Solution

Notons B_k l'événement : « tirer k boules blanches au premier tirage », B l'événement : « tirer une boule blanche au deuxième tirage » et N l'événement : « tirer une boule noire au deuxième tirage ». B_0, B_1, B_2 est un système complet d'événements. Sachant B_k, l'urne contient 3 boules noires et $3 - k$ boules blanches lors du second tirage, donc :

$$P_{B_k}(B) = \frac{3-k}{6-k}$$

Le premier tirage est modélisé par un tirage simultané de 2 boules parmi les 6 boules de l'urne :

1. **Univers :** les parties à 2 éléments parmi les 6 boules de l'urne,
2. **Probabilité :** Ω est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = \binom{6}{2} = 15$.

3. L'événement B_0 est l'ensemble des parties à 2 éléments parmi les 3 boules noires de l'urne, donc $\text{card}(B_0) = \binom{3}{2} = 3$, c'est à dire :

$$P(B_0) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

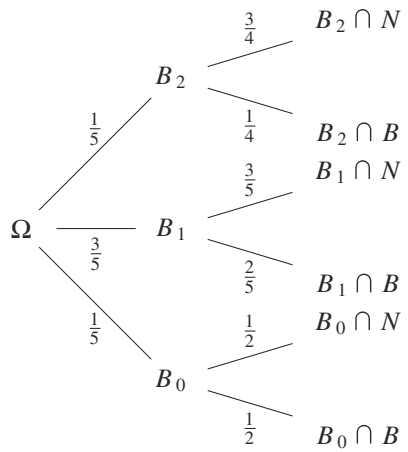
De même, l'événement B_2 est l'ensemble des parties à 2 éléments parmi les 3 boules blanches de l'urne, donc $\text{card}(B_2) = \binom{3}{2} = 3$, c'est à dire :

$$P(B_2) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Puisque B_0, B_1, B_2 est un système complet d'événements, nous en déduisons (sans dénombrer B_1 explicitement) :

$$P(B_1) = 1 - P(B_0) - P(B_2) = \frac{3}{5}$$

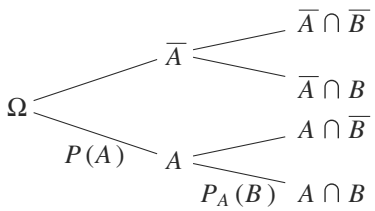
Nous pouvons résumer le problème par l'arbre de probabilité :



D'après la formule des probabilités totales :

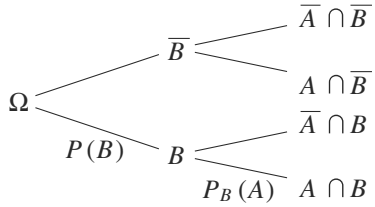
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_0 \cap B) + P(B_1 \cap B) + P(B_2 \cap B) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{39}{100} \end{aligned}$$

Lorsque l'on se donne un arbre de probabilité :



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

on peut chercher à calculer $P_B(A)$ pour obtenir l'arbre obtenu en inversant la causalité :



Les probabilités après inversion de causalité se calculent par la formule de Bayes :

Théorème – Formule de Bayes

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B se déduit de la probabilité conditionnelle de B sachant A :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Lorsque $A = A_m$ où $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilité non nulle, la formule de Bayes s'écrit :

$$P_B(A_m) = \frac{P(A_m) \times P_{A_m}(B)}{\sum_{k=0}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)}$$

La formule de Bayes permet de comprendre un paradoxe absolument stupéfiant : un test théoriquement quasiment infaillible peut échouer presque systématiquement :

Exemple – Test de dépistage

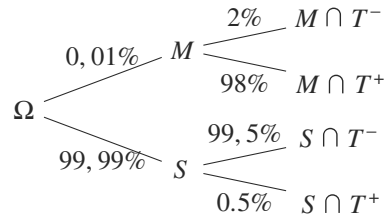
Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. Le test a une fiabilité extraordinaire de près de 99% :

1. Chez une personne saine, le test est négatif, sauf dans 0.5% des cas (faux positif),
2. Chez une personne malade, le test est positif, sauf dans 2% des cas (faux négatif),

Une étude épidémiologique indique qu'un français sur 10 000 est porteur de la maladie. Un patient subit le test : il est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit effectivement malade ?

Solution

Commençons par modéliser le problème par un arbre de probabilité. Notons S l'événement : « le patient est sain », M l'événement : « le patient est malade », T^+ l'événement : « le test est positif » et T^- l'événement : « le test est négatif ». On peut représenter les hypothèses de l'énoncé par l'arbre :



Nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(S)P_S(T^+) + P(M)P_M(T^+) \\ &= 0,9999 \times 0,005 + 0,0001 \times 0,98 \\ &= 0,0050975 \end{aligned}$$

La probabilité pour qu'il soit malade, sachant que le test est positif est donc :

$$\begin{aligned} P_{T^+}(M) &= \frac{P(M)}{P(T^+)} \\ &= \frac{P(M)P_M(T^+)}{P(T^+)} \\ &= \frac{0,0001 \times 0,98}{0,0050975} \\ &= \frac{0,98}{50,975} \simeq 2\% \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure, de façon paradoxale, que lorsque le test est positif, le patient est dans près de 98% des cas un patient sain. Bien que le test soit théoriquement quasiment infaillible, il échoue donc de façon quasiment systématique lorsqu'il annonce un résultat positif !

Ce paradoxe s'explique intuitivement de façon simple : supposons que nous pratiquons le test sur 20 000 personnes, dont 2 malades et 19 998 personnes en bonne santé. Parmi les personnes en bonne santé, 1 sur 200 sera testé positive ; soit 99, 99 personnes, chiffre que nous arrondirons à 100 personnes. Les personnes malades seront testées positives (là encore, nous arrondissons 1, 96 individu en 2). Nous aurons donc 102 tests positifs, pour deux malades. Les personnes testées positives auront donc 2 chance sur 102 d'être malade (soit environ 2%), et 100 chances sur 102 d'être en bonne santé !

23.4 Indépendance

Définition – Indépendance
Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

n événement $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si, pour tout partie I de $[\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Remarque – Pour démontrer que n événements sont mutuellement indépendants, il y a autant d'égalités à vérifier que de parties $I \subset [\![1, n]\!]$, soit 2^n égalités.

Notons que lorsque I est vide ou lorsque I est réduit à un élément, il n'y a rien à vérifier : il faut donc vérifier $2^n - n - 1$ égalités.

Propriété – Indépendance et probabilité conditionnelle
Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si la probabilité conditionnelle de A sachant B est égale à la probabilité de A : $P_B(A) = P(A)$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

La notion d'indépendance peut s'avérer subtile : ainsi, des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants :

Exemple – Indépendance mutuelle

Blaise et Pierre jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée. Ils lancent trois fois la pièce. Soit A_{12} l'événement : « le résultat du deuxième tirage est identique à celui du premier tirage », A_{13} l'événement : « le résultat du troisième tirage est identique à celui du premier tirage » et A_{23} l'événement : « le résultat du troisième tirage est identique à celui du deuxième tirage ».

Ces trois événements sont ils indépendants ?

Solution

Notons P (resp. F) un tirage donnant « pile » (resp. « face »), et ABC une suite de trois tirage où l'issue du premier tirage est A (A étant égal à P ou F), celle du deuxième est B et celle du troisième est C.

1. **Modèle :** tirage avec remise,
2. **Univers :** Ω est l'ensemble des 3-listes (avec répétition éventuelle) à valeur dans $\{P, F\}$: $\text{card}(\Omega) = 2^3 = 8$
3. **Probabilité :** $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme.

Nous pouvons identifier les événements A_{ij} :

- $A_{12} = \{PPP, PPF, FFP, FFF\}$, donc : $P(A_{12}) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.
- $A_{13} = \{PPP, PFP, FPF, FFF\}$, donc : $P(A_{13}) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.
- $A_{23} = \{PPP, PFF, FPP, FFF\}$, donc : $P(A_{23}) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Nous pouvons vérifier que les événements A_{12} et A_{13} sont indépendants :

$$A_{12} \cap A_{13} = \{PPP, FFF\}$$

Donc :

$$P(A_{12} \cap A_{13}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A_{12}) \times P(A_{13})$$

On vérifie de même que les événements A_{12} et A_{23} sont indépendants, ainsi que les événement A_{13} et A_{23}.

Les trois événements A_{12}, A_{13} et A_{23} sont donc deux à deux indépendants. Nous pouvons vérifier, par contre, qu'ils ne sont par contre pas mutuellement indépendants :

$$A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23} = \{PPP, FFF\}$$

Donc :

$$P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) = \frac{1}{4} \neq P(A_{12}) \times P(A_{13}) \times P(A_{23}) = \frac{1}{8}$$

Synthèse

Savoirs

- Définition d'une probabilité, d'une probabilité conditionnelle,
- Formule du crible,
- Représentation des probabilités conditionnelles par des arbres de probabilités. Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
- Notion d'indépendance d'événements.

Savoir-faire

- Modéliser une expérience aléatoire finie :
 - univers Ω des résultats possibles (Ω est un ensemble fini),
 - algèbre $\mathcal{A}$ des événements observables (en général : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$),
 - probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Cas des probabilités uniformes :
$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$
- Représenter un événement par un arbre de probabilité,
- Calculer la probabilité d'une cause sachant la conséquence par la formule de Bayes.

Mots-clés

- Événements
- probabilité
- probabilité uniforme
- équiprobabilité
- probabilité conditionnelle
- indépendance
- formule des probabilités composées
- formule des probabilités totales
- formule de Bayes
- formule du crible.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

23.1 Un joueur lance trois dés distincts (un dé rouge, un dé vert, un dé bleu). Quel est l'univers des résultats possibles ?

23.2 Soit $n > 1$ et $p \in]0,1[$. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la suite $(p_k)_{1\leq k\leq n}$ définie par :

$$P(\{k\}) = p_k = \alpha p^k$$

définit-elle une probabilité sur $[\![1,n]\!]$?

23.3 Soit A un événement d'un espace probabilisé Ω. Les événements A et $\overline{A}$ sont ils incompatibles ? Sont ils indépendants ?

23.4 A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0.5$ et $P(B) = 0.2$. Est il possible d'avoir :

1. $P(A \cap B) = 0.2$
2. $P(A \cup B) = 0.8$
3. $P(A \cap B) + P(A \cup B) = 0.6$

Justifiez les réponses.

23.5 Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On en tire 3 sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à la somme des numéros des boules non obtenues ?

1. $p = \frac{1}{2}$
2. $p = 0$
3. $p = \frac{1}{3}$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 608.

■ Événements

23.6

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce truquée : le côté pile sort avec une probabilité de 60%, face avec une probabilité de 40%.

1. Le joueur fait deux tirages consécutifs. Dessiner l'arbre de probabilité modélisant l'expérience.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un seul pile au cours des deux tirages ?
3. Le joueur fait trois tirages consécutifs. Il obtient un seul pile après les trois tirages. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu pile au premier tirage ?

23.7

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements et A, B, C des événements. À l'aide des opérations ensemblistes : $\bigcap$, $\bigcup$ et complémentaire, écrire les événements suivants :

1. l'un au moins des événements A, B, C est réalisé.
2. un et un seul des événements A, B, C est réalisé.
3. Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent.

■ Équiprobabilité – dénombrement

23.8

On pioche successivement 4 cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 trèfles et 2 cœurs quand la pioche est

1. sans remise
2. avec remise

23.9

On lance 7 fois successives un même dé à 20 faces (que l'on suppose équilibré). Calculer la probabilité pour que :

1. toutes les faces portent un numéro distinct.
2. toutes les faces portent un numéro identique.

■ Formule des probabilités composées

23.10

Dans un jeux de 32 cartes, on tire sucessivement 5 cartes en les remettant dans le jeu à l'issue de chaque tirage.

1. Calculer la probabilité que le premier as apparaisse
 (a) à la première pioche,
 (b) à la seconde pioche,
 (c) à la troisième pioche
 (d) à la quatrième pioche,
 (e) à la cinquième pioche,
 (f) jamais.
2. Refaire la question précédente avec le second as.

23.11

Une urne contient 4 boules rouges et 4 boules noires. On retire les boules de l'urne deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide, à chaque rang du tirage toutes les poignées de deux boules possibles étant supposées équiprobables. Quelle est la probabilité que tout au long de l'épreuve on n'obtienne que des paires bicolores ?

■ Formule des probabilités totales – Formule de Bayes

23.12

Parmi cent dés cubiques, vingt-cinq sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit $\frac{1}{2}$ et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître. On prend un dé au hasard parmi les cent et on le lance.

1. On lance un dé cubique. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?
2. On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
3. Pour un dé pipé, quelle est la probabilité d'obtenir 2 ?
4. On lance un dé cubique : on obtient 2. Quelle est la probabilité que ce dé ne soit pas pipé ?

23.13

Un élève a le choix entre deux modes de transport pour se rendre au lycée : le bus 6 et le bus 18. Le bus 6 (respectivement 18) a une probabilité $a \in]0,1[$ (respectivement $b \in]0,1[$) d'être en retard. Le premier jour, il prend au hasard un des deux modes de transport. Par la suite, il utilise le même que la veille si celui-ci était à l'heure, sinon il en change.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement « l'élève prend le bus 6 le k-ième jour ».

1. Calculer $P(S_k)$ en fonction de k, a et b.
2. Quelle est la probabilité p_k pour que le bus emprunté le k-ième jour soit à l'heure ?
3. Que dire de p_k lorsque k tend vers l'infini ?

■ Indépendance d'événements

23.14

Un joueur lance une pièce de monnaie deux fois successivement. Considérons les évènements :

- A : « tirer pile au premier lancer »
- B : « tirer le même côté aux deux lancers »
- C : « tirer face au dernier lancer »

1. Les évènements A et B sont ils indépendants ?
2. Les évènements A et C sont ils indépendants ? B et C ?
3. Les évènements A, B et C sont ils mutuellement indépendants ?

Exercices d'approfondissement

23.15 ◎

On dispose d'une urne contenant 20 boules dont 8 noires, 7 rouges et 5 blanches. On pioche, au hasard et sans remise, cinq boules. Calculer la probabilité de piocher

1. uniquement des boules d'une même couleur.
2. uniquement des boules blanches sachant que toutes les boules sont d'une même couleur
3. deux boules d'une couleur et trois boules d'une autre couleur
4. trois boules blanches sachant que l'on obtient les trois couleurs

23.16

Refaire l'exercice précédent lorsqu'il y a tirage successif de 5 boules avec remise.

23.17

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. On pioche trois boules, on remet les noires et l'on garde les blanches. On tire une quatrième boule...

Quelle est la probabilité que celle-ci soit blanche ?

23.18

Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche 4 boules.

On pose

- E : « obtenir exactement 2 blanches »
- F : « obtenir exactement 2 rouges »

1. On suppose qu'il n'y a pas remise.
 Calculer les probabilités suivantes : $P(E \cap F)$, $P_F(E)$, $P_E(F)$.
 Les évènements E et F sont-ils indépendants ?
2. Recommencer l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

23.19 ◎

John Keynes a demandé à son éditeur d'envoyer à un certain nombre de personne un exemplaire de la *théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie*. Il a pris soin d'écrire une dédicace personnalisée pour chaque destinataire. Malheureusement, son éditeur a mélangé les différents livres dédicacés et les a envoyé au hasard. Sachant que Keynes a voulu envoyer un livre dédicacé à n correspondants, quelle est la probabilité p_n pour qu'aucun correspondant n'ai reçu la bonne dédicace ?

Que peut-on dire lorsque $n \to +\infty$?

23.20 ◎

Une société d'assurance automobile propose trois tarifs à ses clients $T_1 < T_2 < T_3$. Les nouveaux clients paient le tarif T_2 la première année de leur contrat. Lorsqu'un client qui paie le tarif T_k a un ou plusieurs accidents au cours d'une année, il paie le tarif T_{k+1} l'année suivante (ou reste au tarif maximal lorsque $k = 3$), sinon, il paie le tarif T_{k-1} l'année suivante (ou reste au tarif minimal lorsque $k = 1$).

Nous faisons l'hypothèse (irréaliste) que la probabilité d'avoir un ou plusieurs accidents au cours de l'année est indépendante du client et est égale à $p = 10\%$.

Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $p_k(n)$ la probabilité pour qu'un client paie le tarif T_k la n-ième de leur contrat.

1. Identifier $p_k(1)$ pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_n = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_{n+1} = MX_n$$
3. Démontrer que M est diagonalisable et identifier les valeurs propres de M.
4. Identifier le sous espace propre associé à la valeur propre 1.
5. Si $X_1 = \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3$, où U_1 est un vecteur propre associée à la valeur propre 1, U_2 et U_3 sont les vecteurs propres associées aux deux autres valeurs propres $\lambda_2 > \lambda_3$, démontrer que, pour tout $n \geq 1$:
$$X_n = \alpha U_1 + \lambda_2^n \beta U_2 + \lambda_3^n \gamma U_3$$
En déduire que $p_1(n)$, $p_2(n)$ et $p_3(n)$ convergent lorsque $n \to +\infty$ et calculer $p_k = \lim\limits_{n\to+\infty} p_k(n)$ pour $k \in [\![1, 3]\!]$.

Indications

23.15 Pour dénombrer l'événement : « obtenir les trois couleurs », on pourra dénombrer le complémentaire (« obtenir aucun noir, et/ou aucun rouge, et/ou aucun blanc ») et utiliser la formule du crible.

23.19 Si E_k est l'événement : « le k-ième correspondant a reçu la bonne dédicace », la réunion des E_k (pour k variant de 1 à n) est le complémentaire de l'événement « aucun correspondant n'ai reçu la bonne dédicace ». On pourra calculer la probabilité la réunion en utilisant la formule du crible.

23.20 Question 4 : pour identifier $p_k = \lim\limits_{n\to+\infty} p_k(n)$ pour $k \in [\![1, 3]\!]$, on pourra démontrer que :
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \alpha U_1$$
où U_1 est vecteur propre pour la valeur propre 1, et remarquer que :
$$p_1 + p_2 + p_3 = \lim_{n\to+\infty} (p_1(n) + p_2(n) + p_3(n)) = 1$$

23.1

L'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^3$ est l'ensemble des triplets (n_1, n_2, n_3), où n_1 est le numéro du dé rouge, n_2 celui du dé vert, n_3 celui du dé bleu.

23.2

1. $(p_k)_{1\leq k\leq n}$ est à valeurs positives ou nulles lorsque $\alpha \geq 0$
2. la probabilité totale est :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} p^k$$

On calcule la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme p, de raison p :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \alpha p \left(\frac{1-p^n}{1-p}\right)$$
$$= 1 \iff \alpha = \frac{1}{p}\left(\frac{1-p}{1-p^n}\right)$$

23.3

Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide. Par définition du complémentaire, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, donc A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

Deux événements sont indépendants lorsque la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités. $P\left(A \cap \overline{A}\right) = 0$, donc A et $\overline{A}$ sont indépendant lorsque $P(A) = 0$ ou 1, et ne sont pas indépendants sinon.

23.4

1. Lorsque $B \subset A$, $P(A \cap B) = P(B) = 0.2$.
2. D'après la formule du crible, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) = 0.7$. Donc il est impossible d'avoir $P(A \cup B) = 0.8$.
3. D'après la formule du crible, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, donc $P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.7$. Il est donc impossible d'avoir $P(A \cap B) + P(A \cup B) = 0.6$

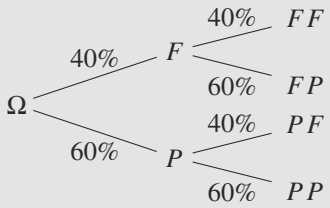
23.5

La deuxième réponse est correcte.

La somme des numéros est $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{6\times 7}{2} = 21$. Si la somme des numéros obtenus est paire, celle des numéros restants est impaire et vice versa. Dans tous les cas, elles ne seront jamais égales.

23.6

1. Notons P (resp. F) l'événements : on tire « pile » (resp. « face ») au premier lancer, PF (resp. FP, PP, FF) l'événement : « pile » au premier lancer, « face » au second (resp. « face » au premier, « pile » au second, resp. « pile » et « pile » ou « face » et « face »). L'arbre suivant modélise l'expérience :



2. La probabilité d'obtenir un seul pile au cours des deux tirages est :

$$P(PF \cup FP) = P(PF) + P(FP)$$
$$= 0.6 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 = 48\%$$

3. La probabilité d'obtenir un seul pile après les trois tirages est :

$$P(PFF \cup FPF \cup FFP)$$
$$= P(PFF) + P(FPF) + P(FFP)$$
$$= 3.6 \times 0.4^2 = 28,8\%$$

La probabilité d'avoir obtenu pile au premier tirage est :

$$P(PFF) = 0.6 \times 0.4^2 = 9,6\%$$

Notons P_1 l'événement : « obtenir un seul pile après les trois tirages ». La probabilité d'avoir obtenu pile au premier tirage sachant que l'on a obtenu un seul pile après les trois tirages est :

$$P_{P_1}(PFF) = \frac{0.6 \times 0.4^2}{3 \times 0.6 \times 0.4^2} = \frac{1}{3}$$

23.7

1. L'événement $A \cup B \cup C$ correspond à : « l'un au moins des événements A, B, C est réalisé. »
2. Un et un seul des événements A, B, C est réalisé correspond à :

$$\big(A \cap (B \cup C)\big) \cup \big(B \cap (A \cup C)\big) \cup \big(C \cap (A \cup B)\big)$$

3. Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent correspond à :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

23.8

1. *Tirage sans remise*

Modélisons l'expérience par un tirage simultané de 4 cartes dans un jeu de 32 :

(a) *Univers :*

L'univers Ω est l'ensembles des mains de 4 cartes parmi les 32 cartes, c'est à dire l'ensemble des parties à 4 éléments parmi les 32 cartes.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

(b) *Probabilité :*

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme : si A est une partie de Ω :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = \binom{32}{4}$.

(c) Soit E l'événement : « obtenir exactement 2 trèfles et 2 cœurs. Un événement $\omega \in E$ est entièrement déterminé :

i. Par le choix de 2 trèfles parmi les 8 trèfles du jeu de carte : $\binom{8}{2}$ possibilités,

ii. Par le choix de 2 cœurs parmi les 8 cœurs du jeu de carte : $\binom{8}{2}$ possibilités,

Donc :

$$\text{card}\,(E) = \binom{8}{2}^2$$

La probabilité d'obtenir exactement 2 trèfles et 2 cœurs quand la pioche est sans remise est donc :

$$P(E) = \frac{\binom{8}{2}^2}{\binom{32}{4}}$$

2. *Tirage avec remise*

(a) *Univers :*

L'univers Ω est l'ensembles de 4-listes (avec répétition éventuelle) parmi les 32 cartes.

(b) *Probabilité :*

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme : si A est une partie de Ω :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = 32^4$.

(c) Soit E l'événement : « obtenir exactement 2 trèfles et 2 cœurs. Un événement $\omega \in E$ est entièrement déterminé :

i. Par le choix des instants où on tire les 2 trèfles : $\binom{4}{2}$ possibilités,

ii. Par le tirage (avec remise) de 2 trèfles parmi les 8 trèfles du jeu de carte : 8^2 possibilités,

iii. Par le tirage (avec remise) de 2 cœurs parmi les 8 cœurs du jeu de carte : 8^2 possibilités,

Donc :

$$\text{card}\,(E) = \binom{4}{2}8^4$$

La probabilité d'obtenir exactement 2 trèfles et 2 cœurs quand la pioche est sans remise est donc :

$$P(E) = \frac{\binom{4}{2}8^4}{32^4}$$

23.9

- *Univers :*

L'univers Ω est l'ensembles de 7-listes (avec répétition éventuelle) parmi les 20 faces.

- *Probabilité :*

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme : si A est une partie de Ω :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = 20^7$.

1. Soit D l'événement : « toutes les faces tirées portent un numéro distinct »

Un événement $\omega \in D$ est une 7-liste sans répétition parmi les 20 faces : $\mathcal{A}_{20}^7$ possibilités.

La probabilité d'obtenir 7 numéros distincts est donc :

$$P(D) = \frac{\mathcal{A}_{20}^7}{20^7}$$

2. Soit I l'événement : « toutes les faces portent un numéro identique »

Un événement $\omega \in I$ est entièrement déterminé par le choix du numéro : 20 possibilités.

La probabilité d'obtenir 7 numéros identiques est donc :

$$P(I) = \frac{20}{20^7} = \frac{1}{20^6}$$

23.10

- *Modèle :* tirage avec remise.

- *Univers :*

L'univers Ω est l'ensembles de 5-listes (avec répétition éventuelle) parmi les 32 cartes.

- *Probabilité :*

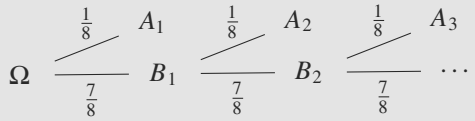
$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme : si A est une partie de Ω :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = 32^5$.

1. Soit A_k l'événement : « le premier as apparaisse à la k-ième pioche » et B_k l'événement : « aucun as n'apparaît pendant les k premières pioches ».

 Nous pouvons modéliser l'énoncé par l'arbre de probabilité :



 Nous voulons calculer les probabilités des événements A_k pour $k \in [\![1,5]\!]$ et de l'événement B_5 : « aucun as n'apparaît lors des cinq tirages. »

 D'après la formule des probabilités composées :

$$P(A_k) = \left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} \frac{1}{8} = \frac{7^{k-1}}{8^k}$$

 De même :

$$P(B_k) = \left(\frac{7}{8}\right)^{k}$$

2. Soit C_k l'événement : « le deuxième as apparaît à la k-ième pioche. »

 Notons que $P(C_1) = 0$.

 Pour $k \geq 2$, $\omega \in C_k$ est entièrement déterminé :

 (a) par le choix de l'instant où est tiré le premier as : $k-1$ possibilités entre l'instant 1 et $k-1$,

 (b) à cet instant : par le choix d'un as (parmi les 4 as du jeu) : 4 possibilités,

 (c) aux $k-2$ autres instants entre 1 et $k-1$: par le choix d'une carte différente d'un as (parmi les 28 cartes différente d'un as dans le jeu) : 28^{k-2} possibilités,

 (d) à l'instant k : par le choix d'un as (parmi les 4 as du jeu) : 4 possibilités,

 (e) aux $n-k$ instants de $k+1$ à n : par le choix d'une carte quelconque parmi les 32 cartes du jeu : 32^{n-k} possibilités,

 Nous en déduisons :

$$\text{card}\,(C_k) = (k-1)4^2 28^{k-2} 32^{n-k}$$

 donc :

$$P(C_k) = \frac{(k-1)4^2 28^{k-2} 32^{n-k}}{32^n} = \frac{(k-1)4^2 28^{k-2}}{32^k}$$

23.11 Lorsque l'on tire une paire de boules, nous pouvons supposer que l'on tire d'abord une première boule, puis une seconde.

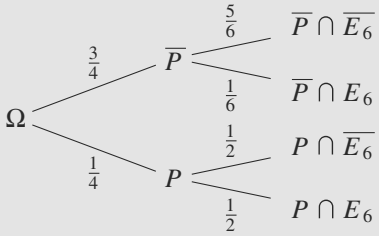
Sachant que l'on a tiré des paires bicolores jusqu'au $k-1$-ème tirage, une fois tiré la première boule de la k-ième paire, il reste $8-2k+1$ boules, dont $4-k+1$ boules d'une couleur différente. La probabilité de tirer une paire bicolore au k-ième tirage est donc :

$$p_k = \frac{4-k+1}{8-2k+1} = \frac{5-k}{9-2k}$$

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de ne tirer que des paires bicolores est donc :

$$p = \prod_{k=1}^{4} \frac{5-k}{9-2k} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{7\times 5\times 3\times 1} = \frac{8}{35}$$

23.12 Notons P l'événement : « le dé est pipé », $\overline{P}$ l'événement : « le dé n'est pas pipé », E_k l'événement : « obtenir le numéro k ». L'énoncé se modélise avec l'arbre de probabilité :



1. P, $\overline{P}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(E_6) = P(P \cap E_6) + P(\overline{P} \cap E_6) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

2. D'après la formule de Bayes :

$$P_{E_6}(P) = \frac{P(P\cap E_6)}{P(E_6)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

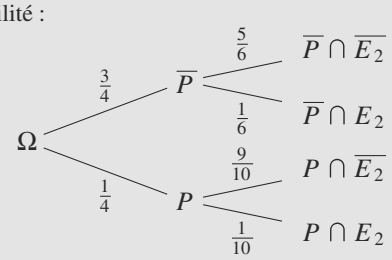
3. Si on lance un dé pipé, nous savons que la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$ et que les autres numéros ont la même probabilité p d'apparaître. La probabilité totale est donc :

$$5p + \frac{1}{2} = 1$$

 et nous concluons que $p = \frac{1}{10}$. La probabilité d'obtenir 2 (ou tout autre nombre différent de 6) avec un dé pipé est donc $\frac{1}{10}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

4. Nous pouvons modéliser le problème avec l'arbre de probabilité :



P, $\overline{P}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(P \cap E_2) + P(\overline{P} \cap E_2) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

D'après la formule de Bayes, nous pouvons calculer la probabilité que le dé ne soit pas pipé sachant que l'on tire un 2 :

$$\begin{aligned} P_{E_2}(\overline{P}) &= \frac{P(\overline{P} E_2)}{P(E_2)} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{6}}{\frac{3}{20}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{20}} \end{aligned}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $40 = 8 \times 5$, nous pouvons conclure :

$$P_{E_2}(\overline{P}) = \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

23.13 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $u_k = P(S_k)$.

1. La famille $(S_k, \overline{S_k})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulle. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \underbrace{P_{S_k}(S_{k+1})}_{1-a} \underbrace{P(S_k)}_{u_k} \underbrace{P_{\overline{S_k}}(S_{k+1})}_{b} \underbrace{P\left(\overline{S_k}\right)}_{1-u_k} \\ &= (1-a)u_k + b(1-u_k) = b + (1-a-b)u_k \end{aligned}$$

La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique du type :

$$u_{k+1} = \alpha + \beta u_k$$

où $\alpha = b$ et $\beta = 1 - a - b$. Si ℓ vérifie $\ell = \alpha + \beta\ell$, c'est à dire :

$$\ell = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{b}{a+b}$$

nous en déduisons :

$$(u_{k+1} - \ell) = \beta\,(u_k - \ell)$$

La suite $(u_k - \ell)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison β, donc :

$$u_k - \ell = \beta^{k-1}\,(u_1 - \ell)$$

où :

$$u_1 - \ell = \frac{1}{2} - \frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{2(a+b)}$$

Nous en déduisons que, pour tout $k \geq 1$:

$$u_k = \frac{b}{a+b} + (1-a-b)^{k-1}\left(\frac{a-b}{2(a+b)}\right)$$

2. Soit H_k l'événement : « le bus arrive à l'heure le k-ième jour ». $(S_k, \overline{S_k})$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(H_k) &= \underbrace{P_{S_k}(H_k)}_{1-a} \underbrace{P(S_k)}_{u_k} + \underbrace{P_{\overline{S_k}}(H_k)}_{1-b} \underbrace{P\left(\overline{S_k}\right)}_{1-u_k} \\ &= (1-a)u_k + (1-b)(1-u_k) \\ &= (1-b) + (b-a)u_k \end{aligned}$$

3. Nous savons que $a \in]0,1[$ et $b \in]0,1[$, donc $-1 < 1-a-b < 1$, et

$$(1-a-b)^{k-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Nous en déduisons :

$$u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{b}{a+b}$$

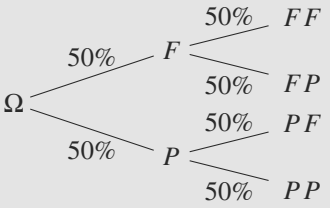
puis :

$$P(H_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \ell = (1-b) + (b-a)\left(\frac{b}{a+b}\right)$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{1}{a+b}\left(\underbrace{a+b-ab-b^2}_{(a+b)(1-b)} + \underbrace{b^2-ab}_{(b-a)b}\right) \\ &= \frac{a+b-2ab}{a+b} = 1 - \frac{2ab}{a+b} \end{aligned}$$

23.14 Nous pouvons modéliser le problème par l'arbre :



où on note P l'événement : « tirer pile au premier lancer », PF l'événement : « tirer pile au premier lancer, face au second » etc....

A, B et C sont les événements :

- A : « tirer pile au premier lancer », c'est à dire : $A = \{PP, PF\}$.

$$P(A) = P(PP) + P(PF) = 25\% + 25\% = 50\%$$

- B : « tirer le même côté aux deux lancers » c'est à dire : $B = \{PP, FF\}$.

$$P(B) = P(PP) + P(FF) = 25\% + 25\% = 50\%$$

- C : « tirer face au dernier lancer » c'est à dire : $C = \{PF, FF\}$.

$$P(C) = P(PF) + P(FF) = 25\% + 25\% = 50\%$$

1. $A \cap B = \{PP\}$.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(PP) = 25\% \\ &= P(A)P(B) \end{aligned}$$

Donc les évènements A et B sont indépendants.

2. $A \cap C = \{PF\}$.

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= P(PF) = 25\% \\ &= P(A)P(C) \end{aligned}$$

Donc les évènements A et C sont indépendants.
$B \cap C = \{FF\}$.

$$\begin{aligned} P(B \cap C) &= P(FF) = 25\% \\ &= P(B)P(C) \end{aligned}$$

Donc les évènements B et C sont indépendants.

3. $A \cap B \cap C = \emptyset$, donc $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C) = 12,5\%$. Les évènements A, B et C ne sont donc pas mutuellement indépendants.

23.15

1. • *Univers :*
 L'univers Ω des résultats possibles est l'ensemble des 5-listes sans répétition parmi les 20 boules.
 • *Probabilité :*
 $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = \mathcal{A}_{20}^5$.
L'événement A : « tirer des boules d'une même couleur » se décompose en :

- A_N : « tirer 5 boules noires » : $\mathcal{A}_8^5$ possibilités,
- A_R : « tirer 5 boules rouges » : $\mathcal{A}_7^5$ possibilités,
- A_B : « tirer 5 boules blanches » : $\mathcal{A}_5^5$ possibilités,

Nous en déduisons :

$$P(A) = \frac{\mathcal{A}_8^5 + \mathcal{A}_7^5 + \mathcal{A}_5^5}{\mathcal{A}_{20}^5}$$

En divisant par 5! au numérateur et au dénominateur, nous retrouvons les coefficients binomiaux :

$$P(A) = \frac{\binom{8}{5} + \binom{7}{5} + \binom{5}{5}}{\binom{20}{5}}$$

2. La probabilité de tirer uniquement des boules blanches sachant que toutes les boules sont d'une même couleur est :

$$P_A(A_B) = \frac{P(A_B \cap A)}{P(A)}$$

Comme $A_B \subset A$:

$$P_A(A_B) = \frac{P(A_B)}{P(A)}$$

Nous savons que $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. Nous pouvons simplifier par $\text{card}\,(\Omega)$:

$$\begin{aligned} P_A(A_B) &= \frac{\text{card}\,(A_B)}{\text{card}\,(A)} \\ &= \frac{\mathcal{A}_5^5}{\mathcal{A}_8^5} \end{aligned}$$

En divisant par 5! au numérateur et au dénominateur, nous retrouvons les coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} \\ &= \frac{1}{56} \end{aligned}$$

3. Soit A l'événement : « obtenir deux boules d'une couleur et trois boules d'une autre couleur. »
 Notons A_{C_1,C_2} l'événement : « obtenir deux boules d'une couleur C_1 et trois boules d'une autre couleur C_2. » $\omega \in A_{C_1,C_2}$ est entièrement déterminé par :
 (a) Le choix de 2 boules de la couleur C_1 : $\binom{n_1}{2}$ possibilités, si n_1 est le nombre de boules de la couleur C_1,
 (b) Le choix de 3 boules de la couleur C_2 : $\binom{n_2}{3}$ possibilités, si n_2 est le nombre de boules de la couleur C_2,
 (c) L'ordre de sortie des 5 boules choisies : 5! possibilités,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Nous en déduisons :

$$\text{card}\left(A_{C_1,C_2}\right) = 5!\binom{n_1}{2}\binom{n_2}{3}$$

En faisant la somme sur toutes les possibilités, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\text{card}\,(A) = 5!\Big(&\binom{8}{2}\binom{7}{3} + \binom{8}{2}\binom{5}{3} + \binom{7}{2}\binom{8}{3}\\ &+\binom{7}{2}\binom{5}{3} + \binom{5}{2}\binom{8}{3} + \binom{5}{2}\binom{7}{3}\Big)\end{aligned}$$

Donc, en simplifiant par 5! au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}P(A) = \frac{1}{\binom{20}{5}}\Big(&\binom{8}{2}\binom{7}{3} + \binom{8}{2}\binom{5}{3} + \binom{7}{2}\binom{8}{3}\\ &+\binom{7}{2}\binom{5}{3} + \binom{5}{2}\binom{8}{3} + \binom{5}{2}\binom{7}{3}\Big)\end{aligned}$$

4. Soit A l'événement : « obtenir les 3 couleurs et B l'événement « obtenir 3 boules blanches. $\omega \in A \cap B$ est entièrement déterminé :
 (a) Par le choix de 3 boules parmi les 5 blanches : $\binom{3}{5}$ possibilités,
 (b) Par le choix d'une boule parmi les 8 noires : 8 possibilités,
 (c) Par le choix d'une boule parmi les 7 rouges : 7 possibilités,
 (d) Par le choix de l'ordre de sortie de ces 5 boules : 5! possibilités.

Donc :

$$\text{card}\,(A \cap B) = 5! \times 7 \times 8 \times \binom{5}{3}$$

Nous pouvons dénombrer le complémentaire de A. Si B_N, B_R et B_B sont les événements : « ne tirer aucune boule noire (respectivement rouge, blanche) », alors :

$$\overline{A} = B_N \cup B_R \cup B_B$$

se dénombre par la formule du crible :

$$\begin{aligned}\text{card}\left(\overline{A}\right) &= \text{card}\,(B_N) + \text{card}\,(B_R) + \text{card}\,(B_C)\\ &\quad - \text{card}\,(B_N \cap B_R)\\ &\quad - \text{card}\,(B_N \cap B_B)\\ &\quad - \text{card}\,(B_R \cap B_B)\\ &\quad + \text{card}\,(B_N \cap B_R \cap B_B)\\ &= \mathcal{A}_{12}^5 + \mathcal{A}_{13}^5 + \mathcal{A}_{15}^5\\ &\quad - \mathcal{A}_5^5 - \mathcal{A}_7^5 - \mathcal{A}_8^5 + \mathcal{A}_0^5\end{aligned}$$

où :

- $\text{card}\,(B_N) = \mathcal{A}_{12}^5$: $\omega \in B_N$ est une 5-liste sans répétition parmi les $20 - 8 = 12$ boules qui ne sont pas noires, de même pour B_R et B_B
- $\text{card}\,(B_N \cap B_R) = \mathcal{A}_5^5$: $\omega \in B_N$ est une 5-liste sans répétition parmi les $20 - 8 - 7 = 5$ boules qui ne sont pas noires, ni rouges, de même pour $B_N \cap B_B$, $B_R \cap B_B$ et $B_N \cap B_R \cap B_B$.

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\text{card}\,(A) &= \mathcal{A}_{20}^5 - \text{card}\left(\overline{A}\right)\\ &= \mathcal{A}_{20}^5 - \mathcal{A}_{12}^5 - \mathcal{A}_{13}^5 - \mathcal{A}_{15}^5 + \mathcal{A}_8^5 + \mathcal{A}_7^5 + \mathcal{A}_5^5\end{aligned}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\text{card}\,(A \cap B)}{\text{card}\,(A)}$$

Nous pouvons simplifier par 5! et reconnaître les coefficients binomiaux au dénominateur :

$$P_A(B) = \frac{7 \times 8 \times \binom{5}{3}}{N}$$

Où :

$$\begin{aligned}N = &\binom{20}{5} - \binom{12}{5} - \binom{13}{5} - \binom{15}{5}\\ &+ \binom{8}{5} + \binom{7}{5} + \binom{5}{5}\end{aligned}$$

23.16

1. • *Univers :*

 L'univers Ω des résultats possibles est l'ensemble des 5-listes (avec répétition éventuelle) parmi les 20 boules.

 • *Probabilité :*

 $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = 20^5$.

L'événement A : « tirer des boules d'une même couleur » se décompose en :

- A_N : « tirer 5 boules noires » : 8^5 possibilités,
- A_R : « tirer 5 boules rouges » : 7^5 possibilités,
- A_B : « tirer 5 boules blanches » : 5^5 possibilités,

Nous en déduisons :

$$P(A) = \frac{8^5 + 7^5 + 5^5}{20^5}$$

2. La probabilité de tirer uniquement des boules blanches sachant que toutes les boules sont d'une même couleur est :

$$P_A(A_B) = \frac{P(A_B \cap A)}{P(A)}$$

Comme $A_B \subset A$:

$$P_A(A_B) = \frac{P(A_B)}{P(A)}$$

Nous savons que $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. Nous pouvons simplifier par card (Ω) :

$$\begin{aligned} P_A(A_B) &= \frac{\text{card}\,(A_B)}{\text{card}\,(A)} \\ &= \frac{5^5}{8^5} \end{aligned}$$

3. Soit A l'événement : « obtenir deux boules d'une couleur et trois boules d'une autre couleur. »
Notons A_{C_1,C_2} l'événement : « obtenir deux boules d'une couleur C_1 et trois boules d'une autre couleur C_2. » $\omega \in A_{C_1,C_2}$ est entièrement déterminé par :
 (a) Le choix des instant où on tire les 2 boules de la couleur C_1 : $\binom{5}{2}$,
 (b) À chacun de ces instants, le choix d'une boule de la couleur C_1 : n_1^2 possibilités, si n_1 est le nombre de boules de la couleur C_1,
 (c) À chacun des 3 instants restants, le choix d'une boule de la couleur C_2 : n_2^3 possibilités, si n_2 est le nombre de boules de la couleur C_2,

 Nous en déduisons :

$$\text{card}\left(A_{C_1,C_2}\right) = \binom{5}{2} n_1^2 n_2^3$$

 En faisant la somme sur toutes les possibilités, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \text{card}\,(A) = \binom{5}{2}\Big(&8^2 7^3 + 8^2 5^3 + 7^2 8^3 \\ &+ 7^2 5^3 + 5^2 8^3 + 5^2 7^3\Big) \end{aligned}$$

 Donc :

$$\begin{aligned} P(A) = \frac{1}{20^5}\binom{5}{2}\Big(&8^2 7^3 + 8^2 5^3 + 7^2 8^3 \\ &+ 7^2 5^3 + 5^2 8^3 + 5^2 7^3\Big) \end{aligned}$$

4. Soit A l'événement : « obtenir les 3 couleurs et B l'événement « obtenir 3 boules blanches. $\omega \in A \cap B$ est entièrement déterminé :
 (a) Par le choix de l'instant de sortie de la boule noire : 5 possibilités,
 (b) Puis par le choix de l'instant de sortie de la boule rouge : 4 possibilités,
 (c) Le choix de la boule noire : 8 possibilités,
 (d) Le choix de la boule rouge : 7 possibilités,
 (e) Le choix des 3 boules blanches : 5^3 possibilités,

 Donc :

$$\text{card}\,(A \cap B) = 5 \times 4 \times 8 \times 7 \times 5^3$$

 Nous pouvons dénombrer le complémentaire de A. Si B_N, B_R et B_B sont les événements : « ne tirer aucune boule noire (respectivement rouge, blanche) », alors :

$$\overline{A} = B_N \cup B_R \cup B_B$$

 se dénombre par la formule du crible :

$$\begin{aligned} \text{card}\left(\overline{A}\right) = &\text{card}\,(B_N) + \text{card}\,(B_R) + \text{card}\,(B_C) \\ &- \text{card}\,(B_N \cap B_R) \\ &- \text{card}\,(B_N \cap B_B) \\ &- \text{card}\,(B_R \cap B_B) \\ &+ \text{card}\,(B_N \cap B_R \cap B_B) \\ = &\ 12^5 + 13^5 + 15^5 - 5^5 - 7^5 - 8^5 + 0^5 \end{aligned}$$

 où :

 - card $(B_N) = 12^5$: $\omega \in B_N$ est une 5-liste (avec répétition éventuelle) parmi les $20 - 8 = 12$ boules qui ne sont pas noires, de même pour B_R et B_B
 - card $(B_N \cap B_R) = 5^5$: $\omega \in B_N$ est une 5-liste sans répétition parmi les $20 - 8 - 7 = 5$ boules qui ne sont pas noires, ni rouges, de même pour $B_N \cap B_B$, $B_R \cap B_B$ et $B_N \cap B_R \cap B_B$.

 Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \text{card}\,(A) &= 20^5 - \text{card}\left(\overline{A}\right) \\ &= 20^5 - 12^5 - 13^5 - 15^5 + 8^5 + 7^5 + 5^5 \\ P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\text{card}\,(A \cap B)}{\text{card}\,(A)} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 8 \times 7 \times 5^3}{20^5 - 12^5 - 13^5 - 15^5 + 8^5 + 7^5 + 5^5} \end{aligned}$$

23.17 Modélisons le premier tirage par un tirage simultané de 3 boules parmi les 7 boules de l'urne :

- *Univers :*

 L'univers Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments parmi les 9 boules.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

- *Probabilité :*

 $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

 où $\text{card}\,(\Omega) = \binom{9}{3} = 84$

Notons A_k l'événement : il y a k boules noires parmi les trois boules tirées au premier tirage.

$\omega \in A_k$ est entièrement déterminé par :

- Le choix des k boules noires : $\binom{5}{k}$ possibilités,
- Le choix des $3-k$ boules blanches : $\binom{4}{3-k}$ possibilités.

Donc :

$$\text{card}\,(A_k) = \binom{5}{k}\binom{4}{3-k}$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau :

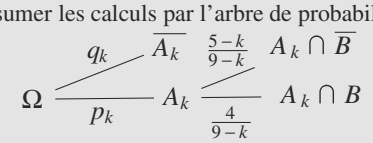
k	0	1	2	3
$\text{card}\,(A)_k$	4	30	40	10

Notons $p_k = \frac{\text{card}(A_k)}{\text{card}(\Omega)}$ la probabilité de A_k et $q_k = 1 - p_k$.

Soit B l'événement : la quatrième boule est blanche. La probabilité de B sachant A_k est la probabilité de tirer une boule blanche parmi $9-k$ boules, dont 4 blanches :

$$P_{A_k}(B) = \frac{4}{9-k}$$

On peut résumer les calculs par l'arbre de probabilité :



D'après la formule des probabilités composées :

$$P(A_k \cap B) = \frac{\text{card}\,(A_k)}{84}\frac{4}{9-k}$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=0}^{3} P(A_k \cap B) \\ &= \frac{4}{84}\frac{4}{9} + \frac{30}{84}\frac{4}{8} + \frac{40}{84}\frac{4}{7} + \frac{10}{84}\frac{4}{6} \end{aligned}$$

Tous calculs faits :

$$P(B) = \frac{a}{b}$$

23.18 Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche 4 boules.

On pose

- E : « obtenir 2 blanches »
- F : « obtenir 2 rouges »

1. *Tirage sans remise.*

 Nous pouvons modéliser l'énoncé par un tirage simultané de 4 boules :

 - *Univers :*

 L'univers Ω est l'ensemble des parties de 4 éléments parmi l'ensemble des 13 boules

 - *Probabilité :*

 $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

 où $\text{card}\,(\Omega) = \binom{13}{4} = 715$.

 Les événements considérés ne tiennent pas compte de l'ordre de sortie des boules : nous ferons le calcul avec le second modèle.

 Un élément $\omega \in E$ est entièrement déterminé :

 (a) par le choix de 2 boules parmi les 3 blanches : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités,

 (b) par le choix de 2 autres boules parmi les 10 qui ne sont pas blanches : $\binom{10}{2} = 45$ possibilités,

 Donc :

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{10}{2}}{\binom{13}{4}} \\ &= \frac{27}{143} \end{aligned}$$

 De même, un élément $\omega \in F$ est entièrement déterminé :

 (a) par le choix de 2 boules parmi les 4 rouges : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,

 (b) par le choix de 2 autres boules parmi les 9 qui ne sont pas blanches : $\binom{9}{2} = 36$ possibilités,

 Donc :

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{\binom{4}{2}\binom{9}{2}}{\binom{13}{4}} \\ &= \frac{196}{715} \end{aligned}$$

 Enfin, un élément $\omega \in E \cap F$ est entièrement déterminé :

 (a) par le choix de 2 boules parmi les 3 blanches : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités,

 (b) par le choix de 2 boules parmi les 4 rouges : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,

Donc :

$$P(E \cap F) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{18}{715}$$

Nous en déduisons les probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_E(F) &= \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \\ &= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \\ &= \frac{6}{45} \\ P_F(E) &= \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \\ &= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} P_E(F) &= \frac{6}{45} \\ &\neq \frac{196}{715} = P(F) \end{aligned}$$

Donc E et F ne sont pas des événements indépendants.

2. *Tirage avec remise.*

Nous modélisons l'expérience en tenant compte de l'ordre de sortie :

- *Univers :*

 L'univers Ω est l'ensemble des 4-suites (avec répétition éventuelle) parmi les 13 boules

- *Probabilité :*

 $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = 13^4$.

Un élément $\omega \in E$ est entièrement déterminé :

(a) par le choix des instants de tirages des 2 boules blanches : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,

(b) pour chaque tirage d'une boule blanche, par le choix d'une boule parmi les 3 blanches. Pour 2 tirages : 3^2 possibilités

(c) pour chaque tirage d'une autre boule, par le choix d'une boule parmi les 10 qui ne sont pas blanches. Pour 2 tirages : 10^2 possibilités,

Donc :

$$P(E) = \frac{\binom{4}{2}3^2 10^2}{13^4}$$

De même, un élément $\omega \in F$ est entièrement déterminé :

(a) par le choix des instants de tirages des 2 boules rouges : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,

(b) pour chaque tirage d'une boule rouge, par le choix d'une boule parmi les 4 rouges. Pour 2 tirages : 4^2 possibilités

(c) pour chaque tirage d'une autre boule, par le choix d'une boule parmi les 9 qui ne sont pas blanches. Pour 2 tirages : 9^2 possibilités,

Donc :

$$P(F) = \frac{\binom{4}{2}4^2 9^2}{13^4}$$

Enfin, un élément $\omega \in E \cap F$ est entièrement déterminé :

(a) par le choix des instants de tirages des 2 boules blanches : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités,

(b) pour chaque tirage d'une boule blanche, par le choix d'une boule parmi les 3 blanches. Pour 2 tirages : 3^2 possibilités

(c) pour chaque tirage d'une boule rouge, par le choix d'une boule parmi les 4 rouges. Pour 2 tirages : 4^2 possibilités,

Donc :

$$P(E \cap F) = \frac{\binom{4}{2}3^2 4^2}{13^4}$$

Nous en déduisons les probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_E(F) &= \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \\ &= \left(\frac{4}{10}\right)^2 \\ P_F(E) &= \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \\ &= \left(\frac{3}{9}\right)^2 \end{aligned}$$

Nous vérifions, de même que lors d'un tirage sans remise :

$$P_E(F) \neq P(F)$$

Donc E et F ne sont pas des événements indépendants.

23.19 Commençons par modéliser l'expérience. Nous pouvons associer à chaque résultat possible la permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que le k-ième correspondant reçoit la dédicace écrite pour le correspondant $\sigma(k)$.

- *Univers :* l'univers Ω des résultats possibles s'identifie à l'ensembles des permutations σ de $[\![1, n]\!]$,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

- *Probabilité :* l'ensemble des parties de Ω est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = n!$

Soit E_k l'événement : « le k-ième correspondant a reçu la bonne dédicace » et E l'événement « aucun correspondant n'ai reçu la bonne dédicace ».

Si ω appartient au complémentaire de l'événement E, un des correspondant a reçu la bonne dédicace, donc l'événement complémentaire de E est la réunion des événement E_k pour k variant de 1 à n. En particulier :

$$P(E) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$$

D'après la formule du crible :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ I\neq\emptyset}} P\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)$$

Si I est un sous ensemble à k éléments de $[\![1,n]\!]$, l'événement $E_I = \bigcap_{i\in I} E_i$ s'identifie à l'ensemble des permutations qui fixent les points de i. Si $\omega \in E_I$, $\omega|_I = \text{id}_I$ et la restriction de ω au complémentaire $\complement I$ de I est une permutation de $\complement I$, qui est un ensemble à $(n-k)$ éléments. Nous en déduisons :

$$\text{card}\,(E_i) = (n-k)! \quad \text{si card}\,(I) = k$$

En regroupant les parties non vides de $[\![1,n]\!]$ selon leur cardinal k, et en notant qu'il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments dans $[\![1,n]\!]$, nous en déduisons :

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \text{card}(I)=k}} (n-k)!}_{\binom{n}{k}\text{ termes}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!$$

En divisant par $\text{card}\,(\Omega) = n!$, nous en déduisons :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$$

En passant au complémentaire, nous en déduisons la probabilité cherchée :

$$P(E) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$$

Que nous pouvons réécrire :

$$P(E) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k!}$$

Nous reconnaissons la somme partielle d'une série géométrique, donc :

$$P(E) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-1)$$

23.20

1. D'après les hypothèses, les nouveaux clients paient le tarif T_2 la première année de leur contrat, donc :

$$\begin{cases} p_1(1) = 0 \\ p_2(1) = 1 \\ p_3(1) = 0 \end{cases}$$

2. Si note $q = 1-p$ la probabilité de ne pas avoir d'accident, d'après les hypothèses :

 (a) le client paie le tarif T_1 l'année $n+1$ s'il payait le tarif T_1 l'année n et n'a pas eu d'accident, ou s'il payait le tarif T_2 l'année n et n'a pas eu d'accident :

$$p_1(n+1) = qp_1(n) + qp_2(n)$$

 (b) le client paie le tarif T_2 l'année $n+1$ s'il payait le tarif T_1 l'année n et s'il a eu un ou plusieurs accidents, ou s'il payait le tarif T_3 l'année n et n'a pas eu d'accident :

$$p_2(n+1) = pp_1(n) + qp_3(n)$$

 (c) le client paie le tarif T_1 l'année $n+1$ s'il payait le tarif T_2 l'année n et s'il a eu un ou plusieurs accidents, ou s'il payait le tarif T_3 l'année n et s'il a eu un ou plusieurs accidents :

$$p_3(n+1) = pp_2(n) + pp_3(n)$$

Nous en déduisons :

$$\begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qp_1(n) + qp_2(n) \\ pp_1(n) \qquad\quad + qp_3(n) \\ pp_1(n) + pp_2(n) \end{pmatrix}$$

c'est à dire :

$$X_{n+1} = MX_n \text{ si on pose : } M = \begin{pmatrix} q & q & 0 \\ p & 0 & q \\ 0 & p & p \end{pmatrix}$$

3. Les valeurs propres réelles ou complexes de M sont les nombres réels ou complexes λ tels que $M - \lambda I_3$ n'est pas de rang maximal. $M - \lambda I_3$ a même rang que les matrices successives :

$$\begin{pmatrix} q-\lambda & q & 0 \\ p & -\lambda & q \\ 0 & p & p-\lambda \end{pmatrix}$$

Nous pouvons échanger l'ordre des lignes sans changer le rang :

$$\begin{pmatrix} p & -\lambda & q \\ 0 & p & p-\lambda \\ q-\lambda & q & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

En additionnant les trois lignes, sachant que $p + q = 1$:

$$\begin{pmatrix} p & -\lambda & q \\ 0 & p & p-\lambda \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

Lorsque $\lambda = 1$, $M - \lambda I_3$ est donc de rang 2. Lorsque $\lambda \neq 1$, nous pouvons diviser la dernière ligne par $1 - \lambda$ et vérifier que $M - \lambda I_3$ a même rang que les matrices successives :

$$\begin{pmatrix} p & -\lambda & q \\ 0 & p & p-\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons échanger l'ordre des lignes sans changer le rang :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & -\lambda & q \\ 0 & p & p-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{matrix}$$

Par pivot de Gauss sur la première colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(p+\lambda) & q-p \\ 0 & p & p-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - pL_1$$

Lorsque $p + \lambda = 0$, c'est à dire $\lambda = -p$, $M - \lambda I_3$ a le même rang que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & q-p \\ 0 & p & 2p \end{pmatrix}$$

Comme $q - p \neq 0$, $M - \lambda I_3$ est donc de rang 3. Lorsque $p + \lambda \neq 0$, par pivot de Gauss sur la deuxième colonne, c'est à dire en faisant $L_3 \leftarrow (p + \lambda)L_3 + pL_2$, $M - \lambda I_3$ a même rang que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(p+\lambda) & q-p \\ 0 & 0 & \varphi(\lambda) \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (p+\lambda)(p-\lambda) + p(q-p) \\ &= p^2 - \lambda^2 + pq - p^2 = pq - \lambda^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $M - \lambda I_3$ est de rang 3, sauf lorsque $\lambda = 1$ ou lorsque $\lambda^2 = pq$. Ainsi, M a trois valeurs propres distinctes : 1, $\sqrt{pq}$ et $-\sqrt{pq}$. M est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et il existe une matrice inversible P telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{pq} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{pq} \end{pmatrix} P^{-1}$$

4. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1 si et seulement si $MX = X$, c'est à dire :

$$\begin{cases} qx + qy = x \\ px + qz = y \\ py + pz = z \end{cases}$$

Nous savons que ce système est de rang 2. D'après la première équation : $qy = (1 - q)x = px$ car $1 - q = p$, donc :

$$y = \frac{px}{q}$$

D'après la troisième équation $py = (1 - p)z = qz$ car $1 - p = q$, donc :

$$z = \frac{py}{q} = \frac{p^2 x}{q^2}$$

Nous en déduisons que nous pouvons exprimer les solutions en fonction de x :

$$\begin{cases} y = \dfrac{px}{q} \\ z = \dfrac{p^2 x}{q^2} \end{cases}$$

c'est à dire :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \frac{px}{q} \\ \frac{p^2 x}{q^2} \end{pmatrix} = \frac{x}{q^2} \begin{pmatrix} q^2 \\ pq \\ p^2 \end{pmatrix}$$

Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est donc le sous espace engendré par le vecteur $U_1 = \begin{pmatrix} q^2 \\ pq \\ p^2 \end{pmatrix}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

5. Soient U_1, U_2 et U_3 trois vecteurs propres pour les valeurs propres 1, $\sqrt{pq}$ et $-\sqrt{pq}$. Nous savons que (U_1, U_2, U_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$. En décomposant X_1 dans cette base, nous en déduisons qu'il existe α, β et γ tels que :

$$X_1 = \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3$$

Comme $MU_1 = U_1$, $MU_2 = \sqrt{pq}U_2$ et $MU_3 = -\sqrt{pq}U_3$, nous pouvons démontrer par récurrence sur $n \geq 1$:

$$X_n = \alpha U_1 + \left(\sqrt{pq}\right)^n \beta U_2 + (-1)^n \left(\sqrt{pq}\right)^n \gamma U_3$$

Puisque $0 < \sqrt{pq} < 1$, nous savons que $\left(\sqrt{pq}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Nous en déduisons donc que les coordonnées de X_n convergent lorsque $n \to +\infty$ vers les coordonnées de αU_1. Si $\alpha U_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} p_1(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p_1 \\ p_2(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p_2 \\ p_3(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p_3 \end{cases}$$

De plus, nous savons que pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_k(n)$ désigne la probabilité pour qu'un client paie le tarif T_k la n-ième de leur contrat. n étant fixé, la probabilité totale est égale à 1 :

$$p_1(n) + p_2(n) + p_3(n) = 1$$

Lorsque $n \to +\infty$, nous en déduisons :

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Comme $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} q^2 \\ pq \\ p^2 \end{pmatrix}$, nous pouvons identifier α. α vérifie en effet :

$$\alpha\left(q^2 + pq + p^2\right) = 1$$

Nous pouvons développer :

$$\begin{aligned} q^2 + pq + p^2 &= (1-p)^2 + p(1-p) + p^2 \\ &= 1 + p + p^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + p + p^2} \begin{pmatrix} q^2 \\ pq \\ p^2 \end{pmatrix}$$

Comme $p = 0.1$ et $q = 0.9$:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.91} \begin{pmatrix} 0.81 \\ 0.09 \\ 0.01 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 89\% \\ 10\% \\ 1\% \end{pmatrix}$$

Variables aléatoires finies

CHAPITRE 24

Plan

24.1 Loi d'une variable aléatoire 622
24.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire 626
24.3 Lois usuelles 632
Synthèse 643
Tests et exercices 645
Corrigés des exercices 647

Introduction

Une variable aléatoire finie est une variable X, résultat d'une expérience aléatoire, qui peut prendre un nombre fini de valeurs : par exemple, le nombre de 6 obtenus lorsque l'on lance deux dés, le nombre de tirages « pile » lors d'une série de 10 tirages à pile ou face, le temps d'attente du premier succès lors d'un tirage sans remise etc…

D'un point de vue technique, une variable aléatoire est un objet compliqué : X est une fonction, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. D'un point de vue pratique, X est essentiellement déterminée par sa *loi*, c'est à dire par la fonction définie sur l'ensemble image $X(\Omega)$ par : $x \mapsto P(X = x)$, mais aussi par la *fonction de répartition* : $x \mapsto P(X \leq x)$, son *espérance* :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(X = x_i)$$

et sa *variance* : $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - \mathrm{E}(X))^2 P(X = x_i)$

qui décrivent la valeur moyenne de X et sa dispersion. Dans de nombreux exercices sur les variables aléatoires, nous ne définirons pas explicitement l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel est définie la variable aléatoire X, et nous travaillerons directement à partir de la loi de X.

Prérequis

- Dénombrement
- Probabilités finies

Objectifs

- Définir la loi d'une variable aléatoire finie
- Définir les caractéristiques de position (espérance) et de dispersion (variance)
- Étudier les lois finies usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale et loi hypergéométrique

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

24.1 Loi d'une variable aléatoire

24.1.1 Variable aléatoire finie

Définition – Variable aléatoire finie

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable fini. Une **variable aléatoire finie** X est une application définie sur Ω, à valeur dans $\mathbb{R}$ qui prend un nombre fini de valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, telle que, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$:

$$X^{-1}(x_i) = \left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) = x_i\right\}$$

est un événement de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Remarque – Énumération des valeurs d'une variable aléatoire finie

Si X est une variable aléatoire finie, on peut énumérer les éléments de l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X :

$$X(\Omega) = \left\{x_i \middle| i \in [\![1, n]\!]\right\} = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$$

où les x_i sont ordonnés :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

Remarque – Événement $X \in A$

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\{X = x\}$ l'ensemble :

$$\{X = x\} = \left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) = x\right\}$$

$\{X = x\}$ est un événement de l'algèbre $\mathcal{A}$: lorsqu'il existe i tel que $x = x_i \in X(\Omega)$, $\{X = x\}$ est l'événement $X^{-1}(x_i)$, sinon, $\{X = x\}$ est vide.

2. Si A est une partie de $\mathbb{R}$, alors :

$$\{X \in A\} = \left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) \in A\right\}$$

est un événement de l'algèbre $\mathcal{A}$, puisque réunion finie d'événements de $\mathcal{A}$:

$$\{X \in A\} = \bigcup_{i \in I} \{X = x_i\}$$

si on note I l'ensemble des entiers i tels que $x_i \in A$,

Lorsque $A =]-\infty, x]$, on note $\{X \leq x\}$ l'évenement $\{X \in A\}$. On définit de façon similaire les événements $\{X < x\}$, $\{X \geq x\}$ et $\{X > x\}$.

Propriété – Système complet et algèbre associés à une variable aléatoire

Si X est une variable aléatoire finie qui prend les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, les événements $\{X = x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ forment un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à la variable aléatoire** X.

L'ensemble des événements de la forme $\{X \in A\}$ où $A \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ forme une algèbre d'événements de Ω incluse dans $\mathcal{A}$, appelée **algèbre associée à la variable aléatoire** X.

24.1.2 Loi d'une variable aléatoire finie

Définition – Loi d'une variable aléatoire finie

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire finie définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeur dans $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La **loi** de X est la fonction $\mathcal{L} : X(\Omega) \to [0, 1]$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathcal{L}(x_i) = P(X = x_i)$$

Propriété

Si X est une variable aléatoire finie à valeur dans $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, la loi de X vérifie :

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Réciproquement, si $\mathcal{L} : \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to [0, 1]$ est une fonction vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(x_i) = 1$$

il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $\mathcal{L}$ est la loi de X.

Démonstration

La première propriété se déduit du fait que $P(\Omega) = 1$ et que $X^{-1}(x_1), \ldots X^{-1}(x_n)$ est un système complet d'événements de Ω.

Pour la propriété réciproque, définissons $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P par :

$$P(A) = \sum_{i | x_i \in A} \mathcal{L}(x_i)$$

$\mathcal{L}$ est la loi de la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ définie par : $X(\omega) = \omega$. ■

Méthode 1 Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X :

1. on commence par *modéliser le problème* en identifiant l'univers Ω des résultats possibles, l'algèbre $\mathcal{A}$ des événements et la probabilité P définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. on identifie ensuite les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prises par X, c'est à dire l'ensemble $X(\Omega)$,
3. on calcule enfin $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Remarque – Dans certains cas, on pourra se contenter de résumer les hypothèses par un *arbre de probabilité*, s'il suffit à identifier la loi de X sans expliciter l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Lorsque $X = f(Y)$ est définie à partir d'une variable aléatoire Y dont on connaît la loi, l'étape de modélisation est inutile.

Exemple d'application 1

Lançons deux dés équilibrés. Soit X la somme des deux nombres obtenus. Déterminer la loi de X.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Solution

Pour modéliser le problème, imaginons que nous pouvons distinguer les deux dés : l'un des dés est rouge, l'autre vert. On peut représenter l'univers Ω des résultats possibles comme l'ensemble de couples (n_1, n_2) à valeur dans $[\![1,6]\!]^2$, où n_1 est la valeur du dé rouge, n_2 celle du dé vert. L'algèbre $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω. L'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = 6^2 = 36$.

$X(n_1, n_2) = n_1 + n_2$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre $1 + 1 = 2$ et $6 + 6 = 12$. X est donc une variable aléatoire finie à valeur dans $[\![2,12]\!]$.

Pour $k \in [\![2,7]\!]$, si $X = k$, n_1 peut varier entre 1 et $k - 1$. Une fois fixé n_1, nous savons que $n_2 = k - n_1$. Il y a donc $k - 1$ possibilités :

$$P(X = k) = \frac{k-1}{36}$$

Si $k \in [\![7,12]\!]$, n_1 peut varier entre $k - 6$ (lorsque $n_2 = 6$) et 6. Une fois fixé n_1, nous savons que $n_2 = k - n_1$. Il y a donc $6 - (k - 6) + 1 = 13 - k$ possibilités :

$$P(X = k) = \frac{13-k}{36}$$

On peut résumer la loi de X par le tableau :

x	2 12	3 11	4 10	5 9	6 8	7
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

Exemple d'application 2 – Loi de $Y = f(X)$: exemple du carré

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $[\![-2,3]\!]$ dont la loi est donnée par :

x	−2	−1	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	0,1	0,25	0,15	0,15	0,15

Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Solution

Il est inutile d'expliciter l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mais il faut vérifier que X est bien une variable aléatoire en calculant la probabilité totale :

$$\sum_{k=-2}^{3} P(X = k) = 1$$

$Y = X^2$ prend les valeurs $0 = 0^2$, $1 = (\pm 1)^2$, $4 = (\pm 2)^2$ et $9 = 3^2$. Si $k \in [\![1,3]\!]$: $Y = k^2$ lorsque $X = \pm k$, donc :

$$P\left(Y = k^2\right) = P(X = k) + P(X = -k)$$

en notant que $P(X = -3) = 0$. De plus $Y = 0$ lorsque $X = 0$, donc $P(Y = 0) = P(X = 0)$. Nous en déduisons la loi de Y :

x	0	1	4	9
$P(X = x)$	0,25	0,25	0,35	0,15

24.1.3 Fonction de répartition

Définition – Fonction de répartition
Si X est une variable aléatoire finie, la **fonction de répartition** de X est l'application F_X définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $[0, 1]$ définie par :

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

Propriété – La fonction de répartition est une fonction en escalier croissante, de limite 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, qui a un nombre fini de points de discontinuités.

La donnée de la loi de X est équivalente à la donnée de sa fonction de répartition :

1. La fonction de répartition se déduit de la loi de X :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \sum_{i \text{ tel que } x_i \leq t} P(X = x_i)$$

2. La loi de X de déduit de la fonction de répartition : $P(X = x_i)$ mesure la discontinuité de la fonction de répartition au point x_i.

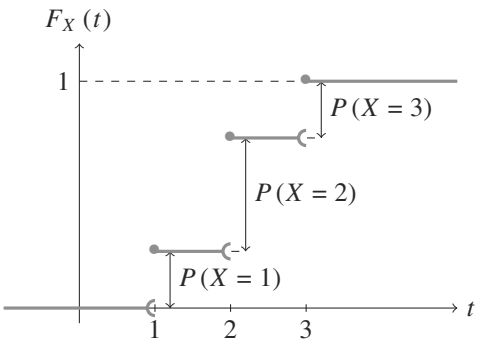
$$P(X = x_i) = \lim_{\substack{t \to x_i \\ t > x_i}} F_X(t) - \lim_{\substack{t \to x_i \\ t < x_i}} F_X(t)$$

Exemple

Soit X la variable aléatoire à valeur dans $[\![1,3]\!]$ dont la loi est donnée par le tableau :

x	1	2	3
$P(X = x)$	0.25	0.5	0.25

La figure ci dessous présente la fonction de répartition de X :



24.1.4 Indépendance

Définition – Indépendance
Des variables aléatoires finies $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si et seulement pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$, les événements $\{X_1 = x_1\}, \ldots \{X_n = x_n\}$ sont mutuellement indépendants.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple – Lancer de dé

Blaise lance un dé vert et un dé rouge. Si X est le numéro du dé vert et Y celui du dé rouge, les variables aléatoires X et Y sont mutuellement indépendantes.

Exemple – Tirage sans remise

Une urne contient 5 boules vertes et 5 boules rouges. Blaise tire (sans remise) 4 boules, puis encore 2 boules. Si X est le nombre de boules vertes tirées lors du premier tirage et Y le nombre de boules vertes tirées lors du deuxième tirage, les variables aléatoires X et Y ne sont pas mutuellement indépendantes. Par exemple, $\{X = 4 \text{ et } Y = 2\}$ est impossible, puisqu'il y a moins de 6 boules vertes ; mais les événements $\{X = 4\}$ et $\{Y = 2\}$ ont une probabilité non nulle ; donc :

$$P(X = 4 \text{ et } Y = 2) \neq P(X = 4)\,P(Y = 2)$$

et on vérifie bien que X et Y ne sont pas indépendantes.

24.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

24.2.1 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X est la valeur moyenne de X :

Définition – Espérance

Soit X une variable aléatoire réelle finie à valeur dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. L'**espérance** de X est :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Exemple

Lançons deux dés équilibrés. Soit X la somme des deux nombres obtenus. Déterminer l'espérance de X.

Solution

Nous avons démontré que la loi de X est résumée par le tableau :

x	2 12	3 11	4 10	5 9	6 8	7
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

Nous pouvons calculer l'espérance de X :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=2}^{12} kP(X = k)$$

En regroupant les termes comme dans le tableau :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \frac{1}{36}\underbrace{(2+12)}_{14}+\frac{2}{36}\underbrace{(3+11)}_{14}+\frac{3}{36}\underbrace{(4+10)}_{14}+\frac{4}{36}\underbrace{(5+9)}_{14}+\frac{5}{36}\underbrace{(6+8)}_{14}+\frac{6}{36}(7)\\ &= \frac{14}{36}\underbrace{(1+2+3+4+5)}_{15}+\frac{6\times 7}{36} = \frac{1}{36}(\underbrace{14\times 15}_{7\times 30}+6\times 7)\\ &= \frac{1}{36}(7\times(30+6)) = 7\end{aligned}$$

Propriété

1. *L'espérance est linéaire*
 Si X et Y sont deux variables aléatoires finies définies sur le même espace probabilisé, λ et μ deux réels, alors $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire finie, d'espérance :
 $$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathrm{E}(X) + \mu\,\mathrm{E}(Y)$$
2. *L'espérance est positive*
 Si X est une variable aléatoire positive :
 $$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \geq 0$$
 son espérance est positive :
 $$\mathrm{E}(X) \geq 0$$
3. *L'espérance est croissante*
 Si X est une variable aléatoire finie qui majore une variable aléatoire finie Y :
 $$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \geq Y(\omega)$$
 l'espérance de X majore celle de Y
 $$\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y)$$
4. *La probabilité d'un événement est l'espérance de sa fonction caractéristique*
 Si A est un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:
 $$P(A) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_A)$$
 Nous savons que la fonction caractéristique d'une réunion finie d'ensembles vérifie la formule du crible : puisque l'espérance est linéaire, nous en déduisons que la probabilité d'une réunion finie d'ensembles vérifie la formule du crible.

Démonstration

1. Nous démontrerons la linéarité de l'espérance dans le chapitre 27 sur les couples de variables aléatoires
2. Si $X \geq 0$, $\mathrm{E}(X)$ se calcule comme somme de termes positifs ou nuls, donc $\mathrm{E}(X) \geq 0$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

3. Si $X \geq Y$, alors, par linéarité :

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X - Y) + \mathrm{E}(Y) \geq \mathrm{E}(Y)$$

En effet $X - Y \geq 0$, ce qui justifie : $\mathrm{E}(X - Y) \geq 0$.

4. Par définition, l'espérance de la fonction caractéristique se calcule par :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) &= 0.P(\mathbb{1}_A = 0) + 1.P(\mathbb{1}_A = 1)\\ &= P(A)\end{aligned}$$ ■

Théorème – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire finie, et f une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire finie, et l'espérance de Y se calcule par la formule :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)P(X = x_i)$$

Remarque – Le théorème de transfert permet de calculer $\mathrm{E}(f(X))$ sans avoir à déterminer la loi de $f(X)$ lorsque la loi de X est connue.

Démonstration

Y est à valeur dans l'ensemble $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ des images de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ par f. On définit trois systèmes complets d'événements en posant :

$$A_{i,j} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\}$$

$$A_{i,\bullet} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\} = \bigcup_{1 \leq j \leq p} A_{i,j}$$

$$A_{\bullet,j} = \{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) = y_j\} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_{i,j}$$

On sait que :

$$A_{i,j} = \begin{cases} A_{i,\bullet} & \text{si } y_j = f(x_i) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons calculer :

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{j=1}^{p} y_j \underbrace{P(A_{\bullet,j})}_{\sum_{i=1}^{n} P(A_{i,j})} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} y_j P(A_{i,j})$$

Nous pouvons inverser l'ordre de sommation :

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq p} y_j P(A_{i,j}) \right)$$

Nous savons que :

$$y_j P(A_{i,j}) = \begin{cases} f(x_i)P(A_{i,\bullet}) & \text{si } y_j = f(x_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc : $\mathrm{E}(Y) = \sum_i f(x_i)P(A_{i,\bullet}) = \sum_i f(x_i)P(X = x_i)$ ■

Exemple

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-2,3]\!]$ dont la loi est donnée par :

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,2	0,1	0,25	0,15	0,15	0,15

Calculer l'espérance de $Y = \cos(\pi X)$.

Solution

Nous pouvons appliquer le théorème de transfert avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\cos(\pi X)) &= \underbrace{\cos(-2\pi)P(X=-2)}_{1\times 0,2} + \underbrace{\cos(-\pi)P(X=-1)}_{-1\times 0,1} + \underbrace{\cos(0)P(X=-0)}_{1\times 0,25} \\ &\quad + \underbrace{\cos(\pi)P(X=1)}_{-1\times 0,15} + \underbrace{\cos(2\pi)P(X=2)}_{1\times 0,15} + \underbrace{\cos(3\pi)P(X=3)}_{-1\times 0,15} \\ &= 0,2 - 0,1 + 0,25 - 0,15 + 0,15 - 0,15 = 0,2\end{aligned}$$

24.2.2 Variance

Définition – Variance

La **variance** d'un variable aléatoire finie X est définie par :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$$

L'**écart-type** $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

La variance d'une variable aléatoire est toujours positive ou nulle.

Propriété

1. Si X est une variable aléatoire finie :

$$\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$$

2. La variance de la somme de variables aléatoires finies deux à deux indépendantes est la somme des variances.

Démonstration

1. Par linéarité, $\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$, donc :

$$aX + b - \mathrm{E}(aX+b) = a(X - \mathrm{E}(X))$$

En élevant au carré et en calculant l'espérance, on en déduit :

$$\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$$

2. La propriété concernant la variance d'une somme de variables indépendantes sera démontrée dans le chapitre 27. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On peut calculer la variance par la formule de Huygens :

Théorème – Formule de Huygens
La variance est la différence entre l'espérance du carré et le carré de l'espérance :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$$

Remarque – Quand on applique la formule de Huygens, $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ peut se calculer à l'aide du théorème de transfert.

Démonstration – Développons :

$$(X - \mathrm{E}(X))^2 = X^2 - 2X\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2$$

En calculant l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\left(\mathrm{E}(X)\right)^2 + \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \\ &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemple – Loi binomiale

Si $p \in]0, 1[$, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est la loi du nombre X de succès dans une suite de tirages indépendants avec remise, avec une probabilité de succès p à chaque tirage. Si on note $q = 1 - p$, on peut démontrer :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

En utilisant la formule du double produit binomial : si $\ell \leq k \leq n$:

$$\binom{k}{\ell}\binom{n}{k} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

calculer la variance de X.

Solution

Notons que, lorsque $\ell = 1$, la formule du double produit binomial s'écrit :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Lorsque $\ell = 2$, comme $2\binom{k}{2} = k(k-1)$, la formule s'écrit :

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

Nous pouvons calculer l'espérance :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Le terme $k = 0$ est nul. Lorsque $k \neq 0$, d'après la formule du double produit binomial $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, donc :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

Nous pouvons factoriser np et poser $\ell = k-1$. En notant que $n-k = (n-1)-\ell$, nous reconnaissons la formule du binôme :

$$\mathrm{E}(X) = np \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} q^{(n-1)-\ell}}_{(p+q)^{n-1}}$$

Comme $(p+q)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$, nous en déduisons :

$$\mathrm{E}(X) = np$$

D'après la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2$$

Comme $X(X-1) = X^2 - X$, c'est à dire $X^2 = X(X-1) + X$, nous pouvons vérifier, par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)$$

En utilisant le théorème de transfert, calculons donc :

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Les termes $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls. Lorsque $k \geq 2$, d'après la formule du double produit binomial :

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

Nous en déduisons donc :

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k}$$

Nous pouvons factoriser $n(n-1)p^2$ et poser $\ell = k-2$. En notant que $n-k = (n-2)-\ell$, nous reconnaissons la formule du binôme :

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} p^{\ell} q^{(n-2)-\ell}}_{(p+q)^{n-2}}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Comme $(p+q)^{n-2} = 1^{n-2} = 1$, nous en déduisons :

$$\mathrm{E}\,(X(X-1)) = n(n-1)p^2$$

Nous pouvons donc conclure :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\,(X) &= \overbrace{\underbrace{\mathrm{E}\,(X(X-1))}_{n(n-1)p^2} + \underbrace{\mathrm{E}\,(X)}_{np}}^{\mathrm{E}(X^2)} - \underbrace{(\mathrm{E}\,(X))^2}_{(np)^2} \\ &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p) = npq\end{aligned}$$

L'espérance est la *valeur moyenne* de la variable aléatoire X, l'écart type mesure la *dispersion* de X par rapport à sa valeur moyenne. Cette dispersion est quantifiée précisément par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Théorème – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire réelle finie d'espérance $\mathrm{E}\,(X)$ et de variance $\mathrm{V}\,(X)$. Pour tout réel strictement positif α, X vérifie l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\Big(|X - \mathrm{E}\,(X)| \geq \alpha\Big) \leq \frac{\mathrm{V}\,(X)}{\alpha^2}$$

Démonstration
Soit $A = \{\omega \in \Omega \,||X(\omega) - \mathrm{E}\,(X)| \geq \alpha\}$. Si $Y = (X - \mathrm{E}\,(X))^2$, nous savons que $\mathrm{V}\,(X) = \mathrm{E}\,(Y)$. De plus :

$$\begin{cases} Y(\omega) \geq \alpha^2 & \text{si } \omega \in A \\ Y(\omega) \geq 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Donc $Y \geq \alpha^2 \mathbb{1}_A$. Comme l'espérance est croissante :

$$\mathrm{E}\,(Y) \geq \mathrm{E}\left(\alpha^2 \mathbb{1}_A\right) = \alpha^2 P(A) \qquad \blacksquare$$

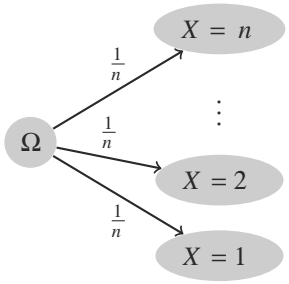
24.3 Lois usuelles

24.3.1 Loi uniforme

Définition – Loi uniforme
Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \leq b$. La **loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ est la loi notée $\mathcal{U}\,([\![a, b]\!])$ définie par :

$$\forall k \in [\![a, b]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

si on pose $n = b - a + 1$. L'arbre ci dessous décrit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$:



On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ lorsque X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

Exemple – Lancer de dé

On lance un dé équilibré. La variable aléatoire X égale au nombre obtenu suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,6]\!])$.

Théorème – Espérance et variance de la loi uniforme
Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$, alors :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$\mathrm{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

si on pose $n = b - a + 1$.

Démonstration
Soit $Y = X - a$. Y suit la loi uniforme sur $[\![0, b-a]\!]$ et nous pouvons calculer :

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{b-a} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{b-a} k$$

Nous calculons la somme des entiers de 0 à $b - a$, donc :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{(b-a)\overbrace{(b-a+1)}^{n}}{2n} = \frac{b-a}{2}$$

Comme $X = a + Y$, nous savons que :

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) + a = \left(\frac{b-a}{2}\right) + a = \frac{b+a}{2}$$

$Y = X - a$ est de la forme $Y = \lambda X + \mu$ avec $\lambda = 1$ et $\mu = -a$, donc :

$$\mathrm{V}(Y) = \lambda^2 \mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(X)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Y suit la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$, donc d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(Y^2\right) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\ell^2}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\end{aligned}$$

De plus :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{n-1}{2}$$

D'après la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2}{4} \\ &= \frac{n-1}{12}\left(2(2n-1) - 3(n-1)\right) \\ &= \frac{n-1}{12}\left(4n - 2 - 3n + 3\right) = \frac{n-1}{12}\left(n+1\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(n^2 - 1\right) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

24.3.2 Tirage avec remise : le schéma de Bernoulli

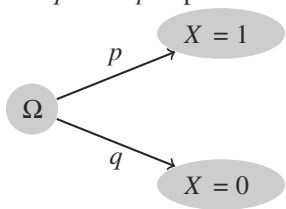
Si $p \in]0, 1[$, la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ est la loi d'une épreuve aléatoire à deux modalités : succès ($X = 1$) ou échec ($X = 0$)

Définition – Loi de Bernoulli

La **loi de Bernoulli** de paramètre p est la loi notée $\mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$ décrite par :

k	0	1
$P(X = k)$	q	p

où p est la probabilité de succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.



On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque X est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Théorème – Espérance et variance de la loi de Bernoulli
Si une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$, alors :

$$\mathrm{E}(X) = p$$
$$\mathrm{V}(X) = pq$$

Démonstration
Par définition :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1)\\ &= P(X = 1) = p\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer la variance avec la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2$$

Or : $X^2 = X = \begin{cases}1 & \text{si l'épreuve est un succès}\\ 0 & \text{si l'épreuve est un échec}\end{cases}$

Donc $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{E}(X) = p$ et nous pouvons conclure :

$$\mathrm{V}(X) = p - p^2 = p(1 - p) = pq \qquad \blacksquare$$

24.3.3 Loi binomiale

Soit $p \in]0, 1[$. Une suite de tirages mutuellement indépendants avec remise, de probabilité de succès p à chaque épreuve est un schéma de Bernoulli de paramètre p.

Définition – Schéma de Bernoulli
Le **schéma de Bernoulli** ou **processus de Bernoulli** de paramètre p est une suite d'expériences aléatoires mutuellement indépendantes, dont chaque épreuve X_k suit une loi de Bernoulli de même paramètre p.

Exemple – Jeu de pile ou face

Le jeu de pile ou face est décrit par un schéma de Bernoulli : lorsque l'on lance successivement une pièce de monnaie équilibrée, en comptant un succès pour chaque tirage « pile », les lancers successifs sont mutuellement indépendants, et la probabilité de succès à chaque tirage est égale à $p = \frac{1}{2}$.

Définition – Loi binomiale
La **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$ de taille n et de paramètre p est la loi du nombre de succès lors de n tirages dans un schéma de Bernoulli de paramètre p :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

où $q = 1 - p$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ lorsque X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p.

Démonstration

1. **Modèle :** tirage avec remise,
2. **Univers :** Ω est l'ensemble des résultats possibles, c'est à dire l'ensemble des n-listes (avec répétition) à valeur dans $\{0, 1\}$, où 0 correspond à un échec et 1 à un succès
3. **Probabilité :** si $\omega = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Omega$, la probabilité P est définie par :

$$P(\{\omega\}) = p^k q^{n-k}$$

où $k = \sum_{i=1}^{n} x_i$ est le nombre de succès.

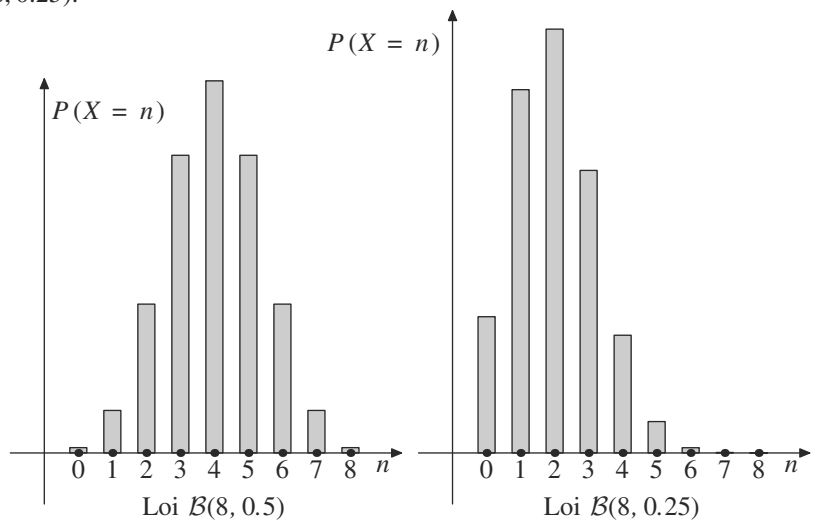
4. **Loi de X :** un élément $\omega \in \{X = k\}$ est entièrement déterminé par le choix des k instants où le tirage est un succès : $\binom{n}{k}$ possibilités. Nous savons que, pour tout $\omega \in \{X = k\}$:

$$P(\{\omega\}) = p^k q^{n-k}$$

Donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ ■

Exemple

Les diagrammes en bâton ci dessous représentent les loi binomiales $\mathcal{B}(8, 0.5)$ et $\mathcal{B}(8, 0.25)$.



Théorème – Espérance et variance de la loi binomiale

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors :

$$\mathrm{E}(X) = np$$
$$\mathrm{V}(X) = npq$$

Démonstration

Nous avons déjà calculé l'espérance et la variance de la loi binomiale dans l'exemple de la page 630. Redémontrons ces formules en utilisant les propriétés de linéarité de l'espérance et le fait que la variance d'une somme de variables deux à deux indépendantes est la somme des variances. Si on note $X_1, X_2, \dots X_n$ les n variables de Bernoulli :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k\text{-ième tirage est un succès} \\ 0 & \text{si le } k\text{-ième tirage est un échec} \end{cases}$$

Le nombre de succès à l'issue des n tirages est :

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Les variables X_k suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$: elles ont donc la même espérance, égale à p, et la même variance, égale à pq. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = np$$

Les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont deux à deux indépendantes, donc la variance de la somme est égale à la somme des variances :

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) = npq \qquad \blacksquare$$

24.3.4 Tirage sans remise : loi hypergéométrique

Définition – Loi hypergéométrique

Soit $(N, m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq N$ et $m \leq N$. Si on note $p = \frac{m}{N}$, la **loi hypergéométrique** $\mathcal{H}(N, n, p)$ de paramètres (N, n, p) est la loi du nombre de succès lors d'une suite de n tirages sans remise dans une urne contenant N boules, dont une proportion p de boules gagnantes et $q = 1 - p$ de boules perdantes :

Remarque – $m = pN$ est le nombre initial de boules gagnantes

$$P(X = k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ lorsque X est une variable aléatoire qui suit la loi hypergéométrique de paramètres (N, n, p).

Démonstration

1. **Modèle :** tirage sans remise,
2. **Univers :** Ω est l'ensemble des résultats possibles, c'est à dire l'ensemble des n-listes sans répétition parmi les N boules de l'urne,

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

3. **Probabilité :** $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où : $\text{card}\,(\Omega) = \mathcal{A}_N^n = \dfrac{N!}{(N-n)!} = n!\binom{N}{n}$

4. **Loi de X :** un élément $\omega \in [X = k]$ est entièrement déterminé par :
 (a) Le choix de k boules parmi les pN boules gagnantes : $\binom{pN}{k}$ possibilités,
 (b) Le choix de $n-k$ boules parmi les qN boules perdantes : $\binom{qN}{n-k}$ possibilités,
 (c) Le choix de l'ordre de sortie des n boules : $n!$ possibilités,

Donc : $\text{card}\,(X = k) = n!\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}$

C'est à dire : $P(X = k) = \dfrac{n!\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\mathcal{A}_N^n} = \dfrac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ ■

Exemple – Jeu de loto

Un jeudi 12 octobre, Blaise décide qu'il vit un jour de chance et joue une grille de 10 numéros entre 1 et 49 au loto. Le nombre X de numéros cochés par Blaise qui font partie des 6 numéros tirés le vendredi 13 suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ où $N = 49$, $n = 6$ et $p = \frac{10}{49}$.

Théorème – Approximation de la loi hypergéométrique par une loi binomiale
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. Si N est un entier tel que $pN \in \mathbb{N}$ et si $X_N \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$, alors pour tout entier k :

$$P(X_N = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On dit que la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est une approximation de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ lorsque $N \to +\infty$.

Remarque – En pratique, on considère que l'on peut approximer la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ lorsque $N \geq 10n$.

Démonstration

$$P(X_N = k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

En développant les coefficients binomiaux, nous reconnaissons d'une part $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ et d'autre part le quotient de deux polynômes en N :

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}\frac{A(N)}{B(N)}$$

Où : $A(N) = \overbrace{pN(pN-1)\dots(pN-k+1)}^{k \text{ facteurs}}\overbrace{qN(qN-1)\dots(qN-n+k+1)}^{n-k \text{ facteurs}}$

Lorsque $N \to +\infty$, $A(N)$ est équivalent à son terme de plus haut degré :

$$A(N) \underset{+\infty}{\sim} p^k q^{n-k} N^n$$

De même : $B(N) = \overbrace{N(N-1)\dots(N-n+1)}^{n \text{ facteurs}} \sim_{+\infty} N^n$

Donc le quotient vérifie :

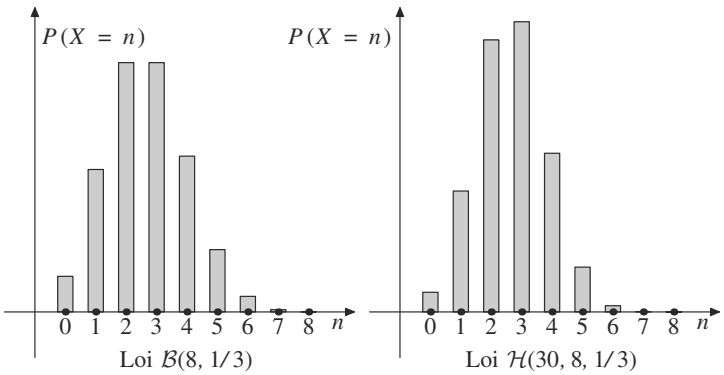
$$\frac{A(N)}{B(N)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{p^k q^{n-k} N^n}{N^n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} p^k q^{n-k}$$

Et nous pouvons conclure :

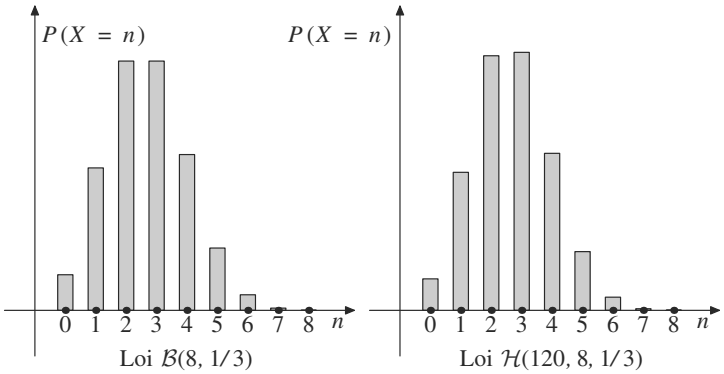
$$P(X_N = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \blacksquare$$

Exemple

Les diagrammes en bâton ci dessous représentent les loi binomiales $\mathcal{B}(8, 1/3)$ et hypergéométriques $\mathcal{H}(N, 8, 1/3)$ pour $N = 30$.



Lorsque $N = 120$, la loi binomiale $\mathcal{B}(8, 1/3)$ est une bonne approximation de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, 8, 1/3)$:



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème – Espérance et variance de la loi hypergéométrique
Si une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$, alors :

$$\mathrm{E}(X) = np$$
$$\mathrm{V}(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Démonstration

1. **Espérance –** Puisque nous connaissons la loi de X, nous pouvons calculer l'espérance en calculant :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{pN}{k}\frac{\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Le terme $k = 0$ est nul. Lorsque $k \geq 1$, d'après la formule du double produit binomial :

$$k\binom{pN}{k} = pN\binom{pN-1}{k-1}$$

Nous en déduisons donc, en factorisant pN au numérateur et $\binom{N}{n}$ au dénominateur :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{pN}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{pN-1}{k-1}\binom{qN}{n-k}$$

En posant $\ell = k-1$ et en notant que $n-k = (n-1)-\ell$:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{pN}{\binom{N}{n}}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{pN-1}{\ell}\binom{qN}{(n-1)-\ell}$$

D'après la formule de Van der Monde :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{pN-1}{\ell}\binom{qN}{(n-1)-\ell} = \binom{(pN-1)+qN}{n-1} = \binom{N-1}{n-1}$$

Donc :
$$\mathrm{E}(X) = \frac{pN}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} = pN\left(\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}\right)\left(\frac{(n-1)!(N-n)!}{N!}\right)$$

Les termes $(N-n)!$ s'éliminent et les termes $\frac{(N-1)!}{N!}$ et $\frac{n!}{(n-1)!}$ se simplifient. Après simplification, nous en déduisons :

$$\mathrm{E}(X) = pN\left(\frac{n}{N}\right) = pn$$

2. Variance – Comme pour le calcul de la variance de la loi binomiale de l'exemple de la page 630, utilisons la formule de Huygens et utilisons le fait que $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\right) + \mathrm{E}\left(X\right)$:

$$\mathrm{V}\left(X\right) = \underbrace{\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) + \mathrm{E}\left(X\right)}_{\mathrm{E}(X^2)} - \left(\mathrm{E}\left(X\right)\right)^2$$

Calculons donc $\mathrm{E}\left(X(X-1)\right)$. D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{pN}{k}\frac{\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}\end{aligned}$$

Les termes $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls. Lorsque $k \geq 2$, d'après la formule du double produit binomial :

$$k(k-1)\binom{pN}{k} = pN(pN-1)\binom{pN-2}{k-2}$$

Nous en déduisons donc, en factorisant $pN(pN-1)$ au numérateur et $\binom{N}{n}$ au dénominateur :

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{k=2}^{n}\binom{pN-2}{k-2}\binom{qN}{n-k}$$

En posant $\ell = k-2$ et en notant que $n-k = (n-2)-\ell$:

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{pN-2}{\ell}\binom{qN}{(n-2)-\ell}$$

D'après la formule de Van der Monde :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{pN-2}{\ell}\binom{qN}{(n-2)-\ell} &= \binom{(pN-2)+qN}{n-2}\\ &= \binom{N-2}{n-2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) &= \frac{pN(pN-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2}\\ &= pN(pN-1)\left(\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}\right)\left(\frac{(n-2)!(N-n)!}{N!}\right)\end{aligned}$$

Les termes $(N-n)!$ s'éliminent et les termes $\frac{(N-2)!}{N!}$ et $\frac{n!}{(n-2)!}$ se simplifient. Après simplification, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) &= pN(pN-1)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\\ &= p(pN-1)\frac{n(n-1)}{N-1}\end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Donc :

$$\mathrm{V}(X) = \underbrace{p(pN-1)\frac{n(n-1)}{N-1}}_{\mathrm{E}(X(X-1))} + \underbrace{pn}_{\mathrm{E}(X)} - \underbrace{(pn)^2}_{(\mathrm{E}(X))^2}$$

Nous pouvons factoriser :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \frac{np}{N-1}\Big((pN-1)(n-1) + (N-1) - pn(N-1)\Big)\\ &= \frac{np}{N-1}\Big(pnN - pN - n + 1 + N - 1 - pnN + pn\Big)\end{aligned}$$

En regroupant et en simplifiant :

$$\mathrm{V}(X) = \frac{np}{N-1}\Big(\underbrace{N-pN}_{qN} + \underbrace{pn-n}_{-qn}\Big) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad \blacksquare$$

Remarque – Calcul de l'espérance de $\mathcal{H}(N, n, p)$ par linéarité

Nous pouvons calculer l'espérance de la loi hypergéométrique en utilisant la propriété de linéarité de l'espérance. Si on note $X_1, X_2, \ldots X_n$ les n variables de Bernoulli :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k\text{-ième tirage est un succès} \\ 0 & \text{si le } k\text{-ième tirage est un échec} \end{cases}$$

Le nombre de succès à l'issue des n tirages est :

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Notons que les variables X_k ne sont pas mutuellement indépendantes ; mais qu'elles suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. En effet :

1. X_k vaut 0 ou 1 : elle suit donc une loi de Bernoulli,
2. l'événement $X_k = 1$ est l'ensemble des n-listes sans répétition, telle que le k-ième élément de la liste est une boule gagnante. Une telle liste est entièrement déterminée :
 (a) Par le choix de la k-ième boule, parmi les pN boules gagnantes,
 (b) Par le choix des $n-1$ autres boules, qui forme une $n-1$ liste sans répétition parmi les $N-1$ boules restantes

 En particulier : $\quad \mathrm{card}(X_k) = pN\mathcal{A}_{N-1}^{n-1} = \mathrm{card}(X_1)$

 Donc : $\quad P(X_k = 1) = P(X_1 = 1) = p$

Par linéarité : $\quad \mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = np$

Synthèse

Savoirs

- La fonction de répartition d'une variable aléatoire finie :

$$F_X : t \mapsto P(X \leq t)$$

est une fonction en escalier, de limite 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$. La donnée de la fonction de répartition est équivalente à la donnée de la loi de X : la loi de X mesure les discontinuités de la fonction de répartition.

$$P(X = x_i) = \lim_{\substack{t \to x_i \\ t > x_i}} F_X(t) - \lim_{\substack{t \to x_i \\ t < x_i}} F_X(t)$$

- L'espérance est la valeur moyenne de la variable aléatoire, et peut se calculer par le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) P(X = x_i)$$

- La variance est est définie par :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$$

Elle peut se calculer par la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2$$

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev quantifie la dispersion d'une variable aléatoire :

$$\forall \alpha > 0, \quad P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\alpha^2}$$

- L'espérance des lois binomiales et hypergéométriques se calculent en utilisant les propriétés de linéarité de l'espérance :
 - X se décompose comme somme de variables de Bernoulli
 - l'espérance d'une somme est la somme des espérances.
- Les lois usuelles des variables aléatoires finies et leurs caractéristiques sont précisées dans le tableau de la page 644.

Savoir-faire

- Déterminer la loi d'une variable aléatoire finie,
- Calculer une espérance en utilisant le théorème de transfert,
- Calculer l'espérance d'une somme de variables aléatoires

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Loi	Notation	Formule	Espérance	Variance	Écart type
Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$	$\mathcal{U}([\![a, b]\!])$	$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } a \leq k \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ si on pose $n = b - a + 1$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$
Loi de Bernoulli Jeu de pile ou face	$\mathcal{B}(1, p)$	$P(X = k) = \begin{cases} q & \text{si } k = 0 \text{ (échec)} \\ p & \text{si } k = 1 \text{ (succès)} \end{cases}$	p	pq	$\sqrt{pq}$
Loi binomiale Nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes **(tirage avec remise)**	$\mathcal{B}(n, p)$	$P(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	np	npq	$\sqrt{npq}$
Loi hypergéométrique Nombre de succès dans n tirages de N boules **(tirage sans remise)** p : proportion de boules gagnantes q : proportion de boules perdantes $(q = 1 - p)$	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$P(X = k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.	np	$npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	$\sqrt{npq}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Lois usuelles des variables aléatoires finies

Tests de connaissances

24.1 Blaise lance deux dés successivement et mise 1 €. S'il tire 6 au premier lancer, le jeu s'arrête, il récupère sa mise et il gagne 1 €. S'il tire 6 au deuxième lancer, il récupère sa mise et gagne 2 € sinon il perd sa mise. Soit X le gain à l'issue des deux lancers. Quelle est l'espérance de X ?

1) $\mathrm{E}(X) = 2$

2) $\mathrm{E}(X) = -\dfrac{1}{4}$

3) $\mathrm{E}(X) = -\dfrac{1}{3}$

24.2 Quelle est la variance de X ?

1) $\mathrm{V}(X) = \dfrac{65}{48}$

2) $\mathrm{V}(X) = \dfrac{17}{12}$

3) $\mathrm{V}(X) = \dfrac{3}{4}$

24.3 Pour allumer un feu, on dispose de 3 allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $\frac{1}{2}$. On réussit à allumer le feu.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restantes. Quelle est l'espérance de X ?

1) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{5}{4}$

2) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{35}{32}$

3) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{10}{7}$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 646.

24.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un joueur lance une fléchette au hasard sur une cible circulaire de rayon 1, divisée en couronnes concentriques par les cercles de rayons $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}$.

On suppose que la fléchette tombe nécessairement sur la cible et que la probabilité qu'elle tombe sur une région donnée de la cible, est proportionnelle à l'aire de cette région. Si elle touche la cible dans la couronne limitée par les cercles de rayons $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$ (pour $k \in [\![0; n-1]\!]$), le joueur gagne $n-k$ euros.

Soit X le gain du joueur.

Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

24.5

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire

$$Y = \frac{1}{1+X}$$

24.6

Une urne contient 10 boules blanches et 5 boules bleues. On vide l'urne en effectuant des tirages successifs et sans remise. Soit r un entier compris entre 1 et 10. On note X le numéro du tirage pour lequel on obtient la r-ième boule blanche.

Déterminer la loi de X lorsque l'on tire sans remise toutes les boules de l'urne.

24.7

On lance deux fois de suite un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros tirés.

1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2) Déterminer la loi de X lorsque l'on lance n fois de suite le dé.

24.8

X est une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- le compteur affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$
- Lorsque $X = 0$ ou n, le compteur affiche un nombre au hasard compris entre 1 et $n-1$

Soit Y la valeur affichée par le compteur.

1) Déterminer la loi de Y. Quelle est, en moyenne, la valeur affichée par le compteur ?

2) Quelle est la probabilité pour que le compteur affiche la valeur prise par X ?

3) On suppose $n = 2k$. Le compteur affiche la valeur k. Quelle est la probabilité pour que $X = k$?

24.9

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées 0, 1, …n … de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ, la puce sur trouve sur la case 0.

On note X_n et Y_n les variables aléatoires représentant respectivement le numéro de la case où se trouve la puce après n sauts et le nombre de sauts d'une case effectués au cours des n premiers sauts.

1) Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

2) Exprimer X_n en fonction de Y_n, et calculer $\mathrm{E}(X_n)$ et $\mathrm{V}(X_n)$ en fonction de n.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exercices d'approfondissement

24.10 ◎

Soient m et n deux entiers naturels tels que $1 \leq m \leq n$.

1) Montrer que

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k-1}{m-1} = \binom{n}{m}$$

Une urne contient m boules noires et $2m$ boules blanches. On effectue des tirages sans remise d'une boule de cette urne jusqu'à ce que l'on tire la dernière boule noire. On note X_m le nombre de tirages effectués.

2) Déterminer la loi de X_m et vérifier que

$$\sum_{k \in X_m(\Omega)} P(X_m = k) = 1$$

3) Calculer $P(X_1 \leq 2)$, $P(X_2 \leq 4)$, puis, dans le cas général, déterminer $P(X_m \leq 2m)$,

4) Calculer $\mathrm{E}(X_m)$

24.11 ◎

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement une à une, sans remise, les boules de cette urne. Soit X le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir toutes les boules blanches.

Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

24.12 ◎

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une boite $\mathcal{B}$ contenant n boules numérotées de 1 à n, et de n boites $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_n$, chacune des boites $\mathcal{B}_k$ contenant k boules numérotées de 1 à k.

On tire au hasard une boule dans $\mathcal{B}$, puis, si le numéro de la boule tirée est k, on tire au hasard une boule dans $\mathcal{B}_k$.

On note X le numéro de la boule obtenue à l'issue du deuxième tirage.

Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

24.13 ◎

Un joueur parie à la roulette : il décide de jouer 1 € sur une couleur (rouge ou noir) à chaque partie. Le plateau contient 37 cases : 18 rouges, 18 noires, et 1 verte. Si la couleur choisie sort, il gagne 1 € et récupère sa mise, sinon, il perd sa mise. Soit X_n le gain du joueur après n parties. $X_0 = 0$ et pour tout entier n :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{s'il gagne la } (n+1)\text{-ième partie,} \\ X_n - 1 & \text{s'il perd la } (n+1)\text{-ième partie.} \end{cases}$$

1) Identifier la loi de la variable

$$Y_n = \frac{X_n + n}{2}$$

2) En déduire l'espérance et la variance de X_n.

3) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une estimation (par excès) du plus petit entier n tel que :

$$P(X_n \leq 0) \geq 95\%$$

On exprimera n en fonction de $p = \frac{18}{37}$ et $q = 1 - p$.

Indications

24.5 Utiliser le théorème de transfert et transformer $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

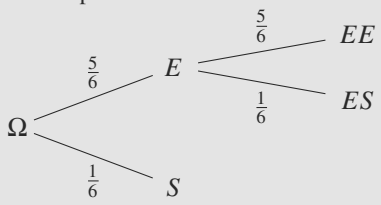
24.10 On pourra raisonner par récurrence sur n pour montrer que

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k-1}{m-1} = \binom{n}{m}$$

24.11 On pourra utiliser la formule de Pascal généralisée :

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

24.1 La réponse 2 est correcte. Si on note E et S le succès (tirer un 6) ou l'échec (tirer une autre valeur), ES un échec suivi d'un succès, EE une suite de deux échecs, on peut résumer les hypothèses par l'arbre :



X prend trois valeurs possibles :

1) $X = 1$ pour l'événement S,

2) $X = 2$ pour l'événement ES,

3) $X = -1$ pour l'événement EE.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= 1.P(X=1) + 2.P(X=2) - 1.P(X=-1)\\ &= \frac{1}{6} + 2\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^2\\ &= \frac{1}{36}(6+10-25) = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

24.2 La réponse 1 est correcte. D'après la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2$$

Où :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^2\right) &= 1^2P(X=1) + 2^2P(X=2)\\ &\quad + (-1)^2P(X=-1)\\ &= \frac{1}{6} + 4\left(\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2\\ &= \frac{1}{36}(6+20+25) = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}\\ \mathrm{V}(X) &= \frac{17}{12} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\\ &= \frac{1}{48}(68-3) = \frac{65}{48}\end{aligned}$$

24.3 La troisième réponse est correcte.

Si $p = q = \dfrac{1}{2}$ et Y est le nombre d'allumettes utilisées avant d'allumer le feu :

$$P(Y=n) = pq^{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

De plus $Y > 3$ si les 3 premières tentatives se soldent par un échec :

$$P(Y > N) = q^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

En passant au complémentaire :

$$P(Y \leq 3) = \frac{7}{8}$$

Si $n \leq 3$, l'événement $Y \leq 3$ est réalisé lorsque $Y = n$. Nous en déduisons :

$$P_{Y\leq 3}(Y=n) = \frac{P(Y=n)}{P(Y\leq 3)} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{7}{8}}$$

Comme $X = 3 - Y$, donc $Y = 3 - X$, nous en déduisons la loi de X :

$$\begin{aligned}P(X=k) &= P_{Y\leq 3}(Y=3-k)\\ &= \begin{cases}\dfrac{8}{7\times 2^{3-k}} & \text{si } 0\leq k\leq 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{2} kP(X=k)\\ &= P(X=1) + 2P(X=2)\\ &= \frac{8}{7}\left(\frac{1}{4} + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \frac{10}{7}\end{aligned}$$

24.4 La probabilité est proportionnelle à l'aire. L'aire totale de la cible est :

$$\mathcal{A} = \pi$$

L'aire de la couronne délimitée par les cercles de rayon $\dfrac{n-\ell}{n}$ et $\dfrac{n-\ell+1}{n}$ est :

$$\mathcal{A}_\ell = \pi\left(\left(\frac{n-\ell+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-\ell}{n}\right)^2\right)$$

Nous savons que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Pour $a = \dfrac{n-\ell+1}{n}$ et $b = \dfrac{n-\ell}{n}$, $a - b = \dfrac{1}{n}$ et $a + b = \dfrac{2n-2\ell+1}{n}$, donc :

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{\pi(2n-2\ell+1)}{n^2}$$

Lorsque la fléchette touche la cible dans la couronne délimitée par les cercles de rayon $\dfrac{n-\ell}{n}$ et $\dfrac{n-\ell+1}{n}$, (où $1 \leq \ell \leq n$) le joueur gagne ℓ euros, donc :

$$P(X=\ell) = \frac{\mathcal{A}_\ell}{\mathcal{A}} = \frac{2n-2\ell+1}{n^2}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

La loi de X est donc :

$$P(X=\ell)=\begin{cases}\dfrac{2n-2\ell+1}{n^2} & \text{si } 1\leq \ell\leq n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Nous pouvons calculer l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{\ell=1}^{n}\ell P(X=\ell)\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n}\ell(2n-2\ell+1)\\&=\frac{1}{n^2}\left((2n+1)\sum_{\ell=1}^{n}\ell-2\sum_{\ell=1}^{n}\ell^2\right)\\&=\frac{1}{n^2}\left((2n+1)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right.\\&\qquad\left.-2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right)\end{aligned}$$

Nous pouvons factoriser par $n(n+1)(2n+1)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n}{3}\end{aligned}$$

Puis la variance, en utilisant la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-(\mathrm{E}(X))^2$$

où :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^2\right)&=\sum_{\ell=1}^{n}\ell^2P(X=\ell)\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n}\ell^2(2n-2\ell+1)\\&=\frac{1}{n^2}\left((2n+1)\sum_{\ell=1}^{n}\ell^2-2\sum_{\ell=1}^{n}\ell^3\right)\\&=\frac{1}{n^2}\left((2n+1)\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right.\\&\qquad\left.-2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

Nous pouvons factoriser par $\frac{n(n+1)}{6}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^2\right)&=\frac{n(n+1)}{6n^2}\left((2n+1)^2-3n(n+1)\right)\\&=\frac{n+1}{6n}\left(n^2+n+1\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\frac{(n+1)(n^2+n+1)}{6n}-\frac{(n+1)^2(2n+1)^2}{(6n)^2}\\&=\frac{n+1}{36n^2}\left(6n\left(n^2+n+1\right)-(n+1)(2n+1)^2\right)\\&=\frac{n+1}{36n^2}\left(2n^3-2n^2+n-1\right)\\&=\frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^2}{18}\end{aligned}$$

24.5

D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k}P(X=k)\end{aligned}$$

Si on pose $q=1-p$:

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

Nous pouvons simplifier :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+k}\binom{n}{k}&=\frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!}\\&=\frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!((n+1)-(k+1))!}\\&=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^kq^{n-k}$$

En posant $\ell=k+1$ et $m=n+1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\frac{1}{(n+1)}\sum_{\ell=1}^{m}\binom{m}{\ell}p^{\ell-1}q^{m-\ell}\\&=\frac{1}{(n+1)p}\sum_{\ell=1}^{m}\binom{m}{\ell}p^{\ell}q^{m-\ell}\end{aligned}$$

Nous reconnaissons la formule du binôme pour le calcul de $(p+q)^m$, où manque le terme d'indice 0 : $\binom{m}{0}p^0q^m=q^m$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\frac{1}{(n+1)p}\left(\underbrace{(p+q)^m}_{1}-q^m\right)\\&=\frac{1-q^{n+1}}{(n+1)p}\end{aligned}$$

24.6

Nous pouvons modéliser l'expérience :

- *Modèle :* tirage exhaustif sans remise
- *Univers :* Ω est l'ensemble des 15-listes sans répétition parmi les 15 boules de l'urne.
- *Probabilité :* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = 15!$.

Soit k l'instant où on tire la r-ième boule blanche. On tire la r-ième boule blanche après le r-ième tirage, donc $k \geq r$. Il reste $10 - r$ boules blanches parmi $15 - k$ boules : $10 - r \leq 15 - k$, donc $k \leq 5 + r$.

Fixons donc $k \in [\![r, 5 + r]\!]$. $\omega \in \{X = k\}$ est entièrement déterminé par :

1) Par le choix des instants de sortie des $r - 1$ premières boules blanches parmi les $k - 1$ premiers tirages : $\binom{k-1}{r-1}$ possibilités,

2) Par le choix des instants de sortie des $10 - r$ dernières boules blanches parmi les $15 - k$ derniers tirages : $\binom{15-k}{10-r}$ possibilités.

On a alors déterminé l'instant de sortie des 10 boules blanches,

3) Par le choix de l'ordre de sortie des 10 boules blanches parmi les 10 instants où sortent les boules blanches : 10! possibilités,

4) Par le choix de l'ordre de sortie des 5 boules blanches parmi les 5 instants où sortent les boules blanches : 5! possibilités,

Donc :

$$\text{card}\,(X = k) = 5!10!\binom{k-1}{r-1}\binom{15-k}{10-r}$$

En divisant par 15!, nous reconnaissons le coefficient binomial $\binom{15}{10}$. La loi de X est donc :

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{15}{10}}\binom{k-1}{r-1}\binom{15-k}{10-r} & \text{si } r \leq k \leq 5 + r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

24.7

1) Nous pouvons modéliser l'expérience :

- *Modèle :* tirage avec remise
- *Univers :* Ω est l'ensemble des 2-listes (avec répétition éventuelle) parmi les 6 chiffres du dé.
- *Probabilité :* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

où $\text{card}\,(\Omega) = 6^2$.

a) *Loi de X*

Nous pouvons identifier la fonction de répartition de X. $\omega \in \{X \leq k\}$ est une 2-liste (avec répétition éventuelle) parmi les k chiffres compris entre 1 et k :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2$$

Comme $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$, nous en déduisons la loi de X :

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{2k-1}{36} & \text{si } 1 \leq k \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) *Espérance*

$$\begin{aligned} \text{E}\,(X) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{6} k\frac{2k-1}{36} \\ &= \frac{1}{36}\left(2\sum_{k=1}^{6} k^2 - \sum_{k=1}^{6} k\right) \\ &= \frac{1}{36}\left(2\left(\frac{6\times 7\times 13}{6}\right) - \frac{6\times 7}{2}\right) \\ &= \frac{7}{36}(2\times 13 - 3) \\ &= \frac{7\times 23}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4{,}47222\ldots \end{aligned}$$

Notons que si Y_k est le k-ième numéro tiré, nous savons que $X = \max(Y_1, Y_2) \geq Y_1$, donc $\text{E}\,(X) \geq \text{E}\,(Y_1) = \dfrac{6+1}{2} = 3{,}5$.

c) *Variance*

D'après la formule de Huygens :

$$\text{V}\,(X) = \text{E}\left(X^2\right) - (\text{E}\,(X))^2$$

Où :

$$\begin{aligned} \text{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{6} k^2\left(\frac{2k-1}{36}\right) \\ &= \frac{1}{36}\left(2\sum_{k=1}^{6} k^3 - \sum_{k=1}^{6} k^2\right) \\ &= \frac{1}{36}\left(2\left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2 - \frac{6\times 7\times 13}{6}\right) \\ &= \frac{791}{36} \end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 \\ &= \frac{791 \times 36 - 161^2}{36^2} = \frac{2555}{1296} \\ &\simeq 1{,}97\ldots\end{aligned}$$

2) Lorsque l'on fait n lancers, nous pouvons modéliser l'expérience :

- *Modèle :* tirage avec remise
- *Univers :* Ω est l'ensemble des n-listes (avec répétition éventuelle) parmi les 6 chiffres du dé.
- *Probabilité :* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}\,(A)}{\mathrm{card}\,(\Omega)}$$

où $\mathrm{card}\,(\Omega) = 6^n$.

Nous pouvons identifier la fonction de répartition de X. $\omega \in \{X \leq k\}$ est une n-liste (avec répétition éventuelle) parmi les k chiffres compris entre 1 et k :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n$$

Comme $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$, nous en déduisons la loi de X :

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{k^n - (k-1)^n}{6^n} & \text{si } 1 \leq k \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

24.8

1) Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(Y = k) &= P(X = 0)P_{X=0}(Y = k) \\ &\quad + P(X = k)P_{X=k}(Y = k) \\ &\quad + P(X = n)P_{X=n}(Y = k) \\ &= \frac{q^n}{n-1} + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{p^n}{n-1}\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X = k) \\ &= \left(\frac{q^n}{n-1} + \frac{p^n}{n-1}\right) \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \left(\frac{q^n}{n-1} + \frac{p^n}{n-1}\right) \frac{(n-1)n}{2} \\ &\quad + n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}\end{aligned}$$

En posant $\ell = k - 1$, nous reconnaissant la formule du binôme pour $(p+q)^{n-1}$, au terme $\binom{n-1}{n-1} p^{n-1}$ près :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \frac{n}{2}(q^n + p^n) \\ &\quad + np \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-1}{\ell} p^\ell q^{(n-1)-\ell}}_{(p+q)^{n-1} - p^{n-1} = 1 - p^{n-1}} \\ &= n\left(\frac{q^n + p^n}{2} + p - p^n\right) \\ &= n\left(p + \frac{q^n - p^n}{2}\right)\end{aligned}$$

2) Le compteur affiche la valeur prise par X lorsque $X \neq 0$ ou $X \neq n$. Donc :

$$\begin{aligned}P(Y = X) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - (p^n + q^n)\end{aligned}$$

3) D'après la formule de Bayes :

$$P_{Y=k}(X = k) = \frac{P(X = k \text{ et } Y = k)}{P(Y = k)}$$

Comme $Y = k$ lorsque $X = k$, l'événement $\{X = k \text{ et } Y = k\}$ est égal à $\{X = k\}$, donc :

$$\begin{aligned}P_{Y=k}(X = k) &= \frac{P(X = k)}{P(Y = k)} \\ &= \frac{\binom{2k}{k} p^k q^k}{\binom{2k}{k} p^k q^k + \frac{p^{2k} + q^{2k}}{2k-1}}\end{aligned}$$

24.9

1) Si un saut d'une case est comptée comme un succès, un saut de deux cases comme un échec, Y_n compte le nombre de succès dans un processus de Bernoulli, où la probabilité de succès est égale à $\frac{1}{2}$ à chaque itération. Y_n suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. En particulier, si $p = q = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \mathrm{E}(Y_n) = np = \dfrac{n}{2} \\ \mathrm{V}(Y_n) = npq = \dfrac{n}{4} \end{cases}$$

2)Si $Y_n = k$, la puce a fait k sauts d'une case et $n-k$ sauts de deux cases. Elle est donc sur la case $X_n = k + 2(n-k) = 2n-k$, donc :

$$X_n = 2n - Y_n = aY_n + b$$

où $a = -1$ et $b = 2n$. En particulier :

$$\begin{cases} \mathrm{E}(X_n) = a\,\mathrm{E}(Y_n) + b = 2n - \mathrm{E}(Y_n) \\ \mathrm{V}(X_n) = a^2\,\mathrm{V}(Y_n) = \mathrm{V}(Y_n) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \mathrm{E}(X_n) = 2n - \dfrac{n}{2} = \dfrac{3n}{2} \\ \mathrm{V}(X_n) = \dfrac{n}{4} \end{cases}$$

24.10

1) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\forall m \geq 1, \quad \sum_{k=m}^{n} \binom{k-1}{m-1} = \binom{n}{m}$$

a) *Initialisation*

Lorsque $n = 1$, il suffit de vérifier l'égalité pour $m = 1$:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k-1}{m-1} = \sum_{k=1}^{1} \binom{k-1}{m-1} = \binom{0}{0} = 1$$
$$= \binom{1}{1} = \binom{n}{m}$$

Lorsque $m \geq 2$, la somme à gauche ne contient aucun terme : elle est donc nulle, et égale à $\binom{n}{m} = 0$ car $m > n$.

b) *Hérédité*

Supposons la propriété vraie au rang n, et vérifions la au rang $n+1$. Décomposons la somme pour k variant de 1 à $n+1$ en somme pour k variant de 1 à n (pour laquelle nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence), auquel nous ajoutons le terme correspondant à $k = n+1$:

$$\sum_{k=m}^{n+1} \binom{k-1}{m-1} = \underbrace{\sum_{k=m}^{n} \binom{k-1}{m-1}}_{\binom{n}{m}} + \binom{n}{m-1}$$

Nous pouvons ensuite appliquer la formule de Pascal :

$$\sum_{k=m}^{n+1} \binom{k-1}{m-1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$
$$= \binom{n+1}{m}$$

c) *Conclusion*

La propriété est vraie pour $n = 1$, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2) Pour modéliser le problème, nous supposons que nous faisons un tirage exhaustif.

a) *Univers* L'ensemble Ω des résultats possibles est l'ensemble des $3m$-listes sans répétitions parmi les $3m$ boules (ou encore l'ensemble des permutations des $3m$ boules),

b) *Probabilités* $\mathcal{P}(\Omega)$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

où $\mathrm{card}(\Omega) = (3m)!$.

Lorsque $X_m(\omega) = k$:

a) La k-ième boule tirée est noire,

b) Les m boules noires sont tirées entre l'instant 1 et k, donc $k-m$ boules blanches sont tirées entre l'instant 1 et $k-1$.

$\omega \in \{X_m = k\}$ est entièrement déterminé :

a) Par le choix des $m-1$ instants où on tire les $m-1$ premières boules noires, entre l'instant 1 et $k-1$: $\binom{k-1}{m-1}$ possibilités,

b) Par le choix de l'ordre de sortie des m boules noires, aux $m-1$ instants choisis et à l'instant m : $m!$ possibilités,

c) Par le choix de l'ordre de sortie des $2m$ boules noires, aux $2m$ instants restants : $(2m)!$ possibilités,

Nous en déduisons :

$$P(X_m = k) = \frac{\binom{k-1}{m-1} m!(2m)!}{(3m)!}$$

La loi de X_m est donc :

$$P(X_m = k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{3m}{m}} & \text{si } m \leq k \leq 3m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En posant $n = 3m$, d'après la formule démontrée à la question 1 :

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k-1}{m-1} = \binom{n}{m}$$

Nous pouvons donc vérifier :

$$\sum_{k=m}^{3m} P(X_m = k) = \frac{1}{\binom{3m}{m}} \underbrace{\sum_{k=m}^{3m} \binom{k-1}{m-1}}_{\binom{3m}{m}} = 1$$

3) Lorsque $m = 1$, $m-1 = 0$ et nous pouvons calculer :

$$P(X_1 \leq 2) = P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2)$$
$$= \frac{1}{\binom{3}{1}} \left(\binom{0}{0} + \binom{1}{0} \right) = \frac{2}{3}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

De même, lorsque $m = 2$, $m - 1 = 1$ et nous avons :

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq 4) &= P(X_2 = 2) + P(X_2 = 3) \\ &\quad + P(X_2 = 4) \\ &= \frac{1}{\binom{6}{2}}\left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1}\right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$\omega \in \{X_m \leq 2m\}$ est entièrement déterminé :

a) Par le choix des m instants où on tire les m premières boules noires, entre l'instant 1 et $2m$: $\binom{2m}{m}$ possibilités,

b) Par le choix de l'ordre de sortie des m boules noires, aux m instants choisis : $m!$ possibilités,

c) Par le choix de l'ordre de sortie des $2m$ boules restants, aux $2m$ instants restants : $(2m)!$ possibilités,

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} P(X_m \leq 2m) &= \frac{\binom{2m}{m} m!(2m)!}{(3m)!} = \frac{(2m)!m!(2m)!}{m!m!(3m)!} \\ &= \frac{((2m)!)^2}{m!(3m)!} \end{aligned}$$

4) Nous pouvons calculer l'espérance, en notant que $k\binom{k-1}{m-1} = m\binom{k}{m}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_m) &= \sum_{k=m}^{3m} kP(X_m = k) \\ &= \frac{1}{\binom{3m}{m}} \sum_{k=m}^{3m} \underbrace{k\binom{k-1}{m-1}}_{m\binom{k}{m}} \\ &= \frac{m}{\binom{3m}{m}} \sum_{k=m}^{3m} \binom{k}{m} \end{aligned}$$

D'après la formule de Pascal généralisée :

$$\sum_{k=m}^{3m} \binom{k}{m} = \binom{3m+1}{m+1}$$

C'est à dire, après simplification :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_m) &= m\frac{\binom{3m+1}{m+1}}{\binom{3m}{m}} \\ &= m\left(\frac{m!(2m)!}{(3m)!}\right)\left(\frac{(3m+1)!}{(2m)!(m+1)!}\right) \\ &= \frac{m(3m+1)}{m+1} \end{aligned}$$

24.11 Le nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules blanches varie entre n (si on tire successivement toutes les boules blanches sans tirer une seule noire) et $2n$ (si on tire toutes les boules noires avant de tirer la dernière boule blanche). Nous pouvons modéliser l'expérience :

- *Modèle :* tirage exhaustif sans remise
- *Univers :* Ω est l'ensemble des $2n$-listes sans répétition parmi les $2n$ boules de l'urne.
- *Probabilité :* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme :

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}\,(A)}{\mathrm{card}\,(\Omega)}$$

où $\mathrm{card}\,(\Omega) = (2n)!$.

1) *Loi de X*

Soit $k \in [\![n, 2n]\!]$. $\omega \in \{X = k\}$ est entièrement déterminé par :

a) Le choix de l'instant de sortie des $n - 1$ premières boules blanches parmi les $k - 1$ premiers tirages : $\binom{k-1}{n-1}$ possibilités,

b) L'ordre de sortie des n boules blanches pendant les $n - 1$ instants déterminés précédemment et à l'instant k : $n!$ possibilités,

c) L'ordre de sortie des n boules noires parmi les n instants restants : $n!$ possibilités

Nous en déduisons :

$$\mathrm{card}\,(X = k) = (n!)^2\binom{k-1}{n-1}$$

Donc :

$$P(X = k) = \frac{(n!)^2\binom{k-1}{n-1}}{(2n)!}$$

La loi de X est donc donnée par :

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}\binom{k-1}{n-1} & \text{si } n \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) *Espérance*

Par définition :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{k=n}^{2n} kP(X = k) \\ &= \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} k\binom{k-1}{n-1} \end{aligned}$$

Nous pouvons simplifier :

$$\begin{aligned} k\binom{k-1}{n-1} &= \frac{k(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \\ &= \frac{nk!}{n!(n-k)!} \\ &= n\binom{k}{n} \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}$$

$$= \frac{n}{\binom{2n}{n}} \binom{2n+1}{n+1}$$

car, d'après la formule de Pascal généralisée :

$$\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$$

On obtient en effet les $\binom{2n+1}{n+1}$ parties de $n+1$ éléments parmi $[\![1,2n+1]\!]$ par réunion des $\binom{k}{n}$ parties dont le plus grand élément est égal à $k+1$ (les n autres élément étant choisi parmi $[\![1,k]\!]$) pour k variant de n à $2n$.

On peut simplifier :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{n(2n+1)}{n+1}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} 2n$$

3) *Variance*

D'après la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2$$

De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{E}(X(X+1)) - \mathrm{E}(X)$$

Où nous pouvons calculer avec le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}(X(X+1)) = \sum_{k=n}^{2n} k(k+1)P(X=k)$$

$$= \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} k(k+1)\binom{k-1}{n-1}$$

Nous pouvons simplifier :

$$k(k+1)\binom{k-1}{n-1} = \frac{k(k+1)(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}$$

$$= \frac{n(n+1)(k+1)!}{(n+1)!((n+1)-(k+1))!}$$

$$= n(n+1)\binom{k+1}{n+1}$$

D'après la formule de Pascal généralisée, si on pose $\ell = k+1$ et $m = n+1$:

$$\sum_{k=n}^{2n} \binom{k+1}{n+1} = \sum_{\ell=m}^{2n+1} \binom{\ell}{m}$$

$$= \binom{2n+2}{m+1} = \binom{2n+2}{n+2}$$

Donc :

$$\mathrm{E}(X(X+1)) = \frac{n(n+1)}{\binom{2n}{n}} \binom{2n+2}{n+2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \frac{(2n+2)!}{n!(n+2)!}$$

$$= \frac{n(2n+1)(2n+2)}{(n+2)}$$

Donc :

$$\mathrm{V}(X) = \underbrace{\frac{n(2n+1)(2n+2)}{(n+2)}}_{\mathrm{E}(X(X+1))} - \underbrace{\frac{n(2n+1)}{(n+1)}}_{\mathrm{E}(X)}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{n(2n+1)}{(n+1)}\right)^2}_{(\mathrm{E}(X))^2}$$

Nous pouvons factoriser $\frac{n(2n+1)}{(n+2)(n+1)^2}$:

$$\mathrm{V}(X) = \left(\frac{n(2n+1)}{(n+2)(n+1)^2}\right) u_n$$

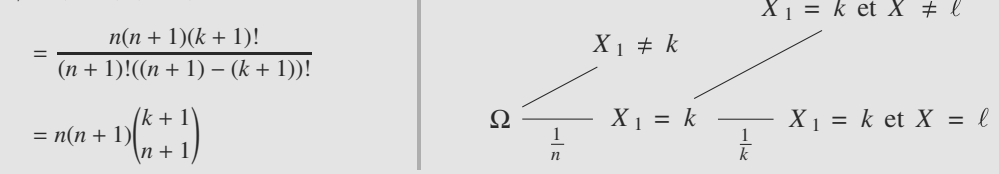
où :

$$u_n = 2(n+1)^3 - (n+1)(n+2) - n(n+2)(2n+1) = n$$

Donc :

$$\mathrm{V}(X) = \frac{n^2(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} 4n$$

24.12 Notons X_1 le numéro de la première boule tirée. Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$ et $k \in [\![1,\ell]\!]$. Nous pouvons calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = k \text{ et } X = \ell)$:



© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

D'après la formule des probabilités composées, lorsque $k \geq \ell$:

$$P(X_1 = k \text{ et } X = \ell) = \frac{1}{kn}$$

De plus, lorsque $k < \ell$ on ne peut pas tirer une boule numérotée ℓ au deuxième tirage :

$$P(X_1 = k \text{ et } X = \ell) = 0$$

En faisant la somme pour k variant de 1 à n, nous en déduisons :

$$P(X = \ell) = \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k \text{ et } X = \ell)$$

$$= \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{kn}$$

Il n'existe pas de formule plus simple pour calculer la somme des inverses des entiers de 1 à ℓ. La loi de X est donc :

$$P(X = \ell) = \frac{1}{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k}$$

Nous pouvons calculer l'espérance de X et de X^2 :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(X = \ell)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{\ell}{k}$$

Nous pouvons intervertir l'ordre de sommation dans la somme double, en notant que $k \geq \ell$:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} \frac{\ell}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell}{k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} \ell}_{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2n} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) = \frac{n+3}{4}$$

De même :

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 P(X = \ell)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{\ell^2}{k} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} \frac{\ell^2}{k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} \ell^2}_{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$$

$$= \frac{1}{6n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(k+1)(2k+1)}_{2k^2+3k+1}$$

$$= \frac{1}{6n} \left(2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{n} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3(n+1)}{2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{36} \left(\underbrace{2(n+1)(2n+1)}_{4n^2+6n+2} + 9(n+1) + 6 \right)$$

$$= \frac{1}{36} \left(4n^2 + 15n + 17 \right)$$

Donc, d'après la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2$$

$$= \frac{1}{36} \left(4n^2 + 15n + 17 \right) - \left(\frac{n+3}{4} \right)^2$$

$$= \frac{1}{144} \left(16n^2 + 60n + 68 - 9n^2 - 54n - 81 \right)$$

$$= \frac{1}{144} \left(7n^2 + 6n - 13 \right)$$

24.13

1) $Y_n = \dfrac{X_n + n}{2}$, donc : $Y_0 = 0$ et :

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n + 1 & \text{s'il gagne la } (n+1)\text{-ième partie,} \\ Y_n & \text{s'il perd la } (n+1)\text{-ième partie.} \end{cases}$$

Y_n compte le nombre de succès lors des n premières parties : il suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $p = \frac{18}{37}$ est la probabilité de succès à chaque tirage.

2) Nous savons que : $X_n = 2Y_n - n$. Donc :

$$\mathrm{E}(X_n) = 2\,\mathrm{E}(Y_n) - n = 2np - n = -(1-2p)n$$

$$\mathrm{V}(X_n) = 2^2\,\mathrm{V}(Y_n) = 4npq$$

3) Nous savons que, lorsque $X_n \geq 0$,

$$X_n - \mathrm{E}(X_n) \geq \alpha_n$$

où $\alpha_n = (1-2p)n > 0$ car $p < \frac{1}{2}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} P(X_n > 0) &\leq P(X_n - \mathrm{E}(X_n) > \alpha_n) \\ &\leq P(|X_n - \mathrm{E}(X_n)| \geq \alpha_n) \\ &\leq \frac{\mathrm{V}(X_n)}{\alpha_n^2} \end{aligned}$$

Lorsque $\frac{\mathrm{V}(X_n)}{\alpha_n^2} \leq 5\%$, nous en déduisons que $P(X_n > 0) \leq 5\%$, donc $P(X_n \leq 0) \geq 95\%$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{V}(X_n)}{\alpha_n^2} \leq 5\% &\iff \frac{4npq}{(1-2p)^2n^2} \leq \frac{1}{20} \\ &\iff \frac{4pq}{(1-2p)^2 n} \leq \frac{1}{20} \\ &\iff \frac{80pq}{(1-2p)^2} \leq n \end{aligned}$$

Donc, lorsque $n \geq \frac{80pq}{(1-2p)^2}$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(X_n \leq 0) \geq 95\%$$

Lorsque $p = \frac{18}{37}$, $1 - 2p = \frac{1}{37}$, $pq = \frac{18 \times 19}{37^2}$ et nous pouvons calculer :

$$\frac{80pq}{(1-2p)^2} = 80 \times 18 \times 19 = 27\,360$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Espace probabilisés infinis

CHAPITRE 25

Plan

25.1 σ-algèbre des événements 657
25.2 Probabilité 658
25.3 Probabilité conditionnelle 664
25.4 Indépendance 667
Synthèse 668
Tests et exercices 669
Corrigés des exercices 672

Introduction

L'étude des probabilités sur un ensemble fini repose sur un petit nombre de propriétés simples : positivité, additivité et la probabilité totale de l'univers est égale à 1.

Dans ce chapitre, nous étendons la définition des probabilités au cas où l'univers Ω est un ensemble infini. L'extension de la définition présente des difficultés d'ordre technique : comment généraliser la propriété donnant la probabilité de la réunion d'ensembles disjoints lorsque l'on considère la réunion d'une infinité d'ensembles disjoints ?

À cette difficulté technique répond la notion technique de *σ-algèbre* (ou *tribu*) et la notion de *σ-additivité* (ou *additivité dénombrable*) : une fois explicitées ces notions, les propriétés et les formules usuelles des probabilités sur les ensembles finis se généralisent au cas des ensembles infinis.

Prérequis

- Probabilités sur un ensemble fini
- Séries

Objectifs

- Étendre les définitions et les propriétés des probabilités sur un ensemble fini aux ensembles infinis



Contrairement aux expériences aléatoires finies, pour lesquelles on peut toujours expliciter l'univers fini Ω des résultats possibles, l'algèbre $\mathcal{A}$ des événements observables et la probabilité P définie sur l'algèbre $\mathcal{A}$, il est beaucoup plus difficile d'expliciter $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ lorsque l'on modélise une expérience aléatoire infinie.

Exemple – Processus de Bernoulli

Faisons une expérience de pensée : lançons une infinité de fois une pièce équilibrée, et notons le résultat de chaque tirage par 0 pour « pile » et 1 pour « face ». Dans cette expérience (appelée *processus de Bernoulli*), le résultat final est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de 0 et de 1 qui constitue un *événement élémentaire* : $u_n = 0$ si on obtient « pile » au n-ième tirage, $u_n = 1$ si on obtient face au n-ième tirage. L'ensemble des résultats possibles est donc l'ensemble, noté $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, des suites à valeurs dans $\{0,1\}$: il constitue l'univers Ω.

Pour tout entier n on peut considérer les événements E_n : « tirer au moins n piles ». Lorsque $n \geq 1$, E_n est distinct de l'univers Ω, mais paradoxalement, on peut démontrer, une fois explicitée l'algèbre $\mathcal{A}$ des événements observables et la probabilité P, que E_n est un événement de probabilité égale à 1.

25.1 σ-algèbre des événements

Définition – σ-algèbre

Une **σ-algèbre** d'événements sur un ensemble Ω est un sous ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

1. $\mathcal{A}$ contient l'événement certain Ω,
2. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire,
3. $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.

Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre d'événements sur un ensemble Ω, on dit que l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**.

On utilise aussi le terme de ***tribu*** pour désigner une σ-algèbre.

Remarque – Cas des ensembles finis

Si Ω est un ensemble fini, la notion de σ-algèbre de parties de Ω coïncide exactement avec la notion d'algèbre $\mathcal{A}$ de parties de Ω.

Propriété –

Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties d'un ensemble Ω :

- $\mathcal{A}$ contient l'événement impossible $\emptyset$ (complémentaire de l'événement certain).
- si A et B sont deux événements de $\mathcal{A}$, alors $B \setminus A = B \cap \overline{A}$ est un événement de $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie.
- $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie ou dénombrable.

Démonstration

Si $A_1, \dots A_n$, la réunion finie $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est égale à la réunion dénombrable $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ si on pose $A_k = \emptyset$ lorsque $k \geq n+1$: $\mathcal{A}$ est donc stable par réunion finie.

D'après les loi de de Morgan, le complémentaire d'une intersection est la réunion des complémentaires, c'est à dire, si I est fini ou dénombrable :

$$\overline{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \text{ et donc } \bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\left(\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}\right)}$$

Une intersection finie ou dénombrable d'éléments d'une tribu $\mathcal{A}$ appartient donc à $\mathcal{A}$, puisque $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie ou dénombrable et par passage au complémentaire. ■

Si Ω est un ensemble, la *tribu triviale* $\mathcal{P}(\Omega)$ est une σ-algèbre, tout comme la *tribu grossière* $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Si on se fixe un ensemble arbitraire d'événements B, on peut définir *la σ-algèbre engendrée par B* :

Propriété – σ-algèbre engendrée par une famille d'événements

Si B est un ensemble d'événements d'un univers Ω, l'intersection de toutes les σ-algèbres contenant B est une σ-algèbre qui contient B, appelée ***σ-algèbre engendrée par B***.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

Puisque la tribu triviale $\mathcal{P}(\Omega)$ est une σ-algèbre, qui contient B, l'intersection $\mathcal{A}_B$ de toutes les σ-algèbres contenant B est bien définie. Elle contient naturellement B, puisqu'intersection de parties de Ω contenant chacune B, est stable par passage au complémentaire, par réunion et intersection finie ou dénombrable, puisqu'intersection de parties de Ω qui vérifient ces propriétés : $\mathcal{A}_B$ est donc bien une σ-algèbre contenant B. De plus, par construction de $\mathcal{A}_B$, toute σ-algèbre contenant B contient la σ-algèbre engendrée par B. ■

Définition – Système complet d'événements

Une famille finie ou dénombrable d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est un ***système complet d'événements*** lorsque :

- les événements sont deux à deux incompatibles :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ lorsque } i \neq j$$

- la réunion des événements est certaine :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$$

Si $\mathcal{B} = (A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements sur un univers Ω, la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{B}$ est constituée par les réunions finies ou dénombrables des A_j.

25.2 Probabilité

Définition – Probabilité sur un ensemble Ω

Une **probabilité** P sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur $\mathcal{A}$, à valeur dans $[0, 1]$ telle que :

1. P est **σ-additive :** la probabilité d'une réunion finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles est la somme des probabilités, c'est à dire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ lorsque } i \neq j$$

alors la série $\sum P(A_n)$ converge et :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

2. la probabilité de l'événement certain est 1 :

$$P(\Omega) = 1$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Remarque – Événement d'un espace probabilisé

Lorsque $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé, on réservera le terme *événement* aux parties A de Ω appartenant à la σ-algèbre $\mathcal{A}$. Les parties de Ω qui n'appartiennent pas à $\mathcal{A}$ ne seront pas des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Remarque – Cas des ensembles finis
Lorsque Ω est un ensemble fini, cette définition est équivalente à la définition du chapitre 23. En effet, dans ce cas, une σ-algèbre $\mathcal{A}$ ne comporte qu'un nombre fini d'événements. Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, seul un nombre fini d'événements est non vide, et la propriété de σ-additivité est alors équivalente à la propriété d'additivité. Ainsi, toute probabilité sur un ensemble fini au sens du chapitre 23 est σ-additive, donc est une probabilité au sens de ce chapitre.

Remarque – Cas des ensembles infinis : différence entre additivité et σ-additivité
Si P est une application additive (mais pas nécessairement σ-additive) à valeurs dans $[0, 1]$ définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors la série $\sum P(A_n)$ converge et la somme vérifie :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) \leq P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

***P* est σ-additive lorsqu'il y a égalité dans l'inégalité précédente.**

Démonstration – Si P est σ-additive, alors P est additive. Inversement, si on suppose que P est une application additive (mais pas nécessairement σ-additive) à valeurs dans $[0, 1]$ définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors P est croissante (cf chapitre 23) : si $A \subset B$,

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

En particulier, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des événements deux à deux incompatibles :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ lorsque } i \neq j$$

alors :
$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$$

Donc, puisque P est croissante :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

C'est à dire, puisque P est additive :

$$\sum_{k=0}^{n} P(A_k) \leq P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

La série $\sum P(A_n)$ est donc une série à termes positifs, dont les sommes partielles sont majorées par $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$: d'après le théorème de la limite monotone, cette série converge et la somme vérifie :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) \leq P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \quad \blacksquare$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple – Probabilité sur $\mathbb{N}$

Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ et l'algèbre des événements $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, la probabilité P est entièrement déterminée par la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = P(\{n\})$$

Si A est une partie de $\mathbb{N}$, sa probabilité est :

$$P(A) = \sum_{i\in A} p_i$$

Une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ si et seulement si :

1. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs positives ou nulles, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geq 0$$

2. la probabilité totale vaut 1, c'est à dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

Exemple

À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = \frac{a}{5^n}$$

définit-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

Solution

1. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs positives ou nulles lorsque $a \geq 0$.
2. la probabilité totale est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{5^n}$$

Nous calculons la somme de la série géométrique de premier terme a, de raisons $\frac{1}{5}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = a\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{5a}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \iff a = \frac{4}{5}$$

Les probabilités sur un ensemble quelconque sont additives : elles vérifient donc les propriétés des probabilités sur un ensemble fini :

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. La probabilité P est σ-additive, donc additive. Elle vérifie donc les propriétés des probabilités finies :

1. complémentaire d'un événement A :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

En particulier, l'événement impossible est de probabilité nulle : $P(\emptyset) = 0$.

2. *croissance* (au sens de l'inclusion) : pour tout couple d'événements (A, B) :

$$\left(A \subset B\right) \implies P(A) \leq P(B)$$

3. *formule du crible* :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \text{card}(J)=k}} P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

Lorsque l'on considère une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements ou une réunion (respectivement une intersection) d'événements, la propriété de σ-additivité permet de calculer la probabilité de la réunion (respectivement de l'intersection) :

Théorème – Limite monotone

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone d'événements, alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et plus précisément :

- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante c'est à dire si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Corollaire – Intersection ou réunion dénombrable d'événements

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque d'événements :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration

1. **Suite croissante :** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, nous pouvons définir une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles par :

$$\begin{cases} B_0 = A_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n \end{cases}$$

et nous pouvons vérifier que, pour tout entier n :

$$A_n = \bigcup_{k\leq n} B_k$$

Nous en déduisons : $$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$$

Les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant deux à deux incompatibles, nous pouvons appliquer la propriété d'additivité dénombrable :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(B_k)$$

Comme $A_n = \bigcup_{k\leq n} B_k$, où les événements $(B_k)_{0\leq k\leq n}$ sont deux à deux incompatibles, nous savons que :

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^{n} P(B_k)$$

Nous avons donc démontré :

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

2. **Suite décroissante :** lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, la suite des complémentaires est une suite croissante d'événements : la probabilité de $\overline{A_n}$ converge donc vers la probabilité de la réunion des $\overline{A_n}$. En passant au complémentaire, nous en déduisons que la probabilité de A_n converge vers la probabilité du complémentaire de la réunion des $\overline{A_n}$, qui est l'intersection des $\left(\overline{A_n}\right) = A_n$.
3. **Suite quelconque :** lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque d'événements, la suite des réunions $\bigcup_{k\leq n} A_k$ est une suite croissante d'événements, celle des intersections $\bigcap_{k\leq n} A_k$ est une suite décroissante d'événements, et nous pouvons appliquer les résultats du théorème de la limite monotone à ces suites. ■

Définition – Événement négligeable

Un **événement négligeable** (ou presque impossible) d'un espace probabilisé est une événement de probabilité nulle.

Remarque – L'événement impossible (c'est à dire $\emptyset$) n'est pas nécessairement le seul événement négligeable.

Propriété

Toute réunion finie ou dénombrable et toute intersection d'événements négligeables est un événement négligeable.

Exemple – Processus de Bernoulli

Le processus de Bernoulli consiste à lancer une infinité de fois une pièce. Les résultats possibles sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de 0 et de 1, où $u_n = 0$ si on obtient « pile » au n-ième tirage, $u_n = 1$ si on obtient face au n-ième tirage.

En admettant que les événements élémentaires sont négligeables (nous le démontrons page 665), démontrer que l'événement E_n « obtenir « pile » à tous les tirages, sauf un » est négligeable.

Solution

L'événement « obtenir « pile » à chaque tirage, sauf au n-ième tirage » est un événement élémentaire : il est donc négligeable. Comme la probabilité est σ-additive, toute réunion finie ou dénombrable d'événements élémentaires est également négligeable. L'événement « obtenir « pile » à tous les tirages, sauf un » est la réunion dénombrable des événements E_n : il est donc également négligeable.

Définition – Propriété vraie presque sûrement

Une propriété Q est **vraie presque sûrement** si la probabilité qu'elle soit réalisée est égale à 1, c'est à dire :

$$P\left(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } Q(\omega) \text{ est vrai}\}\right) = 1$$

Un événement est **presque certain** s'il est de probabilité 1.

On peut utiliser l'abréviation « ps » pour « presque sûrement ».

Propriété – Toute réunion et toute intersection finie ou dénombrable d'événements presque certains est un événement presque certain.

Exemple – Processus de Bernoulli

Dans le cas du processus de Bernoulli, démontrer que les événements : « tirer au moins n fois pile » sont presque certains. D'après le théorème de la limite monotone, l'intersection de ces évènements : « tirer une infinité de pile » est donc également presque certaine. De même, l'événement « tirer une infinité de face » est presque certain, donc l'événement : « tirer une infinité de pile et une infinité de face » est presque certain.

Solution

Pour tout entier n, notons E_n les événements : « tirer au moins n piles ». Pour tout entier $N \geq n$, l'événement E_n contient l'événement $E_{n,N}$: « tirer au moins n piles lors des N premiers tirages ». Si $\overline{E_{n,N}}$ est l'événement contraire : « tirer moins de n piles lors des N premiers tirages », X, nombre de pile tirés lors des N premiers tirages, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$:

$$0 \leq P\left(\overline{E_{n,N}}\right) = P(X \leq n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$$

Or :

$$\binom{N}{k} = \frac{\overbrace{N(N-1)\dots(N-n+1)}^{n \text{ termes inférieurs ou égaux à } N}}{n!} \leq \frac{N^n}{n!} \leq \frac{N^n}{n}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Donc : $$P\left(\overline{E_{n,N}}\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{N}{k}\frac{1}{2^N}}_{n \text{ termes} \leq \frac{N^n}{n2^N}} \leq \frac{N^n}{2^N}$$

n étant fixé, calculons la limite lorsque $N \to +\infty$ de $P\left(\overline{E_{n,N}}\right)$. D'après les théorèmes de croissances comparées : $\frac{x^n}{2^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc : $\frac{N^n}{2^N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Par encadrement, nous en déduisons :

$$P\left(\overline{E_{n,N}}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

En passant au complémentaire :

$$P\left(E_{n,N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

Comme E_n contient l'événement $E_{n,N}$ pour tout $N \geq n$:

$$\forall N \geq n, \quad 1 \geq P(E_n) \geq P\left(E_{n,N}\right)$$

Par encadrement, lorsque $N \to +\infty$, nous en déduisons :

$$P(E_n) = 1$$

25.3 Probabilité conditionnelle

La théorie des probabilités conditionnelles sur les espaces probabilisés finis se transpose telle quelle pour les espaces probabilisés quelconques :

Définition – Probabilité conditionnelle
Si A est un événement de probabilité non nulle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La **probabilité conditionnelle** sachant A, notée P_A, est la probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.
La formules des probabilités composées reste vraie lorsque Ω est un ensemble infini :

Théorème – Formule des probabilités composées
Dans un arbre de probabilité, pour calculer la probabilité d'un nœud, on calcule le produit des probabilités conditionnelles des branches qui mènent à ce nœud.
Si $A_1, \ldots A_n$ sont n événements tels que

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right) \neq 0$$

la probabilité pour que tous les événements se réalisent simultanément est :

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right) \times P_{A_1}\left(A_2\right) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right)$$

Exemple – Processus de Bernoulli

Dans le cas du processus de Bernoulli, démontrer que les événements élémentaires sont de probabilité nulle.

Solution

Soit ω un événement élémentaire du processus de Bernoulli, c'est à dire les résultats successifs d'une suite infinie de tirage de « pile » ou « face ». Pour tout entier n, notons A_n l'événement : « les n premiers tirages sont exactement les n premiers résultats de ω ». Nous savons que :

$$P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{2}$$

est la probabilité que le résultat du n-ième tirage soit le résultat prédit par ω. Comme $\omega \in A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1$, d'après la formule des probabilités composées, nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(\{\omega\}) \leq P(A_n) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \underbrace{P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)}_{n \text{ termes égaux à } \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{1}{2^n} \to 0$. Par encadrement, nous concluons : $P(\{\omega\}) = 0$.

La formules des probabilités totales reste vraie pour un système complet fini d'événements, et se généralise au cas d'un système dénombrable.

Théorème – Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Si B est un événement, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$ est convergente et la probabilité totale de B se décompose :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$$

Lorsque $P(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité totale se déduit des probabilités conditionnelles :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B)$$

Remarque – Les événements $A_n \cap B$ étant deux à deux disjoints, la série de terme général $P(A_n \cap B) = P_{A_n}(B)P(A_n)$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées par $P(\Omega) = 1$: la série est donc convergente.

Exemple

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire successivement une boule dans l'urne : si la boule est blanche, on remet la boule et on rajoute une boule blanche, si elle est noire, on la remet dans l'urne sans rajouter d'autre boule. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au tirage suivant le premier tirage d'une boule noire ? On exprimera cette probabilité sous forme de série, sans chercher à en calculer la somme.

Solution

Commençons par vérifier que l'événement A_0 : « on ne tire jamais de boule noire » est de probabilité nulle. Soit B_n l'événement : « on ne tire aucune boule noire lors

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

des n-premiers tirages ». $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements tels que $A_0 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$, donc, par limite monotone :

$$P(A_0) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$$

Si on ne tire aucune boule noire lors des $n-1$ premiers tirages, au n-ième tirage, l'urne contient n boules blanches et une boule noire, donc :

$$P_{B_{n-1}}(B_n) = \frac{n}{n+1}$$

D'après la formule des probabilités composées, sachant que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements :

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)\dots P_{B_{n-1}}(B_n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\dots\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1\times 2\times\dots\times n}{2\times 3\dots\times(n+1)} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

donc $P(A_0) = 0$.

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ les événements : « la première boule noire est tirée au n-ième tirage ». $A_n = B_{n-1} \cap N_n$ où B_{n-1} l'événement : « on ne tire aucune boule noire lors des $n-1$ premiers tirages » et N_n désigne l'événement : « on tire une boule noire au n-ième tirage ». Si on ne tire aucune boule noire lors des $n-1$ premiers tirages, au n-ième tirage, l'urne contient n boules blanches et une boule noire, donc :

$$P_{B_{n-1}}(N_n) = \frac{1}{n+1}$$

Comme $P(B_{n-1}) = \frac{1}{n}$, nous en déduisons :

$$P(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements tous de probabilité non nulle, sauf A_0. D'après la formule des probabilités totales, si N est l'événement : « tirer une boule noire au tirage suivant le premier tirage d'une boule noire » :

$$P(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{A_n}(N)P(A_n)$$

Sachant A_n, au $n+1$-ième tirage, l'urne contient n boules blanches et une boule noire, donc $P_{A_n}(N) = \frac{1}{n+1}$, et on en déduit :

$$P(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

La formule de Bayes permet de calculer la probabilité d'une cause sachant la conséquence :

Théorème – Formule de Bayes
Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B se déduit de la probabilité conditionnelle de B sachant A :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Lorsque $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements tous de probabilité non nulle, la formule de Bayes s'écrit :

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n) \times P_{A_n}(B)}{\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) \times P_{A_k}(B)}$$

25.4 Indépendance

La notion d'indépendance d'événements sur un espace probabilisé fini se généralise aux espaces probabilisés quelconques :

Définition – Indépendance
Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Une famille finie ou dénombrable d'événement $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants** si, pour tout partie **finie** J de I,

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

En utilisant la formule du crible, nous pouvons vérifier que l'indépendance d'une famille d'événements entraîne l'indépendance des complémentaires :

Propriété – Indépendance des complémentaires
Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, la famille des complémentaires $\left(\overline{A_i}\right)_{i\in I}$ est également une famille d'événements mutuellement indépendants.

Démonstration
Vérifions le pour deux événements A et B. D'après les loi de de Morgan, l'intersection des complémentaires est le complémentaire de la réunion. En utilisant la formule du crible, nous en déduisons :

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - \underbrace{(P(A) + P(B) - P(A)P(B))}_{P(A\cup B)}$$
$$= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right) \quad \blacksquare$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Propriété – Indépendance et probabilité conditionnelle
Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si la probabilité conditionnelle de A sachant B est égale à la probabilité de A :

$$P_B(A) = P(A)$$

La notion d'indépendance se généralise également aux σ-algèbres :

Définition – Indépendance de σ-algèbres
Deux σ-algèbres d'événements d'un espace probabilisé sont **indépendantes** lorsque tout événement de l'une est indépendant de tout événement de l'autre.

Lorsque les σ-algèbres sont engendrées par des systèmes complets d'événements, on peut se contenter de vérifier que les événements qui engendrent les σ-algèbres sont indépendants :

Propriété – Indépendance de σ-algèbres
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux systèmes complets d'événements tels que, pour tout couple d'entiers k et ℓ, A_k et B_ℓ sont des événements indépendants, alors les σ-algèbres engendrées par $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des σ-algèbres indépendantes.

Synthèse

Savoirs

- notion de σ additivité,
- théorème de limite montone : la probabilité d'une suite croissante d'événements converge vers la probabilité de la réunion, la probabilité d'une suite décroissante d'événements converge vers la probabilité de l'intersection,
- événement négligeable, propriété vraie presque sûrement,
- indépendance d'une famille d'événements.

Savoir-faire

- Vérifier qu'une fonction définit bien une probabilité,
- Utiliser les propriétés de σ-additivité,
- Utiliser les formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.

Mots-clés

- Ensembles dénombrables,
- σ additivité, limite monotone,
- indépendance,
- formules des probabilités composées,
- formules des probabilités totales,
- formule de Bayes

Tests de connaissances

25.1 On lance successivement une pièce équilibrée une infinité de fois. Les événements : « ne jamais obtenir « pile » » et « ne jamais obtenir « face » » sont ils indépendants ?

25.2 À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la formule :

$$P(\{n\}) = \frac{a}{3^n}$$

définit-elle une probabilité sur $\mathbb{N}$?

25.3 À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la formule :

$$P(\{n\}) = \frac{2^n a}{n!}$$

définit-elle une probabilité sur $\mathbb{N}$?

25.4 Blaise lance une dé jusqu'à obtenir un 6. Quelle est la probabilité pour que Blaise continue à lancer indéfiniment son dé ?

25.5 Blaise lance une dé jusqu'à obtenir un 6. S'il obtient 6 au n-ième lancé, il remporte n€. Sachant que Blaise a gagné 10€ ou moins, quelle est la probabilité qu'il ait tiré 6 au premier lancer ?

1) $\frac{1}{10}$

2) $\frac{1}{6}$

3) $\frac{6^9}{6^{10} - 5^{10}}$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 671.

25.6

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

1) a) Si A et B sont des événements négligeables, montrer que $A \cup B$ est encore négligeable.

b) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements négligeables, montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est encore négligeable.

2) a) Si A et B sont des événements presque-sûrs, montrer que $A \cap B$ est presque-sûr.

b) Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements presque-sûrs, montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est presque-sûr.

25.7

On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et « face » avec la probabilité q. On considère une suite infinie de jets indépendants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements F_n : « on obtient « face » au n-ième lancer » et R_n : « on obtient le premier « face » au n-ième lancer ».

1) Donner une définition simple et comparer les événements :

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \quad \text{et} \quad R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} R_n$$

2) Calculer $P(R)$.

3) Justifier les inclusions $R_n \subset F_n \subset R_1 \cup \cdots \cup R_n$.

25.8

Pascal propose à Blaise un pari au jeu de pile ou face. Au premier tour du pari, Blaise lance une pièce de monnaie. Si la pièce tombe sur « pile », Blaise a remporté le pari. Sinon, il lance deux pièces de monnaies : si les deux pièces tombent sur « pile », Blaise remporte le pari de Pascal, sinon, il continue avec trois pièces.

Au n-ième tour, si le jeu n'est toujours pas terminé, il lance n pièces de monnaie équilibrées et l'emporte si toutes les pièces tombent sur « pile ».

Soit A_n l'événement « à l'issue du n-ième tour, Blaise n'a toujours pas remporté le pari de Pascal ».

1) Déterminer $P(A_n)$.

2) Montrer que $\ln(P(A_n))$ est la somme partielle d'une série convergente.

3) En déduire que Pascal a une probabilité non nulle de remporter le pari.

25.9

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « pile ». n étant le nombre de lancers effectués, on remplit une urne avec 3^n boules dont une de couleur blanche et les autres de couleurs noire, et on procède à un tirage d'une boule dans cette urne.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

2) On obtient une boule blanche. Quelle est la probabilité que la pièce ait donnée « Pile » du premier coup ?

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exercices d'approfondissement

25.10

Un pion évolue sur 3 cases A, B, C. À l'instant $t = 0$, il est en A. Puis, il se déplace de façon aléatoire sur les cases en respectant les règles suivantes :

- s'il est en A ou B à l'instant $t = n$, il va à l'instant suivant sur l'une des deux autres cases de façon équiprobable.
- s'il est en C à l'instant $t = n$, il y reste. On dit que la case C est une case *absorbante*

Notons A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement « à l'instant $t = n$, le pion est sur la case A (respectivement sur les cases B et C) » et notons $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1) Trouver des relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}.

2) Calculer c_n en fonction de n puis trouver

$$\lim_{n\to+\infty} c_n$$

3) On veut montrer que l'événement E=« le pion atteint la case C » est presque-sûr.

a) Montrer que pour tout n, $\overline{E} \subset \left(A_n \cup B_n\right)$.

b) Conclure.

25.11

Deux joueurs A et B lancent un dé équilibré. A joue le premier : s'il obtient le nombre « 1 », il gagne, sinon B joue : si B obtient le nombre « 2 » ou « 3 », il gagne, sinon A rejoue…

On introduit les événements U_i : « le i-ème lancer de A donne un 1 » et V_i : « le i-ème lancer de B donne un 2 ou un 3 ».

1) Calculer $P(U_i)$ et $P(V_i)$.

2) Quelle est la probabilité que A gagne.

3) Vérifier que presque-sûrement, le jeu s'arrête.

25.12 ◎

Un joueur effectue une série de paris mutuellement indépendants. À chaque pari, il gagne 1€ avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et perd 1€ avec la probabilité $q = 1 - p$. Le jeu prend fin quand le joueur est ruiné ou quand il a accumulé N€ ($N \geq 3$ fixé).

Notons u_k la probabilité de ruine du joueur lorsqu'il possède une somme de k€ au départ.

1) Nous supposons dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$.

a) Calculer u_0 et u_N.

b) Montrer que $u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}$.

c) En déduire que

$$u_k = \frac{(\frac{q}{p})^k - (\frac{q}{p})^N}{1 - (\frac{q}{p})^N}$$

d) Que se passe t-il quand $N \to +\infty$? On distinguera deux cas : $p < \frac{1}{2}$ et $p > \frac{1}{2}$.

2) Étudier le cas $p = \frac{1}{2}$.

25.13 ◎

Un magasin possède n caisses. Les clients se répartissent de façon indépendante et équiprobable entre les n caisses. On note A_k l'événement : « il y a k clients dans le magasin ». On suppose que que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(A_k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$$

où $\lambda > 0$ est fixé.

1) Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = 1$$

2) On note B_m l'événement « m clients sortent par la caisse n°1 ». Calculer $P(B_m)$ pour tout entier m.

3) La caisse n°1 a vu passer m clients un jour donné. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu dans le magasin nm clients ?

25.14 ◎

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1) On suppose que la série $\sum P(A_n)$ est convergente. Montrer que l'événement

$$B = \bigcap_{n\geq 0}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

est de probabilité nulle.

2) On suppose que la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants et que la série $\sum P(A_n)$ est divergente.

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq \exp(-x)$.

b) On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$$

Montrer que $P(C_n) = 0$ pour tout n.

c) En déduire que l'événement B défini à la question 1 est presque sûr.

25.15

Considérons une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » est $p \in]0, 1[$ et la probabilité d'obtenir « face » est $q = 1 - p$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et E_n l'événement : « la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n ». Nous savons que $P(E_0) = 0$, $P(E_1) = 0$ et $P(E_2) = pq$.

En décomposant l'événement E_n, justifier l'égalité :

$$P(E_n) = \sum_{j=1}^{n-1} p^j q^{n-j}$$

En déduire une expression simplifiée de $P(E_n)$ en fonction de p et q.

2) Notons B l'événement : « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FP » et, si $n \geq 2$, notons B_n l'événement : « la première séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, et il n'y a pas eu avant de séquence FP ».

Quelle relation y-a-t-il entre l'événement B et les événements B_n ?

Calculer $P(B_n)$ et en déduire $P(B)$.

3) Notons C l'événement : « la première séquence PP apparaît avant la première séquence FF » et C_n : « la première séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, et il n'y a pas eu avant de séquence FF ».

Décomposer C_n en événements élémentaires selon la parité de n.

Calculer $P(C_n)$ et en déduire $P(C)$.

Indications

25.12 Question 1.b : on pourra utiliser le résultat du premier pari.

Question 2 : l'équation caractéristique associée à la suite récurrente linéaire admet pour racines 1 et $\frac{q}{p}$.

25.13 Question 2 : introduire un système complet d'événements lié au nombre de clients en magasin.

25.14 Question 1 : B est l'intersection des événements $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$: il est donc inclus dans chaque événement B_n. Pour démontrer que B est de probabilité nulle, il suffit de démontrer que la probabilité de B_n, qui est la réunion des A_k pour $k \geq n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Question 2.b : C_n est une intersection dénombrable d'événements. En particulier, C_n est inclus dans les intersections finies $C_n^p = \bigcap_{k=n}^{p} \overline{A_k}$. En utilisant l'indépendance des $\overline{A_k}$, puis l'inégalité de la question 2.a. on pourra vérifier que la probabilité des intersections finies C_n^p a une limite nulle lorsque $p \to +\infty$.

Question 2.c : on pourra comparer le complémentaire de B et la réunion des événements de probabilité nulle C_n pour conclure que $\overline{B}$ est négligeable.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

25.1 Nous avons vérifié dans le cours que les événements A : « ne jamais obtenir « pile » » et B : « ne jamais obtenir « face » » sont négligeable. $P(A) = P(B) = 0$, $A \cap B = \emptyset$ donc $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$. Les événements A et B sont donc indépendants.

25.2 Il faut vérifier que la probabilité totale est égale à 1. En faisant la somme de la série géométrique de premier terme a, de raison $\frac{1}{3}$, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{3^n} = a\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3a}{2}$$

La probabilité totale est donc : $\frac{3a}{2} = 1$, et nous en déduisons : $a = \frac{2}{3}$.

25.3 Il faut vérifier que la probabilité totale est égale à 1. Nous reconnaissons la somme d'une série exponentielle, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n a}{n!} = a\exp(2)$$

La probabilité totale est donc : $a\exp(2) = 1$, et nous en déduisons : $a = \exp(-2)$.

25.4 Notons A l'événement : « ne jamais obtenir 6 » et A_n l'événement : « ne jamais obtenir 6 lors des n premiers lancers ». Les lancers étant indépendants, la probabilité pour que Blaise lance n fois le dé sans obtenir une seule fois 6 est :

$$P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Nous savons que pour tout $n \geq 1$, $A \subset A_n$, donc $0 \leq P(A) \leq P(A_n)$. Lorsque $n \to +\infty$ nous en déduisons par encadrement : $P(A) = 0$. La probabilité pour que Blaise continue à lancer indéfiniment son dé est donc nulle.

25.5 La réponse 3 est correcte. Notons S_k l'événement : « Blaise tire 6 au k-ième tirage » et G_{10} l'événement : « Blaise tire 6 lors de l'un des 10 premiers tirages ». Nous devons calculer la probabilité de S_1 sachant G_{10}. D'après la formule de Bayes :

$$P_{G_{10}}(S_1) = \frac{P(S_1 \cap G_{10})}{P(G_{10})} = \frac{P(S_1)}{1 - P\left(\overline{G_{10}}\right)}$$

La probabilité de $G_{10} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{10}$ se calcule en passant au complémentaire :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{10} S_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{10} \overline{S_k}\right)$$

Les événements $\overline{S_k}$: « Blaise ne tire pas 6 au k-ième tirage » sont mutuellement indépendants, donc :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{10} S_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{10} P\left(\overline{S_k}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

Donc :

$$P_{G_{10}}(S_1) = \frac{1/6}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}} = \frac{6^9}{6^{10}-5^{10}}$$

25.6

1) a) D'après la formule du crible :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &\leq P(A) + P(B) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements négligeables. Notons $B_n = \bigcup_{0\leq k\leq n} A_k$. Nous pouvons démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que B_n est de probabilité nulle : $B_0 = A_0$ est en effet presque impossible, et $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$ est de probabilité nulle car réunion de deux événements de probabilité nulle.

Puisque $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ est une suite croissante d'événements, d'après le théorème de limite monotone :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = 0$$

2) a) Si A et B sont des événements presque-sûrs, les complémentaires sont de probabilité nulle :

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{B}\right) = 0$$

donc, d'après la question 1 :

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0$$

En passant au complémentaire :

$$P\left(A \cap B\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 1$$

Donc $A \cap B$ est presque-sûr.

b) Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements presque-sûrs, les complémentaires sont de probabilité nulle :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P\left(\overline{B_k}\right) = 0$$

donc, d'après la question 1 :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}\right) = 0$$

En passant au complémentaire :

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}\right) = 1$$

Donc $\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$ est presque-sûr.

25.7

1) Les événements : $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ et $R = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} R_m$ sont identiques. Il s'agit de l'événement : « obtenir au moins une fois « face » ».

En effet : si l'un ou l'autre événement est réalisé, on obtient au moins une fois « face », soit qu'on obtienne « face » au n-ième lancer, pour un entier n, soit qu'on obtienne « face » pour la première fois au m-ième lancer, pour un entier m.

Réciproquement, si $\omega \in \Omega$ appartient à l'événement : « obtenir au moins une fois « face » », notons n l'instant où on tire « face » pour la première fois. Alors $\omega \in F_n \subset F$ et $\omega \in R_n \subset R$.

2) Les événement $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, donc la probabilité de la réunion est la somme de la série des probabilités :

$$P(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R_n)$$

Les lancers sont mutuellement indépendants, donc :

$$P(R_{n+1}) = P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_n} \cap F_{n+1}\right)$$

$$= \underbrace{P\left(\overline{F_1}\right) P\left(\overline{F_2}\right) \ldots P\left(\overline{F_n}\right)}_{n \text{ facteurs égaux à } p} \underbrace{P(F_{n+1})}_{q} = p^n q$$

Donc :

$$P(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} q$$

Nous calculons la somme de la série géométrique de premier terme q, de raison p :

$$P(R) = q\left(\frac{1}{1-p}\right) = 1 \text{ car } 1 - p = q$$

3) L'événement R_n : « on obtient le premier « face » au n-ième lancer » réalise F_n : « on obtient « face » au n-ième lancer », donc $R_n \subset F_n$.

Si l'événement F_n : « on obtient « face » au n-ième lancer » est réalisé, alors on sait que le premier « face » est obtenu à ce lancer ou à un lancer précédent, donc l'événement : « on obtient le premier « face » k-ième lancer » est réalisé pour une valeur de $k \leq n$, donc $F_n \subset R_1 \cup \cdots \cup R_n$.

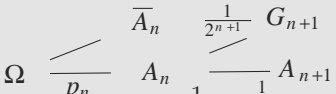
25.8

1) Notons $p_n = P(A_n)$ et G_n l'événement : « Blaise remporte le pari de Pascal à l'issue du n-ième tour ». Sachant A_n, Blaise l'emporte à l'issue du $n+1$-ième tour si les $n+1$ pièces tombent sur « pile ». Notons $P_{k,n+1}$ l'événement : « la k-ième pièce donne « pile » au $n+1$-ième lancer ».

$$P_{A_n}(G_{n+1}) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} P_{k,n+1}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1} P\left(P_{k,n+1}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

La situation peut alors se modéliser avec l'arbre de probabilité :



D'après la formule des probabilités composées, nous en déduisons :

$$p_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) p_n$$

De plus, nous savons que Blaise l'emporte au premier tour si la première pièce lancée tombe sur « pile » :

$$p_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$$

Nous en déduisons donc par récurrence sur $n \geq 1$:

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

2) Notons $S_n = \ln(P(A_n))$. S_n est la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où :

$$\begin{cases} u_1 = \ln(p_1) \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln(p_{n+1}) - \ln(p_n) \end{cases}$$

D'après la question 1, nous savons que, pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2^{n+1}}$$

La série $\sum -\frac{1}{2^{n+1}}$ est une série géométrique absolument convergente, donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente, donc convergente. Nous en déduisons qu'il existe un réel ℓ tel que :

$$\ln(P(A_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

c'est à dire :

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\ell)$$

3) L'événement A : « Pascal remporte son pari ». A est réalisé lorsque Blaise est toujours perdant à l'issue du n-ième tour pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire :

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

qui est l'intersection d'une suite décroissante d'événements. Nous savons donc que la probabilité de A est la limite des probabilités de A_n. D'après la question 2, il existe un réel ℓ tel que :

$$P(A) = \exp(\ell)$$

donc $P(A) = \exp(\ell) \neq 0$. Pascal a donc bien une probabilité non nulle de remporter son pari.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

25.9

1) Notons P_n l'événement : « obtenir le premier pile au n-ième lancer », P_∞ l'événement : « ne jamais obtenir pile », B_n l'événement : « lancer n fois la pièce avant d'obtenir « pile », puis tirer une boule blanche », N_n l'événement : « lancer n fois la pièce avant d'obtenir « pile », puis tirer une boule noire ».

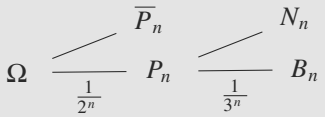
Vu l'indépendance des lancers :

$$P(P_n) = \frac{1}{2^n}$$

Sachant P_n, on tire une boule dans une urne contenant 3^n boules dont 1 blanche :

$$P_{P_n}(B_n) = \frac{1}{3^n}$$

Nous pouvons donc résumer les hypothèses par l'arbre de probabilité :



et en déduire, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(B_n) = \frac{1}{2^n 3^n} = \frac{1}{6^n}$$

Soit B l'événement : « tirer une boule blanche ». $(P_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap P_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6^n} \end{aligned}$$

Nous devons calculer la somme de la série géométrique de premier terme $\frac{1}{6}$ de raison $\frac{1}{6}$:

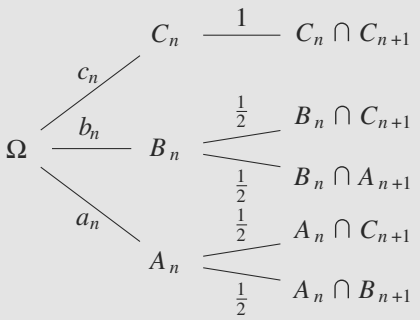
$$P(B) = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}$$

2) D'après la formule de Bayes, la probabilité d'avoir obtenu « pile » au premier coup sachant que l'on obtient une boule blanche est :

$$\begin{aligned} P_B(P_1) &= \frac{P(B \cap P_1)}{P(B)} = \frac{P(B_1)}{P(B)} \\ &= \frac{1/6}{1/5} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

25.10

1) Les hypothèses de l'énoncé peuvent se résumer par l'arbre de probabilité, qui décrit l'évolution possible entre l'instant n et $n+1$:



(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements ; la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) = \underbrace{P(A_{n+1} \cap A_n)}_{0} + \underbrace{P(A_{n+1} \cap B_n)}_{\frac{b_n}{2}} \\ + \underbrace{P(A_{n+1} \cap C_n)}_{0} = \frac{b_n}{2} \end{aligned}$$

De même, nous obtenons :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{b_n}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} \\ c_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{b_n}{2} + c_n \end{cases}$$

2) Si nous posons $d_n = a_n + b_n$, nous savons que $d_0 = 1$ car le pion est sur la case A à l'instant 0, que $c_n = 1 - d_n$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = \frac{d_n}{2}$$

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1, de raison $\frac{1}{2}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \frac{1}{2^n}$$

Nous en déduisons :

$$c_n = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

3) Soit E l'événement « le pion atteint la case C ».

a) Comme la case C est absorbante, si le point atteint C, il y reste. Si l'événement complémentaire $\overline{E}$ est réalisé, le point n'atteint jamais C. En particulier, à l'instant n, le pion est soit sur A, soit sur B, donc l'événement $A_n \cup B_n$ est réalisé, c'est à dire :

$$\overline{E} \subset \left(A_n \cup B_n\right)$$

b) Nous avons calculé :

$$P\left(A_n \cup B_n\right) = d_n = \frac{1}{2^n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E} \subset \left(A_n \cup B_n\right)$, donc :

$$0 \leq P(\overline{E}) \leq P\left(A_n \cup B_n\right) = \frac{1}{2^n}$$

Par encadrement, lorsque $n \to +\infty$, nous obtenons :

$$0 \leq P(\overline{E}) \leq 0$$

donc $\overline{E}$ est de probabilité nulle, c'est à dire : E est presque sûr.

25.11

1) On lance un dé équilibré. Les 6 issues possibles sont équiprobables, donc :

$$P(U_i) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(V_i) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2) Soit A_i l'événement : « A l'emporte à l'issue de son i-ème lancer » B_i l'événement : « B l'emporte à l'issue de son i-ème lancer » et C_i l'événement : « ni A, ni B ne l'emporte à l'issue de leur i-ème lancer ».

La probabilité de A_{i+1} sachant C_i est la probabilité pour A d'obtenir 1 au $i+1$-ème lancer :

$$P_{C_i}(A_{i+1}) = \frac{1}{6}$$

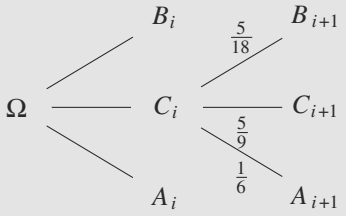
La probabilité de B_{i+1} sachant C_i est la probabilité que A échoue, multipliée par celle que B obtienne 2 ou 3 au $i+1$-ème lancer :

$$P_{C_i}(B_{i+1}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

La probabilité de C_{i+1} sachant C_i est la probabilité que A et B échouent :

$$P_{C_i}(C_{i+1}) = 1 - P_{C_i}(A_{i+1}) - P_{C_i}(B_{i+1}) = \frac{5}{9}$$

Nous pouvons résumer les hypothèses par l'arbre de probabilités :



D'après la formule des probabilités composées :

$$P(C_{i+1}) = P_{C_i}(C_{i+1})P(C_i) = \left(\frac{5}{9}\right)P(C_i)$$

La suite $(P(C_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme $P(C_1) = \frac{5}{9}$, de raison $\frac{5}{9}$, donc :

$$\forall i \geq 1, \quad P(C_i) = \left(\frac{5}{9}\right)^i$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(A_{i+1}) = P_{C_i}(A_{i+1})P(C_i) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{9}\right)^i$$

La suite $(P(A_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de premier terme $P(A_1) = \frac{1}{6}$, de raison $\frac{5}{9}$. L'événement G_A : « A gagne » est la réunion disjointe des événements A_i, pour i variant de 1 à $+\infty$. La probabilité de G_A est donc la somme des probabilités :

$$P(G_A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Nous calculons la somme de la série géométrique de premier terme $P(A_1) = \frac{1}{6}$, de raison $\frac{5}{9}$, donc :

$$P(G_A) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{5}{9}}\right) = \frac{3}{8}$$

3) Le complémentaire de l'événement S : « le jeu s'arrête » est inclus dans l'événement C_i : « ni A, ni B n'ont encore gagné à l'issue de leur i-ème lancer » pour tout $i \in \mathbb{N}$. Donc :

$$P(\overline{S}) \leq P(C_i)$$

Lorsque $i \to +\infty$,

$$P(C_i) = \left(\frac{5}{9}\right)^i \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$$

donc $\overline{S}$ est de probabilité nulle. En passant au complémentaire, nous en déduisons que S est un événement presque certain.

25.12

1) On suppose $p \neq \frac{1}{2}$.

a) Quand le joueur possède 0€ au départ, il est déjà ruiné, donc $u_0 = 1$.

Lorsqu'il possède N€, il a déjà accumulé la somme fixée et ne joue pas, donc $u_N = 0$.

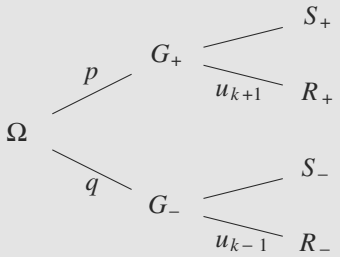
b) Notons G_+ l'événement : « remporter le premier pari », R_+ l'événement : « finir ruiné, après avoir remporté le premier pari » S_+ l'événement : « ne pas finir ruiné, après avoir remporté le premier pari », G_-, R_- et S_- les événements correspondant lorsque l'on perd le premier pari.

Si G_+ est réalisé, le joueur possède $k+1$€ à l'issue du premier pari. La probabilité de finir ruiné sachant G_+ est donc égale à u_{k+1}.

De même, si G_- est réalisé, le joueur possède $k-1$€ à l'issue du premier pari. La probabilité de finir ruiné sachant G_- est donc égale à u_{k-1}.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Nous pouvons résumer par l'arbre de probabilité :



(G_+, G_-) est un système complet d'événements. Si R est l'événement : « le joueur finit ruiné », d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_k &= P(R \cap G_+) + P(R \cap G_-) \\ &= P_{G+}(R_+)P(G_+) + P_{G_-}(R_-)P(G_-) \\ &= pu_{k+1} + qu_{k-1} \end{aligned}$$

c) La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, qui vérifie :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_N = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1} \end{cases}$$

Une suite géométrique $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence si et seulement ρ est racine du trinôme :

$$\rho = p\rho^2 + q \quad \text{c'est à dire :} \quad \rho = p\rho^2 + 1 - p$$

ou encore :

$$\rho - 1 = p\left(\rho^2 - 1\right) = p(\rho - 1)(\rho + 1)$$

Donc, en regroupant et en factorisant par $\rho - 1$:

$$(\rho - 1)\underbrace{(1 - p(\rho + 1))}_{(1-p)-p\rho=q-p\rho} = 0$$

qui a pour racines $\rho = 1$ et $\rho = \dfrac{q}{p}$.

Nous en déduisons que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites géométriques de raison 1 et $\dfrac{q}{p}$. Il existe donc a et b tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = a + b\left(\frac{q}{p}\right)^k$$

Comme $u_N = 0$, nous savons que $a = -b(\frac{q}{p})^N$. De plus, $u_0 = 1$, donc $a + b = 1$, c'est à dire :

$$b\left(1 - (\frac{q}{p})^N\right) = 1$$

Nous en déduisons donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \frac{(q/p)^k - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}$$

d) i. Lorsque $p < 1/2$, si nous posons $x = p/q$, nous savons que $x < 1$ et nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{\frac{1}{x^k} - \frac{1}{x^N}}{1 - \frac{1}{x^N}} \\ &= \frac{x^{N-k} - 1}{x^N - 1} \end{aligned}$$

Comme $0 < x < 1$, nous concluons :

$$u_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$$

La ruine est presque sûre lorsque le joueur cherche à remporter N € lorsque $N \to +\infty$ si le jeu est défavorable.

ii. Lorsque $p > 1/2$, si nous posons $x = q/p$, nous savons que $x < 1$ et nous pouvons écrire :

$$u_k = \frac{x^k - x^N}{1 - x^N}$$

Comme $0 < x < 1$, nous concluons :

$$u_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} x^k$$

Le joueur a donc une probabilité non nulle de remporter N € lorsque $N \to +\infty$ si le jeu est favorable.

2) Lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, le raisonnement des questions 1.a et 1.b reste valable. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, qui vérifie :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_N = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = \dfrac{u_{k+1} + u_{k-1}}{2} \end{cases}$$

c'est à dire : $u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = 0$. L'équation caractéristique associée à la récurrence linéaire admet 1 pour racine double, donc il existe a et b tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = a + bk$$

Comme $u_N = 0$, $a = -bN$. De plus, $u_0 = 1$, donc $-bN = 1$, et nous concluons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \frac{N - k}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

La ruine est donc presque sûre lorsque le joueur cherche à remporter N € lorsque $N \to +\infty$ si le jeu est équilibré.

25.13

1) Vérifions que la probabilité totale est égale à 1 en calculant :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

En factorisant par $\exp(-\lambda)$, nous reconnaissons une série exponentielle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \exp(-\lambda) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\exp(\lambda)} = 1$$

2) La famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(B_m) P(A_k)$$

Les clients se répartissent de façon indépendante et équiprobable entre les n caisses. Sachant qu'il y a k clients dans le magasin, le nombre de clients qui sortent par la caisse n°1 suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$ où $p = \frac{1}{n}$ est la probabilité, pour chaque client, de sortir par la caisse n°1.

Nous en déduisons (en notant $q = 1 - p$) :

$$P_{A_k}(B_m) = \binom{k}{m} p^m q^{k-m}$$

$$P(B_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(B_m) P(A_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{m} p^m q^{k-m} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

$\binom{k}{m}$ est nul lorsque $k < m$, donc :

$$P(B_m) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{m!(m-k)!} p^m q^{k-m} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

Nous pouvons simplifier par $k!$ et factoriser :

$$P(B_m) = \frac{p^m}{m!} \lambda^m \exp(-\lambda) \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{k-m}}{(m-k)!}$$

En posant $\ell = k - m$, nous reconnaissons une série exponentielle :

$$P(B_m) = \frac{p^m}{m!} \lambda^m \exp(-\lambda) \underbrace{\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{\ell}}{\ell!}}_{\exp(q\lambda)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^m}{m!} \underbrace{\exp(-\lambda) \exp(q\lambda)}_{\exp(-(1-q)\lambda) = \exp(-p\lambda)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^m}{m!} \exp(-p\lambda) \quad \text{où } p = \frac{1}{n}$$

3) D'après la formule de Bayes, la probabilité qu'il y ait eu dans le magasin nm clients sachant que la caisse n°1 a vu passer m clients un jour donné est :

$$P_{B_m}(A_{nm}) = \frac{P(B_m \cap A_{nm})}{P(B_m)}$$

où :

$$P(B_m \cap A_{nm}) = P_{A_{nm}}(B_m) P(A_{nm})$$

$$= \binom{nm}{m} p^m q^{(n-1)m} \frac{\lambda^{nm}}{(nm)!} \exp(-\lambda)$$

En développant le coefficient binomial, les termes $(nm)!$ se simplifient. Comme $\lambda^{nm} = \lambda^m \lambda^{(n-1)m}$ et $\exp(-\lambda) = \exp(-p\lambda)\exp(-q\lambda)$ nous pouvons regrouper :

$$P(B_m \cap A_{nm}) = \underbrace{\frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-p\lambda}}_{P(B_m)} \frac{(\lambda q)^{(n-1)m}}{((n-1)m)!} e^{-q\lambda}$$

Donc :

$$P_{B_m}(A_{nm}) = \frac{(\lambda q)^{(n-1)m}}{((n-1)m)!} e^{-q\lambda} \quad \text{où } q = 1 - \frac{1}{n}$$

25.14

1) B est l'intersection des événements $B_n = \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$. En particulier, $B \subset B_n$ pour tout entier n, et :

$$P(B) \leq P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

La probabilité d'une réunion est inférieure ou égale à la somme des probabilités. Donc :

$$P(B) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$$

Le terme de droite est le reste de la série convergente $\sum P(A_n)$: il converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Nous en déduisons que l'événement B est négligeable.

2) On suppose que la famille $(A_n)_n$ est indépendante et que la série $\sum P(A_n)$ est divergente.

a) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $x \mapsto \exp(-x) - (1 - x)$. Remarquons que $f(0) = 0$ et que f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$, de dérivée successives :

$$f'(x) = -\exp(-x) + 1 = 0 \text{ lorsque } x = 0$$

$$f''(x) = \exp(-x) > 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ est donc :

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	
$f(x)$		+	

Et nous pouvons conclure, pour tout $x \geq 0$:

$$1 - x \leq \exp(-x)$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$ définissons

$$C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \text{ et } C_n^p = \bigcap_{k=n}^{p} \overline{A_k}$$

Comme $C_n = C_n^p \cap \left(\bigcap_{k=p+1}^{\infty} \overline{A_k} \right)$, nous savons que $C_n \subset C_n^p$, donc :

$$\forall p \geq n, \quad P(C_n) \leq P\left(C_n^p\right)$$

Les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, donc les complémentaires sont également mutuellement indépendants. Nous pouvons donc calculer :

$$\begin{aligned} P\left(C_n^p\right) &= \prod_{k=n}^{p} P\left(\overline{A_k}\right) \\ &= \prod_{k=n}^{p} \left(1 - P(A_k)\right) \end{aligned}$$

D'après la question 2.a, $1 - P(A_k) \leq \exp(-P(A_k))$, donc :

$$\begin{aligned} P\left(C_n^p\right) &= \prod_{k=n}^{p} P\left(\overline{A_k}\right) \\ &= \prod_{k=n}^{p} \exp(-P(A_k)) \\ &= \exp\left(- \sum_{k=n}^{p} P(A_k) \right) \end{aligned}$$

La série $\sum_k P(A_k)$ est une série à termes positifs, divergente, donc de limite $+\infty$. En composant avec la fonction $x \mapsto \exp(-x)$, qui a une limite nulle en $+\infty$, nous pouvons conclure :

$$P\left(C_n^p\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Comme $P(C_n) \leq P\left(C_n^p\right)$ pour tout $p \geq n$, nous en déduisons :

$$P(C_n) = 0$$

Donc C_n est un événement de probabilité nulle.

c) B est l'intersection des événements $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, donc son complémentaire est la réunion des complémentaires :

$$\overline{B}_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} = C_n$$

Les événements $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de probabilité nulle, donc leur réunion (qui est le complémentaire de B) est de probabilité nulle. Puisque le complémentaire de B est de probabilité nulle, nous en déduisons que B est un événement presque certain.

25.15

1) Soit $k \leq n-2$ et $E_{n,j}$ l'événement : « on tire j « pile » entre l'instant 1 et n, et la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n ».

Puisque PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, on commence par tirer des « face », puis des « pile », avant de tirer « face » au n-ième lancer. Les n premiers lancers sont donc :

- « face » aux $n-1-j$ premiers lancers,
- « pile » aux j lancers suivants,
- « face » au n-ième lancer

Les lancers sont indépendants, donc la probabilité correspondante est :

$$P(E_{n,j}) = q^{n-1-j} p^j q = p^j q^{n-j}$$

Les événements $E_{n,j}$ sont deux à deux incompatibles, leur réunion (pour j variant de 1 à $n-1$) est l'événement E_n. La probabilité de la réunion d'événements deux à deux incompatibles est la somme des probabilités, donc :

$$P(E_n) = \sum_{j=1}^{n-1} p^j q^{n-j}$$

Nous calculons la somme des $n-1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme pq^{n-1}, de raison p/q, donc :

$$\begin{aligned} P(E_n) &= pq^{n-1} \left(\frac{1 - (p/q)^{n-1}}{1 - (p/q)} \right) \\ &= pq \left(\frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q - p} \right) \end{aligned}$$

2) Notons B l'événement : « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FP » et, si $n \geq 2$, notons B_n l'événement : « la première séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, et il n'y a pas eu avant de séquence FP ».

L'événement B est la réunion disjointe des événements B_n. En particulier :

$$P(B) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(B_n)$$

Si $\omega \in B_n$, comme il n'y a pas de séquence FP avant que la séquence PF apparaisse pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, nous savons que les n premiers lancers sont :

- « pile » aux $n-1$ premiers lancers,
- « face » au n-ième lancer.

Donc : $P(B_n) = p^{n-1}q$ et nous pouvons calculer :

$$P(B) = \sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1}q$$

Nous calculons la somme de la série géométrique de premier terme pq, de raison p, donc :

$$P(B) = pq\left(\frac{1}{1-p}\right) = p \quad \text{car } 1-p = q$$

Nous pouvons interpréter ce résultat, en constatant que l'événement B est également l'événement : « obtenir « pile » au premier tirage » auquel on a retiré l'événement de probabilité nulle : « obtenir « pile » à tous les tirages ».

3) Notons C l'événement : « la première séquence PP apparaît avant la première séquence FF » et C_n : « la première séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, et il n'y a pas eu avant de séquence FF ».

De même que pour la question 3, C est la réunion disjointe des événements C_n (pour $n \geq 2$), donc :

$$P(C) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n)$$

Si $\omega \in C_n$, comme il n'y a pas de séquence FF avant que la séquence PP apparaisse pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, nous savons que les premiers lancers sont une alternance de « pile » et de « face », suivi de deux piles.

Si $n = 2k$ est pair, la suite des n premiers lancers est : $\underbrace{(PF)(PF)\dots(PF)}_{k-1 \text{ termes}}(PP)$ et on a donc :

$$P(C_{2k}) = (pq)^{k-1}p^2 = \frac{p}{q}(pq)^k$$

Si $n = 2k+1$ est impair, la suite des n premiers lancers est : $F\underbrace{(PF)(PF)\dots(PF)}_{k-1 \text{ termes}}(PP)$ et on a donc :

$$P(C_{2k+1}) = q(pq)^{k-1}p^2 = p(pq)^k$$

En faisant la somme pour n variant de 2 à $+\infty$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} P(C) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(C_{2k}) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(C_{2k+1}) \\ &= \left(\frac{p}{q} + p\right)\sum_{k=1}^{+\infty}(pq)^k \end{aligned}$$

Nous calculons la somme de la série géométrique de premier terme pq, de raison pq, donc :

$$P(C) = \left(\frac{p}{q} + p\right)pq\left(\frac{1}{1-pq}\right) = p^2\left(\frac{1+q}{1-pq}\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Variables aléatoires infinies

CHAPITRE 26

Plan

26.1 Variable aléatoire discrète 680
26.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire 683
26.3 Lois usuelles 688
Synthèse 695
Tests et exercices 696
Corrigés des exercices 699

Prérequis

- Probabilités infinies
- Variables aléatoires finies

Objectifs

- Définir la loi d'une variable aléatoire infinie et étendre aux variables infinies les caractéristiques de position (espérance) et de dispersion (variance)
- Étudier les lois infinies usuelles : loi géométrique, loi de Poisson.

26.1 Variable aléatoire discrète

26.1.1 Définition

Définition – Variable aléatoire discrète

Une **variable aléatoire discrète** $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ qui prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n :

$$X^{-1}(x_n) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_n\}$$

est un événement de la σ-algèbre $\mathcal{A}$.

Énumération des valeurs d'une variable aléatoire discrète

Si X est une variable aléatoire finie, on peut énumérer les éléments de $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \left\{ x_i \,\middle|\, i \in [\![1, n]\!] \right\}$$

où les x_i sont ordonnés : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

Par contre, si X est une variable discrète infinie, on ne peut pas nécessairement ordonner les éléments de $X(\Omega)$. En pratique, les variables discrètes seront à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou un sous ensemble de $\mathbb{N}$ et on pourra toujours supposer $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \ldots$.

Définition – Système complet et sigma algèbre associés

Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$:

- La famille $\{X = x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements,
- La σ-algèbre engendrée par la famille $\{X = x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée **σ-algèbre associée** à la variable aléatoire X et notée $\mathcal{A}_X$.

Remarque – Événement $X \in A$

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, si on note I l'ensemble des entiers n tels que $x_n \in A$, alors l'événement :

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \,|X(\omega) \in A\}$$

est un événement de la σ-algèbre $\mathcal{A}_X$, puisque réunion finie ou dénombrable d'événement de $\mathcal{A}_X$:

$$\{X \in A\} = \bigcup_{i\in I} \{X = x_i\}$$

On décrit ainsi tous les événements de la σ-algèbre associée à la variable aléatoire X.

26.1.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition – Loi d'une variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. La **loi** de X est la fonction $\mathcal{L}$: $X(\Omega) \to [0, 1]$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}(x_i) = P(X = x_i)$$

Propriété

Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ la loi de X vérifie :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i) = 1$$

Réciproquement, si $\mathcal{L}$: $(x_1, \ldots, x_n \ldots) \to [0, 1]$ est une fonction vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{L}(x_i) = 1$$

il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $\mathcal{L}$ est la loi de X.

Démonstration

La première propriété se déduit du fait que $P(\Omega) = 1$ et que $\left(X^{-1}(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements de Ω.

Pour la propriété réciproque, définissons $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P par :

$$P(A) = \sum_{i|x_i\in A} \mathcal{L}(x_i)$$

$\mathcal{L}$ est la loi de la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ définie par : $X(\omega) = \omega$. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Méthode 1 Vérifier qu'une fonction définit une loi de probabilité

Si $\mathcal{L}$ est une fonction définie sur un ensemble dénombrable, on vérifie que $\mathcal{L}$ définit une loi de probabilité en démontrant :

1. Pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathcal{L}(x) \geq 0$,
2. La probabilité totale vaut 1 c'est à dire : la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}(x_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}(x_n) = 1$$

Exemple d'application

Pour quelle valeur de α la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{3^n}$$

définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

Solution

La formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{3^n}$$

définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ si et seulement si :

1. Pour tout $n \geq 1$, $P(X = n) \geq 0$, c'est à dire $\alpha \geq 0$,
2. La probabilité totale vaut 1. Ici, la probabilité totale est la somme de la série géométrique de premier terme $P(X = 1) = \frac{\alpha}{3}$, de raisons $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) &= \frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{\alpha}{2} = 1 \iff \alpha = 2\end{aligned}$$

26.1.3 Fonction de répartition

Définition – Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire discrète, la **fonction de répartition** de X est l'application F_X définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0, 1]$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P(X \leq t)$$

Propriété

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier, croissante, continue à droite sur $\mathbb{R}$ qui a un nombre fini ou dénombrable de points de discontinuité. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont 0 et 1.

La donnée de la loi de X est équivalente à la donnée de sa fonction de répartition : $P(X = x_i)$ mesure la discontinuité de la fonction de répartition aux points x_i :

$$P(X = x_i) = \lim_{\substack{t \to x_i \\ t > x_i}} F_X(t) - \lim_{\substack{t \to x_i \\ t < x_i}} F_X(t)$$

26.1.4 Indépendance

Définition – Indépendance

Des variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si et seulement pour tout n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, les événements $\{X_1 = x_1\}, \ldots \{X_n = x_n\}$ sont mutuellement indépendants.

26.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

26.2.1 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X est la valeur moyenne de X :

Définition – Espérance

Une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'**espérance** de X est la valeur moyenne de X :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$

Méthode 2 Espérance d'une variable infinie

Pour démontrer qu'une variable infinie X **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ a une espérance et calculer $\mathrm{E}(X)$:

1. vérifier que la série de terme général $\sum nP(X = n)$ converge. Comme la série est à termes positifs, on conclut qu'elle est absolument convergente et que X possède une espérance,
2. calculer la somme de la série de terme général $u_n = nP(X = n)$ en utilisant les séries usuelles vues en cours : série géométriques et dérivées, série exponentielle.

Remarque – Hypothèse de convergence absolue

L'hypothèse de convergence absolue permet de vérifier que l'espérance calculée ne dépend pas de l'ordre choisi pour énumérer les éléments de $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si φ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors $X(\Omega) = \left\{x_{\varphi(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)} P(X = x_{\varphi(n)})$$

Lorsque la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est convergente, mais pas absolument convergente, on peut démonter qu'il existe une permutation φ de $\mathbb{N}$ tel que $X(\Omega) = \left\{x_{\varphi(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ et tel que la série $\sum x_{\varphi(n)} P(X = x_{\varphi(n)})$ est divergente, ou bien tel que la série converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)} P(X = x_{\varphi(n)})$$

Dans ce cas, la nature et la somme de la série dépendent de l'ordre choisi pour énumérer les élément de $X(\Omega)$: il est impossible de définir de façon cohérente la valeur moyenne de X.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète, et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire discrète qui admet une espérance si et seulement si la série $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'espérance de Y se calcule par la formule :

$$\mathrm{E}\,(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$$

Démonstration – Résultat admis. ■

Exemple – Paradoxe de Saint Pétersbourg et existence de l'espérance

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est un paradoxe probabiliste qui décrit une situation où une variable aléatoire n'a pas d'espérance. Le problème a été énoncé en 1713 par Nicolas Bernoulli, et discuté en 1738 dans les *Transactions de l'Académie de Saint-Petersbourg* par son cousin Daniel Bernoulli (neveu de Jacques Bernoulli, qui a donné son nom à la loi de Bernoulli).

Imaginons un jeu de pile ou face, où un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « face ». S'il obtient pour la première fois « face » après n tirages, la banque lui verse 2^n €.

Quelle doit être la mise initiale du joueur pour que ni la banque, ni le joueur ne soit avantagé par le jeu ?

Solution

Si X est la variable aléatoire représentant le nombre de lancers avant d'obtenir « face », on peut vérifier que la loi de X est :

$$P(X = n) = \frac{1}{2^n}$$

Le gain du joueur est égal à 2^X.

Si on suppose que l'on arrête le jeu après N tirages :

- Si $X \leq N$, le joueur a remporté 2^X €,
- Si $X > N$, le joueur a perdu sa mise.

Le gain moyen du joueur si on arrête le jeu après N tirages est donc :

$$\sum_{k=1}^{N} \underbrace{2^k P(X = k)}_{=1} = N$$

Il faut donc qu'il mise N € pour que le jeu soit équitable si on décide d'arrêter systématiquement le jeu après N tirages.

Si on suppose que l'on ne fixe aucune limite au nombre de tirages, il est impossible de rendre le jeu équitable : la mise pour rendre le jeu équitable lorsque l'on arrête systématiquement le jeu après N tirages est égale à N, et tend vers $+\infty$ lorsque $N \to +\infty$.

D'après le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}\left(2^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n P(X = n)$$

Comme $2^n P(X = n) = 1$, on en déduit que la série diverge, donc que 2^X n'a pas d'espérance.

Théorème – Théorème de comparaison
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X admet une espérance et si $|X| \geq |Y|$ presque sûrement, alors Y admet une espérance.

Démonstration – Résultat admis. ■

Propriété

1. *L'espérance est linéaire*
 Une combinaison linéaire $\lambda X + \mu Y$ de variables aléatoires discrètes qui admettent une espérance est une variable aléatoire discrète qui admet une espérance, d'espérance :
 $$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$$
2. *L'espérance est positive*
 Si X est une variable aléatoire positive presque sûrement qui admet une espérance, son espérance est positive :
 $$\mathrm{E}(X) \geq 0$$
3. *L'espérance est croissante*
 Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes qui admettent une espérance, telle que $X \geq Y$ presque sûrement, alors l'espérance de X majore celle de Y
 $$\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y)$$

26.2.2 Moments et variance

Définition – Moments et moments centrés
Une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre n si et seulement si X^n admet une espérance. On note alors $m_n(X)$ le **moment d'ordre *n*** de X :

$$m_n(X) = \mathrm{E}(X^n)$$

Une variable aléatoire discrète X admet un moment centré d'ordre n si et seulement si X admet une espérance et $(X - \mathrm{E}(X))^n$ admet une espérance. On note alors $\mu_n(X)$ le **moment centré d'ordre *n*** de X :

$$\mu_n(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^n\right)$$

Propriété – Existence des moments d'ordre $k \leq n$
Si X admet un moment d'ordre n, alors X admet des moments d'ordre k pour tout entier $k \leq n$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration
Supposons que X admette un moment d'ordre n, et fixons $k \leq n$.

- Si $|X(\omega)| \leq 1$, alors $\left|X^k(\omega)\right| \leq 1$.
- Si $|X(\omega)| \geq 1$, alors $\left|X^k(\omega)\right| \leq |X^n(\omega)|$.

Dans tous les cas, on en déduit :

$$\left|X^k\right| \leq 1 + |X^n|$$

La variable aléatoire $1 + |X^n|$ est la somme de la variable aléatoire constante égale à 1, qui admet une espérance, égale à 1, et de la variable $|X^n|$ qui admet une espérance par hypothèse. D'après le théorème de comparaison, nous en déduisons que $\left|X^k\right|$ (donc également X^k) admet une espérance. ■

Définition – Variance

Une variable aléatoire X admet une variance si et seulement si elle a un moment d'odre 2. Dans ce cas :

1. L'espérance minimise l'écart quadratique moyen $x \mapsto \mathrm{E}\left((X-x)^2\right)$,
2. On définit la **variance** comme le minimum de l'écart quadratique moyen :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$$

et l'**écart-type** $\sigma(X)$ comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

Démonstration – Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, donc un moment d'ordre $1 \leq 2$, c'est à dire une espérance. La fonction d'écart quadratique moyen est la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{E}\left((X-x)^2\right)$. Nous pouvons vérifier que φ est bien définie, et développer :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) &= \mathrm{E}\left((X-x)^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left(X^2 - 2Xx + x^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2x\,\mathrm{E}(X) + x^2 \end{aligned}$$

φ est donc une fonction dérivable, de dérivée :

$$\varphi'(x) = -2\,\mathrm{E}(X) + 2x$$

Le tableau de variation de φ est donc :

x	$-\infty$		$\mathrm{E}(X)$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

L'écart quadratique moyen est donc minimal lorsque $x = \mathrm{E}(X)$. ■

Propriété

- Si X est une variable aléatoire discrète possédant une variance, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la variable aléatoire $aX + b$ est une variable aléatoire discrète qui possède une variance :

$$\mathrm{V}(aX + b) = a^2 \mathrm{V}(X)$$

- La variance de la somme de variables aléatoires finies deux à deux indépendantes possédant une variance est la somme des variances.

Démonstration – La propriété concernant la variance d'une somme de variables indépendantes sera démontrée dans le chapitre 27.

Par linéarité, $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$, donc :

$$(aX + b) - \mathrm{E}(aX + b) = a(X - \mathrm{E}(X))$$

En élevant au carré et en calculant l'espérance, on en déduit :

$$\mathrm{V}(aX + b) = a^2 \mathrm{V}(X) \qquad \blacksquare$$

On peut calculer la variance par la formule de Huygens :

Théorème – Formule de Huygens

La variance est la différence entre l'espérance du carré et le carré de l'espérance :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$$

Démonstration – Développons :

$$(X - \mathrm{E}(X))^2 = X^2 - 2X\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2$$

En calculant l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\left(\mathrm{E}(X)\right)^2 + \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \\ &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

L'espérance est la *valeur moyenne* de la variable aléatoire X, l'écart type mesure la *dispersion* de X par rapport à sa valeur moyenne. Cette dispersion est quantifiée précisément par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Théorème – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète qui admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et une variance $\mathrm{V}(X)$. Pour tout réel positif α, X vérifie l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\alpha^2}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Démonstration – Soit $A_\alpha = \{\omega \in \Omega \,||X(\omega) - \mathrm{E}(X)| \geq \alpha\}$. Si $Y = (X - \mathrm{E}(X))^2$, nous savons que $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(Y)$. De plus :

$$\begin{cases} Y(\omega) \geq \alpha^2 & \text{si } \omega \in A \\ Y(\omega) \geq 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Donc $Y \geq \alpha^2 \mathbb{1}_A$. Comme l'espérance est croissante :

$$\mathrm{E}(Y) \geq \mathrm{E}\left(\alpha^2 \mathbb{1}_A\right) = \alpha^2 P(A) \qquad \blacksquare$$

26.3 Lois usuelles

26.3.1 Loi géométrique

Définition – Loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$. La **loi géométrique** de paramètre p est la loi du temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre p. On note $\mathcal{G}(p)$ la loi géométrique de paramètre p. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = pq^{n-1}$$

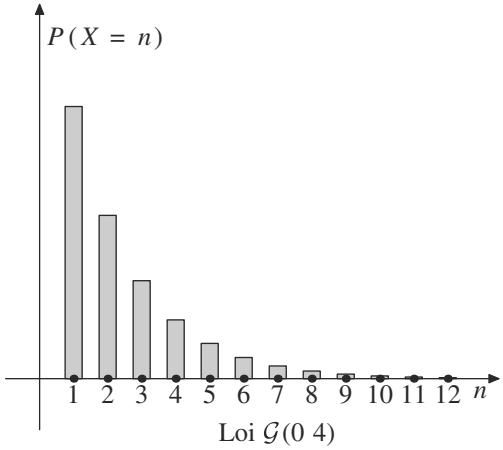
où p est la probabilité de succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'échec à chaque tirage.

Démonstration – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$. Si on note S_k le succès à l'instant k et E_k l'échec à l'instant k, l'événement $X = n$ est l'événement $\underbrace{E_1 \dots E_{n-1}}_{n-1 \text{ termes}} S_n$. Les épreuves sont indépendantes, donc :

$$P(X = n) = \underbrace{P(E_1) \times \cdots \times P(E_{n-1})}_{n-1 \text{ termes}} \times P(S_n) = q^{n-1} p \qquad \blacksquare$$

Exemple

Le diagramme en bâton ci dessous représente la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ pour $p = 0.4$.



Loi $\mathcal{G}(0\,4)$

Théorème – Espérance et variance de la loi géométrique
La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ admet une espérance et une variance :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$$
$$\mathrm{V}(X) = \frac{q}{p^2}$$

où $p \in]0, 1[$ est la probabilité de succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'échec à chaque tirage.

Démonstration – Si f est la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, rappelons que, lorsque $|x| < 1$, on peut calculer la somme de la série géométrique de premier terme 1, de raison x :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Nous pouvons également calculer les sommes des séries dérivées :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

1. **Espérance** – pour $x = q$, compte tenu du fait que $nx^{n-1} = 0$ lorsque $n = 0$, nous en déduisons :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$
L'espérance de X se déduit de la loi de X :
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}}_{\frac{1}{(1-q)^2}} \times p = \underbrace{\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)}_{\frac{1}{p^2}} \times p = \frac{1}{p}$$

2. **Variance** – pour $x = q$, compte tenu du fait que $n(n-1)x^{n-2} = 0$ lorsque $n = 0$, nous savons que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$
Nous reconnaissons :
$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}}_{\frac{2}{(1-q)^3}} \times pq$$
$$= \underbrace{\left(\frac{2}{(1-q)^3}\right)}_{\frac{2}{p^3}} \times pq = \frac{2q}{p^2}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

D'après la formule de Huygens :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2 \\ &= \underbrace{\mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)}_{\mathrm{E}(X^2)} - (\mathrm{E}(X))^2 \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

car $2q + p - 1 = q + (q + p) - 1 = q + 1 - 1 = q$. ■

Propriété – Fonction de répartition
La fonction de répartition de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X \leq n) = 1 - q^n$$

où $q = 1 - p$ est la probabilité d'échec à chaque tirage.

Si on définit la ***fonction d'antirépartition*** φ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = 1 - P(X \leq t) = P(X > t)$$

la propriété se réécrit :

Propriété – Fonction d'antirépartition
La fonction d'antirépartition de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X > n) = q^n$$

où $q = 1 - p$ est la probabilité d'échec à chaque tirage.

Démonstration – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $X > n$ est l'événement $\underbrace{E_1 \dots E_n}_{n \text{ termes}}$: n échecs consécutifs. Les épreuves sont indépendantes, donc :

$$P(X > n) = \underbrace{P(E_1) \times \cdots \times P(E_n)}_{n \text{ termes}} = q^n$$ ■

Théorème – Loi sans mémoire
La loi géométrique est une ***loi sans mémoire*** : si X est le temps d'attente du premier succès dans un processus de Bernoulli, la loi du temps d'attente restant sachant que $X > n$ suit la même loi que X.

Démonstration – Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, sachant que $X > n$, le temps d'attente restant est $X - n$:

$$\begin{aligned} P_{X>N}(X - N = n) &= \frac{P(X = N + n)}{P(X > N)} \\ &= \frac{pq^{N+n-1}}{q^N} = pq^{n-1} \end{aligned}$$ ■

26.3.2 Loi de Poisson

Définition – Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. La **loi de Poisson** de paramètre λ est la loi notée $\mathcal{P}(\lambda)$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \exp(-\lambda)$$

La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est aussi appelée *loi des événements rares* : elle décrit le nombre d'occurences d'un événement pendant un laps de temps donné, sachant qu'il se produit λ occurences en moyenne, et que les nombres d'occurrences pendant des intervalles de temps mutuellement disjoints sont mutuellement indépendants.

Démonstration – Vérifions que l'on définit bien une loi de probabilité en posant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \exp(-\lambda)$$

Calculons donc la probabilité totale :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \exp(-\lambda)$$

et vérifions que la somme de cette série est égale à 1. Nous pouvons factoriser par $\exp(-\lambda)$, et reconnaître la série $\exp(\lambda)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \exp(-\lambda) \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{\exp(\lambda)} = \exp(-\lambda)\exp(\lambda) = 1 \qquad \blacksquare$$

Théorème – Approximation par des lois binomiales

La loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ est la limite des lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$ d'espérance λ lorsque $n \to +\infty$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} (p_n)^k (q_n)^{n-k}$$

où $p_n = \frac{\lambda}{n}$ et $q_n = 1 - p_n$.

Démonstration – Si X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$, où $p_n = \frac{\lambda}{n}$ et $q_n = 1 - p_n$, alors :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} (p_n)^k (q_n)^{n-k} = \frac{1}{k!} \mathcal{A}_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} \frac{(n-i)\lambda}{n}}_{\mathcal{A}_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} \frac{(n-i)}{n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(-\lambda)} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \exp(-\lambda) \end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Justifions plus précisément :

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-\lambda)$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$ et posons : $$u_n = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{v_n}{(w_n)^k}$$

si les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par :

$$w_n = 1-\frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
$$v_n = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \exp(\alpha_n)$$

où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$\alpha_n = n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)$$

Nous savons que $\frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$, donc :

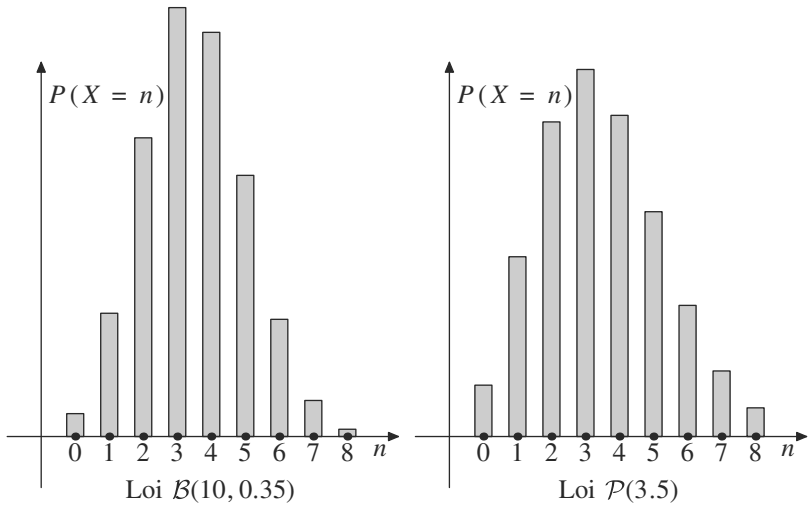
$$\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} -n\left(\frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\lambda$$

Par composition, nous en déduisons :

$$v_n = \exp(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\lambda$$

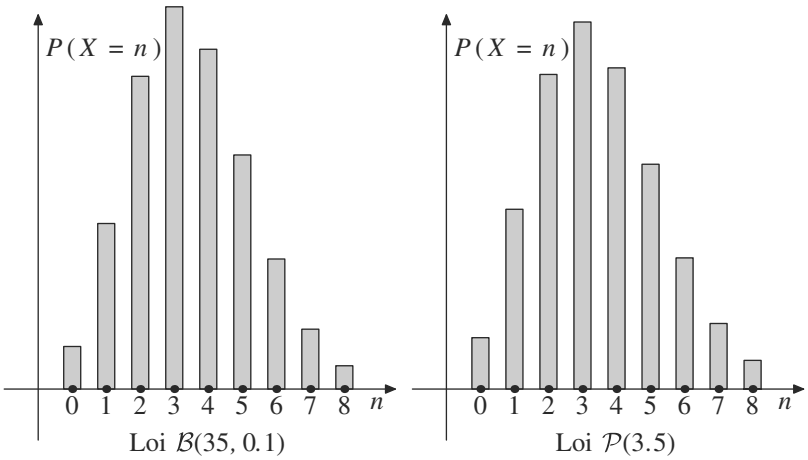
Puis : $$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{v_n}{(w_n)^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\exp(-\lambda)}{1^k} = \exp(-\lambda)$$ ■

Remarque – En pratique, on considère que la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est bien approximée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0.1$ et $np = \lambda \leq 15$.
Le diagramme en bâton ci dessous représente la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque $n = 10$, $p = 0.35$. Les deux lois sont clairement distinctes :



Loi $\mathcal{B}(10, 0.35)$ Loi $\mathcal{P}(3.5)$

Lorsque $n = 35$, $p = 0.1$, la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ est une bonne approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:



Théorème – Espérance et variance de la loi de Poisson
La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ admet une espérance et une variance :

$$\mathrm{E}(X) = \lambda$$
$$\mathrm{V}(X) = \lambda$$

Démonstration – D'après l'expression de la loi de Poisson, sous réserve de convergence :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\exp(-\lambda)$$

En factorisant par $\lambda\exp(-\lambda)$, compte tenu du fait que le terme correspondant à $k = 0$ est nul :

$$\mathrm{E}(X) = \lambda\exp(-\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

En posant $\ell = k - 1$, on reconnaît la série $\exp(\lambda)$:

$$\mathrm{E}(X) = \lambda\exp(-\lambda)\underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}}_{\exp(\lambda)}$$

La série exponentielle est absolument convergente, donc X a une espérance et :

$$\mathrm{E}(X) = \lambda\exp(-\lambda)\exp(\lambda) = \lambda$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

De même, nous pouvons calculer (sous réserve de convergence) :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\exp(-\lambda)\end{aligned}$$

En factorisant par $\lambda^2\exp(-\lambda)$, compte tenu du fait que les termes correspondant à $k=0$ et $k=1$ sont nuls :

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \lambda^2\exp(-\lambda)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

En posant $\ell = k-2$, on reconnaît la série $\exp(\lambda)$:

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \lambda^2\exp(-\lambda)\underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}}_{\exp(\lambda)}$$

La série exponentielle est absolument convergente, donc $X(X-1)$ a une espérance et :

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \lambda^2\exp(-\lambda)\exp(\lambda) = \lambda^2$$

Comme $X^2 = X(X-1)+X$, nous en déduisons que X a un moment d'ordre 2, donc une variance, et nous pouvons calculer par la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2\\ &= \underbrace{\mathrm{E}\left(X(X-1)\right) + \mathrm{E}(X)}_{\mathrm{E}(X^2)} - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2\\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Remarque – La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est la limite des lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$ d'espérance λ. Nous avons démontré que l'espérance et la variance de $\mathcal{P}(\lambda)$ sont égales aux limites des espérances et des variances des lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$.

Démonstration – Par définition, l'espérance des lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$ est égale à λ. De plus, si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ la variance est :

$$\mathrm{V}(X_n) = np_nq_n = \lambda q_n$$

où $q_n = 1 - p_n = 1 - \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc :

$$\mathrm{V}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \qquad \blacksquare$$

Synthèse

Savoirs

- L'espérance d'une variable discrète X est définie par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$

lorsque la série est absolument convergente.
- L'espérance vérifie le *théorème de comparaison* : si $|Y| \leq |X|$, et si X a une espérance, alors Y a une espérance.
- L'espérance vérifie le *théorème de transfert* :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) P(X = x_n)$$

lorsque la série de droite converge absolument,
- Une variable aléatoire X a un moment d'ordre n lorsque X^n a une espérance. De plus, si X a un moment d'ordre n, X admet des moments à tout ordre $k \leq n$,
- La variance est définie lorsque X a un moment d'ordre 2 : dans ce cas, la variance est le minimum de l'écart quadratique moyen et peut se calculer par la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2$$

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev quantifie la dispersion d'une variable aléatoire :

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\alpha^2}$$

- La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est la loi du temps d'attente du premier succès dans un processus de Bernoulli de paramètre p.
- La loi géométrique est une loi sans mémoire : le temps d'attente restant sachant que $X > n$ suit la même loi que X,
- La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est la *loi des événements rares*, limite des lois binomiales d'espérance λ.

Les lois usuelles des variables aléatoires discrètes infinies et leurs caractéristiques sont précisées dans le tableau ci dessous :

Loi	Formule : $P(X = k)$	Espérance	Variance	Écart type
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	pq^{k-1}	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{\sqrt{q}}{p}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$

Savoir-faire

- Calculer espérance et variance des lois usuelles en utilisant les séries usuelles (série géométrique et dérivées, série exponentielle)

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

26.1 Soit X la variable aléatoire discrète définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{n}$$

Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la formule ci dessus définit bien une variable aléatoire X ?

26.2 Soit X la variable aléatoire discrète définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$$

Cette formule définit-elle bien une variable aléatoire X ? X admet-elle une espérance ?

26.3 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $n \geq 1$. Calculer $P(X \leq n)$.

26.4 Pour chaque affirmation qui suit, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple :

1) L'espérance est linéaire,

2) La variance est linéaire,

3) D'après la positivité de l'espérance, lorsque l'espérance existe, elle est positive,

4) Lorsqu'elle existe, la variance est toujours positive

5) Si a et b sont deux réels et X a une espérance, alors $aX + b$ a une espérance et :

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

6) Si a et b sont deux réels et X a une variance, alors $aX + b$ a une variance et :

$$\mathrm{V}(aX + b) = a\,\mathrm{V}(X) + b$$

26.5 Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$, à quelle condition sur p la variable $Y = \exp(X)$ possède-t-elle une espérance ? Le cas échéant, la calculer.

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 698.

26.6

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Vérifier que X est une variable aléatoire réelle. X admet-elle une espérance ?

26.7

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la loi de X dans chacun des cas suivants :

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et il existe $p \in]0, 1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = pP(X \geq n)$$

2) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4P(X = n + 2) = 5P(X = n + 1) - P(X = n)$$

26.8

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant

$$\forall k \geq 1, \quad P(X = k) = \frac{4}{k}P(X = k - 1)$$

Montrer que X suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

26.9

N personnes jouent à un jeu. Chaque personne lance une pièce équilibrée. On observe le nombre de pile et de face obtenu. Le jeu s'arrête lorsqu'on obtient $(n-1)$ faces ou $(n-1)$ piles, n étant un entier plus petit que N.

1) Déterminer la probabilité que le jeu s'arrête à la première partie.

2) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de parties effectuées avant l'arrêt du jeu. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

26.10

1) Rappelons que X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = pq^{n-1}$$

où $q = 1 - p \in]0,1[$.

Vérifier que si X est une variable aléatoire de loi géométrique, alors l'espérance de X existe et vérifie l'égalité

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$$

2) Plus généralement, on considère une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

a) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y > k) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(Y = \ell) + (n+1)P(Y > n)$$

b) Que vaut

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \ell P(Y = \ell)$$

c) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)P(Y > n)$$

d) Justifier alors l'égalité

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y > k)$$

26.11

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Déterminer la loi et l'espérance de $Y = (-1)^X$.

26.12

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

On définit Y par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \\ X(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercices d'approfondissement

26.13

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 5,3.

1) En calculant $\dfrac{P(X = k)}{P(X = k+1)}$, déterminer la valeur de k telle que $P(X = k)$ soit maximale.

2) Plus généralement, si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, déterminer la ou les valeurs de k telles que $P(X = k)$ soit maximale

Remarque

Ces valeurs s'appellent le ou les mode(s) de la distribution de probabilité.

26.14

Soit $\lambda > 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, et $\alpha > 0$.

Montrer que la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance et la calculer.

26.15

1) Soit $\lambda > 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

a) Calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k)$$

b) X a-t-il plus de chances d'être pair ou impair ?

2) Même question lorsque X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

26.16 ◎

La probabilité pour qu'une ampoule électrique ait une durée de vie supérieure à 2 ans est de 0,2.

1) Sachant qu'un lustre possède 5 ampoules, calculer la probabilité

a) de ne pas changer d'ampoule en 2 ans.

b) de changer toutes les ampoules en 2 ans.

2) La durée de vie d'une ampoule électrique suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

a) identifier le paramètre p.

b) un lustre possède 5 ampoules. On note X le nombre d'années avant de devoir changer la première ampoule. Identifier la loi de X, son espérance et sa variance.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Indications

26.16 Question 2.b : on pourra identifier la fonction d'antirépartition de X : $t \in \mathbb{R} \mapsto P(X > t)$, en démontrant que la fonction de répartition du minimum de n variables mutuellement indépendantes est le produit des fonctions d'antirépartition des n variables.

26.1

La formule

$$\forall n \geq 1, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{n}$$

définit une variable aléatoire lorsque :

1) $P(X = n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire $\alpha \geq 0$.

2) La probabilité totale est égale à 1.

La probabilité totale est ici :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n}$$

qui est une série divergente lorsque $\alpha \neq 0$, de somme nulle lorsque $\alpha = 0$. Il n'existe donc pas de valeur de α telle que la formule :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{n}$$

définit une variable aléatoire.

26.2

La formule

$$\forall n \geq 1, \quad P(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$$

définit bien une variable aléatoire X : la probabilité totale est la somme de la série géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$, dé raisons $\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 1$$

X admet une espérance si et seulement si la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1$$

est convergente. Ce n'est pas le cas, donc X n'a pas d'espérance.

26.3

$$P(X \leq n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

On reconnait la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$, de raison $\frac{1}{2}$:

$$P(X \leq n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

26.4

1) Vrai : l'espérance est linéaire.

2) Faux : la variance n'est pas linéaire. Par exemple si X a une variance non nulle, $-X$ a une variance et $\mathrm{V}(-X) = \mathrm{V}(X) \neq -\mathrm{V}(X)$

3) Faux : la propriété de positivité de l'espérance stipule que, lorsque la variable X a une espérance et lorsque $X \geq 0$ presque sûrement, $\mathrm{E}(X) \geq 0$.

Si on ne suppose pas $X \geq 0$ presque sûrement, on ne peut pas conclure que $\mathrm{E}(X) \geq 0$. Par exemple si $X = -Y$ où $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $\mathrm{E}(X) = -\mathrm{E}(Y) = -\lambda < 0$.

4) Vrai : lorsqu'elle existe, la variance est toujours positive (ou nulle). En effet : si on pose $Y = (X - \mathrm{E}(X))^2$, alors $Y \geq 0$ donc, par positivité de l'espérance, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(Y) \geq 0$.

5) Vrai : si a et b sont deux réels et X a une espérance, alors $aX + b$ a une espérance et :

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

6) Faux : si a et b sont deux réels et X a une variance, alors $aX + b$ a une variance et :

$$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$$

En particulier, lorsque $a = 0$ et $b \neq 0$:

$$\mathrm{V}(aX + b) = 0 \neq a\,\mathrm{V}(X) + b = b$$

26.5

$Y = \exp(X)$ est à valeur dans $X(\Omega) = \{\exp(1), \ldots, \exp(n), \ldots\}$. Y a une espérance si et seulement si la série de terme général $u_n = \exp(n)P(Y = \exp(n))$ converge absolument. Comme la série est à termes positifs, Y a une espérance si et seulement si la série de terme général u_n converge. Si on pose $q = 1 - p$, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= e^n P(Y = e^n) = e^n P(X = n) \\ &= e^n \left(pq^{n-1}\right) = pe\,(qe)^{n-1} \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme pe, de raison qe. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge lorsque $qe < 1$. Y a donc une espérance lorsque $q = 1 - p < \frac{1}{e}$, et dans ce cas :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{pe}{1 - qe}$$

26.6

Nous savons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

X est une variable aléatoire si et seulement si la probabilité totale est bien définie et est égale à 1. Fixons $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} P(X = n) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \end{aligned}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tous les termes s'éliminent, sauf le premier et le dernier :

$$\sum_{n=1}^{N} P(X=n) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)$ est donc convergente, de somme 1, donc la loi définie sur $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ par :

$$P(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

définit bien une variable aléatoire X. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)$ est absolument convergente. Comme la série est à termes positifs, il suffit de vérifier qu'elle est convergente.

$$nP(X=n) = \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente, donc, d'après les théorèmes de comparaison, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)$ est divergente. X n'admet donc pas d'espérance.

26.7

1) X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et telle qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = pP(X \geq n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[X \geq n]$ est la réunion disjointe des événements $[X=n]$ et $[X \geq n+1]$, donc :

$$P(X \geq n) = P(X=n) + P(X \geq n+1)$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned} P(X=n) &= pP(X \geq n) \\ &= pP(X=n) + \underbrace{pP(X \geq n+1)}_{P(X=n+1)} \end{aligned}$$

Si on note $q = 1-p$, en regroupant les termes $P(X=n)$ à gauche :

$$qP(X=n) = P(X=n+1)$$

La suite $(P(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison q, de premier terme :

$$P(X=1) = pP(X \geq 1) = p$$

car $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc $P(X \geq 1) = 1$. X suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\forall n \geq 1, \quad P(X=n) = pq^{n-1}$$

2) X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4P(X=n+2) = 5P(X=n+1) - P(X=n)$$

La suite $(P(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $4x^2 - 5x + 1 = 0$, qui a une solution évidente $x=1$ et se factorise : $4x^2 - 5x + 1 = (x-1)(4x-1)$. Il existe donc deux réels α et β tels que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X=n) = \alpha + \frac{\beta}{4^n}$$

La probabilité totale est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha + \frac{\beta}{4^n}\right)$$

La série diverge si $\alpha \neq 0$. Nous en déduisons que $\alpha = 0$. Lorsque $\alpha = 0$, la série converge : c'est la somme de la série géométrique de premier terme β, de raison $\frac{1}{4}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \frac{\beta}{1-\frac{1}{4}}$$

La probabilité totale étant égale à 1, nous en déduisons que $\beta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

En particulier, $X+1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{3}{4}\right)$.

26.8

Nous savons que :

$$\forall k \geq 1, \quad P(X=k) = \frac{4}{k} P(X=k-1)$$

Si nous posons $P(0) = \alpha$, nous en déduisons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X=n) = \frac{4^n \alpha}{n!}$$

La probabilité totale est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n \alpha}{n!}$$

Nous reconnaissons la série exponentielle $\exp(4)$, donc la série converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = \alpha \exp(4)$$

La relation de récurrence définit donc une variable aléatoire lorsque $\alpha = P(0)$ vérifie $\alpha \exp(4) = 1$, c'est à dire $\alpha = \exp(-4)$. Dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{4^n \exp(-4)}{n!}$$

X suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda = 4$.

26.9

1) Lorsque $N = 2(n-1)$, le jeu s'arrête à la première partie si on tire $n-1$ piles (et dans ce cas on tire $n-1$ faces).

Supposons $N \neq 2(n-1)$. Le jeu s'arrête à la première partie si on tire $n-1$ piles ou $N-(n-1) \neq n-1$ piles. Les N lancers étant indépendants, le nombre Y_1 de piles tiré à la première partie suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)$. La probabilité p que le jeu s'arrête à la première partie est donc :

$$p = P(Y_1 = n-1) + P(Y_1 = N-(n-1))$$

La loi $\mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)$ est symétrique : $P(Y_1 = n-1) = P(Y_1 = N-(n-1)) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{n-1}$, donc :

$$p = \frac{2}{2^N}\binom{N}{n-1}$$

La probabilité p que le jeu s'arrête à la première partie est donc :

$$p = \begin{cases} \frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{n-1} & \text{lorsque } N \neq 2(n-1) \\ \frac{1}{2^N}\binom{N}{n-1} & \text{lorsque } N = 2(n-1) \end{cases}$$

2) Soit X une variable aléatoire qui compte le nombre de parties effectuées avant l'arrêt du jeu.

Les différentes parties sont mutuellement indépendantes, la probabilité de succès étant toujours égale à p à chaque partie. X est donc le temps d'attente du premier succès dans un processus de Bernoulli de paramètre p (où p est la valeur calculée à la question 1.) : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, d'espérance :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$$

26.10

Rappelons que, lorsque $|x| < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ et la série dérivée $\sum nx^{n-1}$ convergent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

1) Si X suit la loi $\mathcal{G}(p)$, l'espérance est définie si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)$ est convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1}$$

On reconnaît la série dérivée de la série géométrique de raison q. Comme $0 < q < 1$, nous en déduisons que la série converge, donc que X a une espérance, et :

$$\mathrm{E}(X) = p \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}}_{\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}} = \frac{1}{p}$$

Fixons $k \geq 0$ et calculons maintenant :

$$P(X > k) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} pq^{\ell-1}$$

On reconnaît la série géométrique de raison q, de premier terme pq^k. Comme $0 < q < 1$, nous en déduisons que la série converge et :

$$P(X > k) = pq^k \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{\frac{1}{p}} = q^k$$

Nous pouvons calculer, sous réserve de convergence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

On reconnaît la série géométrique de raison q, de premier terme 1. Comme $0 < q < 1$, nous en déduisons que la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}$$

Nous avons donc bien vérifié que, lorsque X suit la loi $\mathcal{G}(p)$, l'espérance de X existe et vérifie l'égalité

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$$

2) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$. L'événement $[Y > k]$ est la réunion disjointe des événement $[Y = \ell]$ pour ℓ variant de $k+1$ à n et de l'événement $[Y > n]$.

$$P(Y > k) = \left(\sum_{\ell=k+1}^{n} P(Y = \ell)\right) + P(Y > n)$$

En faisant la somme pour k variant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y > k) = \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\sum_{\ell=k+1}^{n} P(Y = \ell)\right) + P(Y > n)\right]$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

En regroupant :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y>k) = \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k+1\leq \ell\leq n}} P(Y=\ell) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(Y>n)}_{n+1 \text{ termes}}$$

Nous pouvons intervertir l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(Y>k) &= \sum_{1\leq \ell\leq n} \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell-1} P(Y=\ell)}_{\ell \text{ termes}} + (n+1)P(Y>n)\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(Y=\ell) + (n+1)P(Y>n)\end{aligned}$$

b) Y admet une espérance, donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k)$ est convergente. En particulier, le reste de la série tend vers 0 :

$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k) - \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k)\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(Y=k)\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

c) En particulier :

$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(Y=k)\\ &\geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)P(Y=k)\\ &\geq (n+1)\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Y=k)}_{P(Y>n)}\end{aligned}$$

$R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $0 \leq (n+1)P(Y>n) \leq R_n$, nous pouvons conclure par encadrement :

$$(n+1)P(Y>n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d) Nous avons démontré :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y>k) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(Y=\ell) + (n+1)P(Y>n)$$

Lorsque $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{n} \ell P(Y=\ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{E}(Y)\\ &(n+1)P(Y>n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y>k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{E}(Y)$$

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y>k)$ est donc convergente, et :

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y>k)$$

26.11 $Y = (-1)^X$ est à valeur dans $\{-1, 1\}$. Nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}P(Y=1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k)\\ &= \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\\ P(Y=-1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1)\\ &= \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer la somme et la différence de ces deux probabilités. La probabilité totale est égale à la somme :

$$P(Y=1) + P(Y=-1) = 1$$

Lorsque nous calculons la différence, nous pouvons reconnaître une série exponentielle :

$$\begin{aligned}P(Y=1) - P(Y=-1) &= \exp(-\lambda)\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\lambda^k}{k!}}_{\exp(-\lambda)}\\ &= \exp(-2\lambda)\end{aligned}$$

Nous devons donc résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} P(Y=1) + P(Y=-1) = 1\\ P(Y=1) - P(Y=-1) = \exp(-2\lambda)\end{cases}$$

En faisant la somme, puis la différence de ces deux équations, nous en déduisons :

$$\begin{cases} P(Y=1) = \dfrac{1+\exp(-2\lambda)}{2}\\ P(Y=-1) = \dfrac{1-\exp(-2\lambda)}{2}\end{cases}$$

Et nous pouvons calculer :

$$\mathrm{E}(Y) = P(Y=1) - P(Y=-1) = \exp(-2\lambda)$$

26.12

Y est à valeurs dans l'ensemble des entiers pairs.

$$P(Y=0) = P(X=0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1)$$
$$= \exp(-\lambda)\left(1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$

La somme des termes impairs de la série exponentielle est la partie impaire de la fonction exponentielle. En effet :

$$\exp(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$\exp(-\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!}$$

Lorsque l'on calcule la différence, les termes pairs s'éliminent :

$$\exp(\lambda) - \exp(-\lambda) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nous en déduisons :

$$P(Y=0) = \exp(-\lambda)\left(1 + \frac{\exp(\lambda) - \exp(-\lambda)}{2}\right)$$
$$= \exp(-\lambda) + \frac{1 - \exp(-2\lambda)}{2}$$

Lorsque $k \neq 0$, les événements $Y = 2k$ et $X = 2k$ sont confondus. La loi de Y est donc :

$$P(Y=2k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\exp(-\lambda) & \text{si } k \neq 0 \\ e^{-\lambda} + \dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons calculer l'espérance :

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2kP(Y=2k)$$

Le terme $k = 0$ est nul, donc :

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\right)\exp(-\lambda)$$

En simplifiant par k et en factorisant :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\exp(-\lambda)}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)$$

Nous reconnaissons la somme des termes impairs de la série exponentielle $\exp(\lambda)$, donc, comme précédemment :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\exp(-\lambda)}{2}\left(\frac{\exp(\lambda)-\exp(-\lambda)}{2}\right)$$
$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda}{4}(1 - \exp(-2\lambda))$$

Pour calculer $\mathrm{V}(Y)$, d'après la formule de Huygens, nous pouvons calculer $\mathrm{E}\left(Y^2\right)$:

$$\mathrm{E}\left(Y^2\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\right)\exp(-\lambda)$$
$$= \frac{\lambda\exp(-\lambda)}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)$$
$$= \frac{\lambda\exp(-\lambda)}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-1)+1}{2}\left(\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)$$

Nous pouvons d'une part simplifier $\frac{2k-1}{(2k-1)!}$ et factoriser par $\frac{\lambda}{2}$, de l'autre reconnaître $\mathrm{E}(Y)$. Nous en déduisons :

$$\mathrm{E}\left(Y^2\right) = \frac{\lambda^2\exp(-\lambda)}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!}\right) + \frac{\mathrm{E}(Y)}{2}$$

Nous reconnaissont la somme des termes pairs de la série exponentielle $\exp(\lambda)$, qui est égale à $\frac{\exp(\lambda)+\exp(-\lambda)}{2}$, donc :

$$\mathrm{E}\left(Y^2\right) = \frac{\lambda^2}{8}(1 + \exp(-2\lambda)) + \frac{\lambda}{8}(1 - \exp(-2\lambda))$$

D'après la formule de Huygens, nous en déduisons :

$$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}\left(Y^2\right) - (\mathrm{E}(Y))^2$$
$$= \frac{\lambda^2}{8}(1 + \exp(-2\lambda)) + \frac{\lambda}{8}(1 - \exp(-2\lambda))$$
$$- \frac{\lambda^2}{16}(1 - \exp(-2\lambda))^2$$

Après simplification, nous en déduisons :

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{\lambda^2}{16}\left(1 + 4e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}\right) + \frac{\lambda}{8}\left(1 - e^{-2\lambda}\right)$$

26.13

1) Déterminons la valeur modale de X, c'est à dire l'entier k tel que $P(X=k)$ est maximal. Pour étudier les variations de la suite $(P(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$, posons $\lambda = 5{,}3$ et calculons :

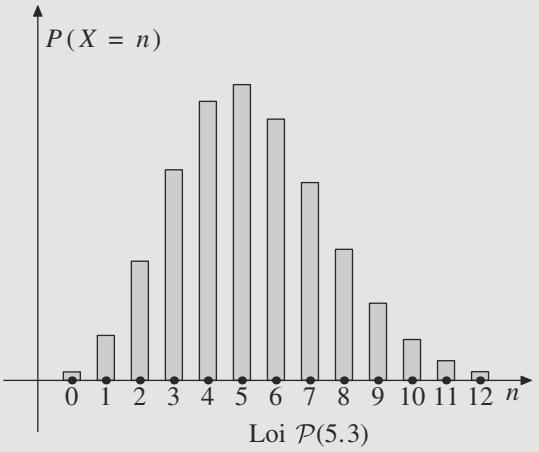
$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\exp(-\lambda)}{\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)}$$
$$= \frac{\lambda}{k+1}$$
$$> 1 \iff \lambda > k+1$$

Comme $\lambda = 5{,}3$:

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \begin{cases} > 1 \iff k \leq 4 \\ < 1 \iff k \geq 5 \end{cases}$$

La suite $(P(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc croissante pour $k \leq 5$, puis décroissante pour $k \geq 5$: elle est maximale pour $k = 5$.

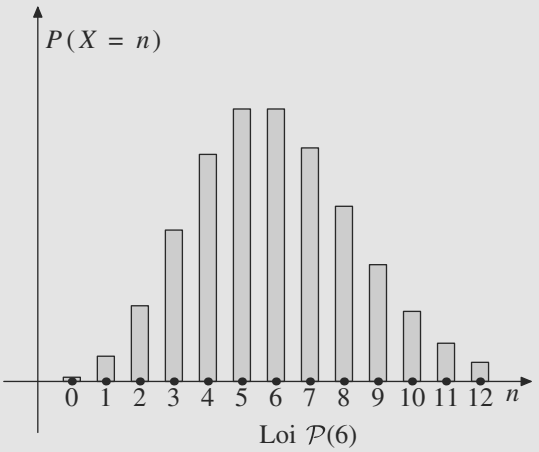
© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



Loi $\mathcal{P}(5.3)$

2) Plus généralement, si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, d'après le calcul précédent :

a) si $\lambda = n$ est entier, la suite $(P(X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc croissante pour $k \leq n-1$, puis décroissante pour $k \geq n$: elle est maximale pour $k = n-1$ et $k = n$. Lorsque λ est entier, la loi de Poisson a donc deux valeurs modales.



Loi $\mathcal{P}(6)$

b) si λ n'est pas entier, en posant n la partie entière de λ, la suite $(P(X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc croissante pour $k \leq n$, puis décroissante pour $k \geq n$: elle est maximale pour $k = n$. Lorsque λ n'est entier, la loi de Poisson a donc une unique valeur modale.

26.14

Comme $\alpha > 0$, d'après le théorème de transfert, $Y = \alpha^X$ a une espérance si et seulement la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n P(X = n)$ est convergente. Or nous reconnaissons une série exponentielle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n P(X = n) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha\lambda)^n}{n!}}_{\exp(\alpha\lambda)} \exp(-\lambda)$$

La série est donc convergente et nous en déduisons que $Y = \alpha^X$ admet une espérance que nous pouvons calculer :

$$\mathrm{E}(Y) = \exp(\alpha\lambda)\exp(-\lambda) = \exp((\alpha-1)\lambda)$$

26.15

1) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

a) Nous pouvons calculer :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \exp(-\lambda)$$

Nous connaissons la somme des séries exponentielles $\exp(\lambda)$ et $\exp(-\lambda)$:

$$\exp(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$\exp(-\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\lambda^k}{k!}$$

En faisant la somme, les termes d'ordre impairs s'éliminent :

$$\exp(\lambda) + \exp(-\lambda) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

En divisant par $2\exp(\lambda)$, nous en déduisons :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) = \frac{1 + \exp(-2\lambda)}{2}$$

b) La probabilité que X soit pair est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) = \frac{1 + \exp(-2\lambda)}{2} > \frac{1}{2}$$

Donc X a plus de chances d'être pair que d'être impair.

2) $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Si nous pouvons $q = 1 - p$, nous savons que $q \in]0, 1[$ et nous pouvons calculer la probabilité que X soit pair :

$$P(X \text{ pair}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1}$$

Nous reconnaissons la série géométrique de premier terme pq, de raison q^2, donc :

$$P(X \text{ pair}) = \frac{pq}{1-q^2}$$
$$= \frac{pq}{\underbrace{(1-q)}_{p}(1+q)} = \frac{q}{1+q}$$

De même, la probabilité que X soit impair est :

$$P(X \text{ impair}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{2k}$$

Nous reconnaissons la série géométrique de premier terme p, de raison q^2, donc :

$$P(X \text{ impair}) = \frac{p}{1-q^2}$$
$$= \underbrace{\frac{p}{(1-q)}}_{p}\frac{}{(1+q)} = \frac{1}{1+q}$$

Donc :

$$P(X \text{ pair}) = qP(X \text{ impair})$$

X a plus de chances d'être impair que d'être pair.

26.16

1) a) Soit E l'événement : « ne pas changer d'ampoule en 2 ans », et A_i l'événement : « la i-ème ampoule a une durée de vie supérieure à 2 ans ». E est réalisé lorsque les événements $A_1, A_2, \ldots, A_5$ sont réalisés :

$$E = \bigcap_{k=1}^{5} A_k$$

Si nous supposons que les durées de vie des différentes ampoules sont mutuellement indépendantes, les événements A_1, $A_2, \ldots, A_5$ sont mutuellement indépendants donc :

$$P(E) = \prod_{k=1}^{5} P(A_k) = 0.2^5 = 0.00032$$

b) Soit F l'événement : « ne pas changer d'ampoule en 2 ans ». F est réalisé lorsque les événements $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_5}$ sont réalisés :

$$F = \bigcap_{k=1}^{5} \overline{A_k}$$

Si nous supposons que les durées de vie des différentes ampoules sont mutuellement indépendantes, les événements $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}, \ldots, \overline{A_5}$ sont mutuellement indépendants donc :

$$P(F) = \prod_{k=1}^{5} P\left(\overline{A_k}\right) = 0.8^5 = 0.32768$$

2) La durée de vie X_i de la i-ième ampoule suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Posons $q = 1 - p$.

a) D'après l'énoncé, la probabilité pour qu'une ampoule électrique ait une durée de vie supérieure à 2 ans est de 0,2 :

$$P(X > 2) = q^2 = 0.2$$

donc $q = \sqrt{0.2}$ et $p = 1 - \sqrt{0.2} \simeq 0.55$. Notons que la durée de vie moyenne d'une ampoule est :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} \simeq 1.8$$

b) Soit X le nombre d'années avant de devoir changer la première ampoule. X est le minimum des variables $X_1, X_2, \ldots X_5$. Pour identifier la loi de X, nous allons identifier la fonction d'antirépartition de X : $t \in \mathbb{R} \mapsto P(X > t)$. Notons que X_k suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Si on note $q = 1 - p$, la fonction d'antirépartition de X_k pour tout $k \in [\![1,5]\!]$ est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X > n) = q^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $X > n$, nous savons que $X_1 > n$, $X_2 > n$, $\ldots X_5 > n$, donc :

$$[X > n] = \bigcap_{k=1}^{5} [X_k > n]$$

Les événements $[X_k > n]$ pour $k \in [\![1,5]\!]$ sont mutuellement indépendants, donc :

$$P(X > n) = \prod_{k=1}^{5} \overbrace{P(X_k > n)}^{q^n} = q^{5n}$$

qui est la fonction d'antirépartition de la loi géométrique $\mathcal{G}(p')$ telle que $q' = 1 - p$ vérifie : $q' = q^5$.

X suit donc la loi $\mathcal{G}(p')$ où :

$$p' = 1 - q^5 \approx 0{,}98$$

d'espérance :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p'} \approx 1$$

et de variance

$$\mathrm{V}(X) = \frac{q'}{(p')^2} \approx 0.02$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Couples de variables aléatoires discrètes

CHAPITRE 27

Plan

27.1 Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires 706
27.2 Indépendance 708
27.3 Espérance et covariance 709
27.4 Somme de variables aléatoires 714
Synthèse 717
Tests et exercices 718
Corrigés des exercices 722

Objectifs

- Définir la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes,
- Calculer les lois marginales connaissant la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes,
- Définir la covariance et utiliser la covariance pour calculer la variance d'une somme de variables aléatoires,

Prérequis

- Probabilités finies et infinies,
- Variables aléatoires finies et variables discrètes,

27.1 Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires

Remarque – Lois marginales
Les lois marginales se déduisent de la loi du couple (X, Y) :

$$p_{i,\bullet} = \sum_{j\in J} p_{i,j}$$

$$p_{\bullet,j} = \sum_{i\in I} p_{i,j}$$

Définition – Couple de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j\right\}_{j\in J}$ où I et J sont finis ou dénombrables.

- La **loi conjointe** du couple (X, Y) est l'application $\mathcal{L}_{X,Y} : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0, 1]$ définie par :

$$\forall i, j \in I \times J, \quad \mathcal{L}_{X,Y}\left(x_i, y_j\right) = P\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big)$$

- Les lois de X et de Y sont les **lois marginales** du couple (X, Y).

On note :

$$p_{i,j} = P\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big)$$
$$p_{i,\bullet} = P\left(X = x_i\right)$$
$$p_{\bullet,j} = P\left(Y = y_j\right)$$

Démonstration – Les événements $[Y = y_j]$ pour $j \in J$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\underbrace{P\Big([X = x_i]\Big)}_{p_{i,\bullet}} = \sum_{j\in J} \underbrace{P\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big)}_{p_{i,j}} \qquad \blacksquare$$

Remarque – Représentation par un tableau

Lorsque (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes finies, on peut représenter la loi conjointe et les lois marginales par un tableau, dans lequel :

- on indique $P\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big)$ à la j-ème ligne, i-ème colonne du tableau,
- en faisant la somme sur la ligne correspondante, on indique $P(Y = y_j)$ dans la dernière colonne,
- en faisant la somme sur la colonne correspondante, on indique $P(X = x_i)$ dans la dernière ligne

Exemple

Lançons une pièce équilibrée deux fois de suite, et notons X le nombre de « pile », Y le nombre de face. Nous savons que $X + Y = 2$, et que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. La loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y) sont donc données par le tableau :

Y \ X	0	1	2	Loi de Y
0	0	0	0.25	0.25
1	0	0.5	0	0.5
2	0.25	0	0	0.25
Loi de X	0.25	0.5	0.25	

Lançons maintenant deux pièces équilibrées deux fois de suite, et notons X le nombre de « pile » pour la première pièce, Y le nombre de « face » pour la seconde. La loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y) sont données par le tableau :

Y \ X	0	1	2	Loi de Y
0	0.0625	0.125	0.0625	0.25
1	0.125	0.25	0.125	0.5
2	0.0625	0.125	0.0625	0.25
Loi de X	0.25	0.5	0.25	

Dans ces deux exemples, les lois marginales sont identiques, mais les lois conjointes sont distinctes : en général, il est impossible d'identifier la loi conjointe connaissant seulement les lois marginales.

Définition – Système complet et σ-algèbre associés

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I} \times \{y_j\}_{j\in J}$:

- Les événement $A_{i,j} = [X = x_i] \cap [Y = y_j]$ pour $(i, j) \in I \times J$ forment un **système complet** d'événements,
- La σ-algèbre engendrée par $\Big(A_{i,j}\Big)_{(i,j)\in I\times J}$ est appelée **σ-algèbre associée** au couple (X, Y) et notée $\mathcal{A}_{(X,Y)}$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – Événement $(X, Y) \in \Delta$
Si Δ est une partie de $\mathbb{R}^2$, si on note D l'ensemble des couples d'entiers (i, j) tels que $(x_i, y_j) \in \Delta$, alors l'événement :

$$[(X, Y) \in \Delta] = \{\omega \in \Omega \,|X(\omega) \in \Delta\}$$

est un événement de la σ-algèbre $\mathcal{A}_{(X,Y)}$, puisque réunion finie ou dénombrable d'événement de $\mathcal{A}_{(X,Y)}$:

$$[(X, Y) \in \Delta] = \bigcup_{(i,j)\in\Delta} [X = x_i] \cap [Y = y_j]$$

On décrit ainsi tous les événements de la σ-algèbre associée au couple (X, Y).

27.2 Indépendance

Théorème – Loi conditionnelle
Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires. Les ***lois conditionnelles*** de X sachant Y et de Y sachant X se déduisent de la loi du couple et des lois marginales :

- *Loi de X sachant $Y = y_j$*

$$P_{Y=y_j}(X = x_i) = \frac{P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}}$$

lorsque $P(Y = y_j) = p_{\bullet,j} \neq 0$.

- *Loi de Y sachant $X = x_i$*

$$P_{X=x_i}(Y = y_j) = \frac{P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,\bullet}}$$

lorsque $P(X = x_i) = p_{i,\bullet} \neq 0$.

Définition – Indépendance
Des variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont **mutuellement indépendantes** si et seulement pour tout ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X(\Omega)$ les événements $[X_1 = x_1]$, $\ldots [X_n = x_n]$ sont mutuellement indépendants.

Propriété – Soit $p < n$ deux entiers. Si $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, toute fonction de $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute fonction de $X_{p+1}, \ldots, X_n$.

Théorème – Couple de variables indépendantes
Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi conjointe est le produit des lois marginales :

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

Remarque – Représentation par un tableau
Lorsque X et Y sont des variables discrètes indépendantes, on peut représenter la loi conjointe et les lois marginales par un tableau, dans lequel le coefficient de la j-ème ligne, i-ème colonne $p_{i,j}$ se calcule en multipliant le coefficient de la colonne de droite $p_{\bullet,j}$ par celui de la ligne du dessous $p_{i,\bullet}$:

$$p_{i,j} = p_{i,\bullet} p_{\bullet,j}$$

Exemple

Dans l'exemple de la page 707, lorsque nous lançons deux pièces équilibrées deux fois de suite, et notons X le nombre de « pile » pour la première pièce, Y le nombre de « face » pour la seconde, les variables aléatoires X et Y sont des variables indépendantes. X et Y suivent toutes deux la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$: la loi conjointe est le produit des lois marginales du couple (X, Y), donc les lois marginales et la loi conjointe sont bien données par le tableau :

Y \ X	0	1	2	Loi de Y
0	0.0625	0.125	0.0625	0.25
1	0.125	0.25	0.125	0.5
2	0.0625	0.125	0.0625	0.25
Loi de X	0.25	0.5	0.25	

27.3 Espérance et covariance

Théorème – Théorème de transfert
Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires finies à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \left\{(x_i, y_j)\right\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et u une application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $u(X, Y)$ est un variable aléatoire finie d'espérance :

$$\mathrm{E}\left(u(X, Y)\right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} u(x_i, y_j) P\Big(\left[X = x_i\right] \cap \left[Y = y_j\right]\Big)$$

Démonstration – $Z = u(X, Y)$ est à valeurs dans l'ensemble fini

$$Z(\Omega) = \left\{u(x_i, y_j)\right\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Notons $\{z_1, \ldots, z_m\} = Z(\Omega)$. On définit deux systèmes complets d'événements en posant :

$$A_{i,j} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, X(\omega) = x_i \text{ et } Y(\omega) = y_j\right\}$$

et

$$B_k = \{\omega \in \Omega \,|\, Z(\omega) = z_k\}$$

Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$:

$$B_k = \bigcup_{\substack{i,j \text{ tels que} \\ u(x_i, y_j) = z_k}} A_{i,j}$$

et on peut calculer :

$$\mathrm{E}\left(Z\right) = \sum_{k=1}^{m} z_k P(B_k)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Nous savons que : $P(B_k) = \sum_{\substack{i,j \text{ tels que} \\ u(x_i,y_j)=z_k}} P(A_{i,j})$, donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{i,j \text{ tels que} \\ u(x_i,y_j)=z_k}} z_k P(A_{i,j}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{i,j \text{ tels que} \\ u(x_i,y_j)=z_k}} u(x_i,y_j) P\big([X=x_i] \cap [Y=y_j]\big)\end{aligned}$$

C'est à dire : $\mathrm{E}(Z) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} u(x_i,y_j) P\big([X=x_i] \cap [Y=y_j]\big)$ ■

Corollaire – Linéarité de l'espérance
Si X et Y sont deux variables aléatoires finies, λ, μ deux réels :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$$

Démonstration – Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$, nous pouvons appliquer le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \big(\lambda x_i + \mu y_j\big) P\big([X=x_i] \cap [Y=y_j]\big)$$

Nous pouvons développer et regrouper :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda &\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} x_i P\big([X=x_i] \cap [Y=y_j]\big) \\ &+ \mu \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} y_j P\big([X=x_i] \cap [Y=y_j]\big)\end{aligned}$$

D'après le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} x_i P\big([X=x_i] \cap [Y=y_j]\big)$$
$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} y_j P\big([X=x_i] \cap [Y=y_j]\big)$$

Et nous pouvons conclure :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y) \quad ■$$

Remarque – Lorsque les variables ne sont pas indépendantes, en général :
$$\mathrm{E}(XY) \neq \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Corollaire – Espérance du produit de variables indépendantes
L'espérance du produit de deux variables aléatoires finies indépendantes X et Y est le produit des espérances, c'est à dire :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Démonstration – Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ d'après le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} x_i y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Les variables sont indépendantes, donc la loi du couple est le produit des lois marginales :

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} x_i y_j P(X = x_i) P(Y = y_j)$$

Si nous faisons d'abord la somme sur j, i étant fixé, nous pouvons factoriser $x_i P(X = x_i)$:

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n} \Big(x_i P(X = x_i) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j P(Y = y_j)}_{\mathrm{E}(Y)} \Big)$$

Nous pouvons ensuite factoriser $\mathrm{E}(Y)$:

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(Y) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)}_{\mathrm{E}(X)} = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \qquad \blacksquare$$

Définition – Covariance d'un couple

Soient X et Y deux variables aléatoires finies, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La **covariance** du couple (X, Y) est définie par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big((X - \mathrm{E}(X)) \times (Y - \mathrm{E}(Y)) \Big)$$

Lorsque $X = Y$, nous retrouvons la définition de la variance :

Propriété – Variance et covariance
Si X est une variable aléatoire finie :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Théorème – Bilinéarité de la covariance.

1. La covariance est *bilinéaire*, c'est à dire linéaire à gauche :

$$\mathrm{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \mathrm{Cov}(X_2, Y)$$

et à droite :

$$\mathrm{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \mathrm{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \mathrm{Cov}(X, Y_2)$$

2. La covariance est *symétrique* :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$$

3. La covariance vérifie :

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{V}(X) \geq 0$$

De plus, si $\mathrm{Cov}(X, X) = 0$, alors X est constante presque sûrement,

Démonstration

1. **Symétrie :**
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))) \\ &= \mathrm{E}((Y - \mathrm{E}(Y))(X - \mathrm{E}(X))) \\ &= \mathrm{Cov}(Y, X)\end{aligned}$$

2. **Bilinéarité :** puisque la covariance est symétrique, il suffit de vérifier la linéarité à gauche. Nous savons que l'espérance est linéaire, donc :

$$\begin{aligned}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - \mathrm{E}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) &= \lambda_1 (X_1 - \mathrm{E}(X_1)) + \lambda_2 (X_2 - \mathrm{E}(X_2)) \\ &= \lambda_1 \overline{X_1} + \lambda_2 \overline{X_2}\end{aligned}$$

si $\overline{X_1} = X_1 - \mathrm{E}(X_1)$ et $\overline{X_2} = X_2 - \mathrm{E}(X_2)$ sont les variables centrées associées à X_1 et X_2. Nous pouvons donc développer par linéarité :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) &= \mathrm{E}\left((\lambda_1 \overline{X_1} + \lambda_2 \overline{X_2})(Y - \mathrm{E}(Y))\right) \\ &= \lambda_1 \mathrm{E}\left(\overline{X_1}(Y - \mathrm{E}(Y))\right) + \lambda_2 \mathrm{E}\left(\overline{X_2}(Y - \mathrm{E}(Y))\right) \\ &= \lambda_1 \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \mathrm{Cov}(X_2, Y)\end{aligned}$$

3. **Positivité :** $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) \geq 0$
car l'espérance d'une variable aléatoire discrète positive ou nulle est toujours positive ou nulle. De plus, si $\mathrm{Cov}(X, X) = 0$, la variable aléatoire $(X - \mathrm{E}(X))^2$ est nulle presque sûrement, donc $X = \mathrm{E}(X)$ presque sûrement. ■

Théorème – Formule de Huygens
Si X et Y sont des variables aléatoires finies, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ se calcule par la formule de Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))\right)\\ &= \mathrm{E}(XY - X\,\mathrm{E}(Y) - Y\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(X))\end{aligned}$$

Nous pouvons développer par linéarité :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(X)\\ &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Propriété – Covariance et indépendance
La covariance de deux variables aléatoires finies indépendantes est nulle.

Démonstration – Si X et Y sont deux variables aléatoires finies **indépendantes**, l'espérance du produit est le produit des espérances :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Donc, d'après la formule de Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0 \qquad \blacksquare$$

Remarque – Réciproquement, lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, nous ne pouvons pas conclure que X et Y sont indépendantes. Par exemple lorsque la loi conjointe du couple (X,Y) est donnée par le tableau :

Y \ X	-1	0	1	Loi de Y
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
Loi de X	0.25	0.5	0.25	

Nous pouvons vérifier que $XY = 0$, donc $\mathrm{E}(XY) = 0$. De même : $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$. D'après la formule de Huygens, nous en déduisons donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$$

La loi conjointe n'est pas le produit des lois marginales. Par exemple

$$P\big([X=0]\cap[Y=0]\big) = 0 \neq \underbrace{P\big([X=0]\big)}_{0.25}\,\underbrace{P\big([Y=0]\big)}_{0.25}$$

donc les variables ne sont pas indépendantes.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

27.4 Somme de variables aléatoires

Théorème – Loi d'une somme
Si X et Y sont deux variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X+Y$ est une variable discrète, dont la loi est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} P\Big([X=k] \cap [Y=n-k]\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_{k,n-k} \end{aligned}$$

Remarque – Cas des variables indépendantes
Lorsque X et Y sont indépendantes on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \times P(Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_{k,\bullet} p_{\bullet,n-k} \end{aligned}$$

Démonstration – L'événement $X+Y=n$ se décompose en événements deux à deux disjoints :

$$[X+Y=n] = \bigcup_{k=0}^{n} \Big([X=k] \cap [Y=n-k]\Big) \qquad \blacksquare$$

Exemple – Stabilité de la loi de Poisson

La somme de variables de Poisson indépendantes est une variable de Poisson, c'est à dire : si X et Y sont deux variables indépendantes telle que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Solution

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont deux variables de Poisson indépendantes, la loi de la somme se calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la formule :

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\exp(-\lambda)}_{P(X=k)} \underbrace{\left(\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\right)\exp(-\mu)}_{P(Y=n-k)}$$

En factorisant par $\dfrac{\exp(-\lambda)\exp(-\mu)}{n!}$, nous reconnaissons le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, et nous pouvons appliquer la formule du binôme :

$$P(X+Y=n) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k \mu^{n-k}\right)}_{(\lambda+\mu)^n} \frac{\exp(-\lambda)\exp(-\mu)}{n!} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\exp(-(\lambda+\mu))$$

Donc $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Nous savons que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme des espérances. Nous pouvons également calculer la variance d'une somme connaissant les variances et les covariances :

Théorème – Variance d'une somme
La variance de la somme de variables aléatoires finies est la somme des variances et des covariances :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i)}_{n \text{ termes}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)}_{n^2 - n \text{ termes}}$$

Remarque – Comme la covariance est symétrique :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathrm{Cov}\left(X_j, X_i\right)$$

nous pouvons regrouper les termes deux par deux : :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i)}_{n \text{ termes}} + \underbrace{2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)}_{\binom{n}{2} \text{ termes}}$$

Démonstration – Nous pouvons développer par bilinéarité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)
\end{aligned}$$

Lorsque $i = j$, $\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathrm{V}(X_i)$, donc :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i)}_{n \text{ termes}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)}_{n^2 - n \text{ termes}} \quad \blacksquare$$

Corollaire – Somme de variables deux à deux indépendantes
La variance de la somme de variables aléatoires discrètes deux à deux indépendantes est la somme des variances.

Démonstration – La variance de la somme est égale à la somme des variances et des covariances. Comme les variables sont deux à deux indépendantes, les covariances sont nulles. ■

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple – Variance de la loi binomiale

La variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est : $\mathrm{V}(X) = npq$ si on pose $q = 1 - p$.

Solution

X compte le nombre de succès dans les n premiers tirages d'un processus de Bernoulli de paramètre p. Si $X_k = 1$ lorsque le k-ième tirage est un succès, 0 sinon, alors :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

où les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, et suivent le loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Nous en déduisons :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(X_1) + \mathrm{V}(X_2) + \cdots + \mathrm{V}(X_n)$$

où $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{V}(X_2) = \cdots = \mathrm{V}(X_n) = pq$. $\mathrm{V}(X)$ est donc la somme de n termes égaux à pq :

$$\mathrm{V}(X) = npq$$

Définition – Moyenne empirique

La **moyenne empirique** d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes est la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Théorème – Loi faible des grands nombres

La moyenne empirique d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli deux à deux indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$ converge vers p au sens où, pour tout $\epsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration – Soient $X_1, \ldots X_n$ n variables de Bernoulli deux à deux indépendantes. Nous pouvons associer à ces variables le processus de Bernoulli où $X_k = 1$ s'il y a succès au k-ième tirage, $X_k = 0$ s'il y a échec au k-ième tirage. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ compte le nombre de succès lors des n premiers tirages d'un processus de Bernoulli de paramètre p, donc S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. La moyenne empirique $M_n = \frac{S_n}{n}$ a donc pour espérance :

$$\mathrm{E}(M_n) = \mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{np}{n} = p$$

Sachant que $\mathrm{V}(S_n) = npq$, M_n a pour variance :

$$\mathrm{V}(M_n) = \mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{V}(S_n)}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, si on fixe $\epsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \leq \epsilon\right) = P\left(|M_n - \mathrm{E}(M_n)| \leq \epsilon\right)$$
$$\leq \frac{\mathrm{V}(M_n)}{\epsilon^2}$$
$$\leq \frac{pq}{n\epsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

Synthèse

Savoirs

- Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes,
- Théorème de transfert,
- Linéarité de l'espérance,
- Espérance du produit de variables indépendantes,
- Covariance,
- Formule de Huygens,
- Variance d'une somme,
- Loi faible des grands nombres,

Savoir-faire

- Calculer les lois marginales connaissant la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes,
- Calculer la loi de la somme de variables aléatoires discrètes connaissant la loi conjointe,
- Calculer la variance d'une somme connaissant les variances et les covariances.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Tests de connaissances

27.1 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,1]\!]$. La loi conjointe et la loi marginale de X et Y sont données de façon incomplète :

Y \ X	0	1	Loi de Y
0			0.5
1		0.4	
Loi de X	0.2		

Peut-on identifier la loi du couple (X,Y) ?

X et Y sont elles indépendantes ?

27.2 Soient X et Y sont deux variables aléatoires finies indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$. Calculer $\mathrm{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$.

27.3 Soient X et Y sont deux variables aléatoires finies indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![0,2]\!]$. Soient $(U,V) = (\max(X,Y), \min(X,Y))$. U et V sont elles indépendantes ?

27.4 Vrai ou faux ? Si X et Y sont deux variables aléatoires finies indépendantes, alors, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{V}(aX+bY) = a\,\mathrm{V}(X) + b\,\mathrm{V}(Y)$$

27.5 Soient X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que $\mathrm{V}(X) = 1$, $\mathrm{V}(Y) = 2$ et telles que $\mathrm{Cov}(X,Y) = -1$. Calculer $\mathrm{V}(X+Y)$.

27.6 Vrai ou faux ? Si X et Y sont deux variables aléatoires finies indépendantes, alors, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathrm{E}\left(X^k Y^\ell\right) = \mathrm{E}\left(X^k\right)\mathrm{E}\left(Y^\ell\right)$$

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 721.

27.7 ◎

Soient X et Y deux variables aléatoires suivant les lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p_1)$ et $\mathcal{B}(p_2)$. On suppose que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Identifier la loi conjointe du couple (X,Y). Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

27.8 ◎

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ $(p \in]0,1[)$

1) Identifier la loi de $X+Y$ et de $X-Y$.

2) Calculer $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)$.

3) Les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont elles indépendantes ?

27.9 ◎

Soient n un entier naturel, p_1 et p_2 dans $]0,1[$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que X_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p_1)$ et X_2 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p_2)$. On pose $Y = 2n - X_1 - X_2$.

1) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z.

2) Exprimer en fonction de n, p_1 et p_2 les probabilités : $P(Y=0)$, $P(Y=2n)$, $P(Y=2n-1)$ et $P(Y=1)$.

3) Calculer $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_2)$, $\mathrm{V}(X_1)$, $\mathrm{V}(X_2)$. En déduire $\mathrm{E}\left(X_1^2\right)$ et $\mathrm{E}\left(X_2^2\right)$.

4) Soit $Z = X_1 X_2 Y$. Montrer que :

$$\mathrm{E}(Z) = n^2(n-1)p_1p_2(q_1+q_2)$$

où on pose $q_1 = 1-p_1$ et $q_2 = 1-p_2$.

27.10 ◎

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On range au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n cases numérotées de 1 à n en ne mettant qu'une boule par case. Notons S_k la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si la k-ième boule se trouve dans la k-ième case et S la variable égale au nombre de boules qui se trouvent dans la case de même numéro.

1) Identifier la loi, l'espérance et la variance de S_k.

2) Lorsque $k \neq \ell$, identifier la loi et l'espérance de $S_k S_\ell$.

3) En déduire l'espérance et variance de S.

27.11

Une boîte contient 9 boules : 4 noires et 5 blanches. On effectue un tirage d'une boule au hasard, puis sans remettre la boule tirée, on fait un deuxième tirage d'une boule. Soient X la variable qui vaut 0 si le premier tirage est noir, 1 s'il est blanc et Y la variable qui vaut 0 si le deuxième tirage est noir, 1 s'il est blanc.

1) Identifier la loi de X.

2) Dresser le tableau à double entrée donnant la loi conjointe du couple (X,Y) et les lois marginales de X et de Y.

3) Soit $Z = XY$. Donner la loi de Z et son espérance.

4) Calculer la covariance du couple (X,Y). En déduire la variance de $(X+Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X,Y)$ du couple (X,Y) défini par :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{V}(Y)}}$$

27.12 ◎

Soit $n \geq 2$. On considère n urnes numérotées de 1 à n, telles que l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et dans cette urne on choisit une boule au hasard. On note X_n le numéro de l'urne choisie et N_n le numéro de la boule obtenue.

On suppose pour commencer que $n = 3$.

1) Déterminer la loi du couple (X_3, N_3).

2) Déterminer la loi de N_3 ainsi que son espérance et sa variance.

3) Les variables X_3 et N_3 sont-elles indépendantes ?

On revient au cas général $n \geq 2$.

4) Montrer que $N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(N_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=k}^{n} \frac{1}{\ell}$$

5) Calculer l'espérance de N_n.

Exercices d'approfondissement

27.13

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est au point d'abscisse 0. Il se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n + 1$

- il est sur le point d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$
- ou sur le point point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telles que $X_0 = 0$. On pose $u_n = P(X_n = 0)$.

1) Donner la loi de X_1.

2) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k - 1)$$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$$

5) En remarquant que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$, en déduire que :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \frac{u_\ell}{n+1-\ell} = 1$$

6) Retrouver les valeurs de u_0 et u_1, puis déterminer u_2 et u_3.

7) En remarquant que la relation de la question 3 peut s'écrire :

$$(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k - 1)$$

montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(X_{n-1}) + u_n$$

En déduire, pour tout $n \geq 1$, une formule exprimant $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de $(u_k)_{0\leq k\leq n}$.

27.14 ◎

Un dé équilibré à 6 faces comprend k faces blanches et $6 - k$ faces rouges ($k \in [\![1, 5]\!]$).

On réalise une série de lancers de ce dé et on étudie la longueur des séries successives de « blanc » et de « rouge » où on appelle « série » une succession de « blanc » ou de « rouge » interrompue par l'obtention de l'autre couleur.

Par exemple, en désignant « rouge » par R et « blanc » par B, si on obtient la suite :

$$RBBBRRBBB\ldots$$

on dira que la première série R est de longueur 1, la deuxième BBB est de longueur 3 etc... On notera aussi la suite correspondante

$$(R1)(B3)(R2)(B3)\ldots$$

On note X_i la variable aléatoire égale à la longueur de la i -ième série.

1) Déterminer la loi de X_1

2) Vérifier que X_1 est bien une variable aléatoire, c'est à dire :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X_1 = \ell) = 1$$

Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.

3) Montrer que $\mathrm{E}(X_1)$ est minimale lorsque $k = 3$ et calculer cette valeur minimale.

4) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

5) En déduire la loi de X_2 et vérifier que X_2 est bien une variable aléatoire. Montrer qu'elle admet une espérance et la calculer. **6)** a) Si $k \neq 3$, établir que les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

b) Démontrer que, si $k = 3$, les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

27.15 ◎

Deux joueurs A et B jouent une succession de parties. Les parties sont indépendantes entre elles, le joueur A gagne une partie avec probabilité $p \in]0,1[$ et perd avec probabilité $q = 1 - p$.

1) *Règle du jeu : le jeu s'arrête quand un des joueurs gagne deux parties successives.*

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées.

a) Calculer la probabilité que le joueur A gagne.

b) Déterminer la loi de X. Vérifier que X est une variable aléatoire réelle.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par A au cours du jeu.

c) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2n)$ et la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2n + 1)$.

d) Déterminer la loi de Y.

2) *Règle du jeu : pour gagner, un joueur doit gagner deux parties de plus que l'autre.*

On note A_n l'événement « le joueur A gagne en $2n$ parties ».

a) Faire un graphe représentant le gain de A en fonction du nombre de parties jouées.

b) Montrer que $P(A_{n+1}) = 2pqP(A_n)$.

c) Calculer la probabilité que A gagne.

27.16 ◎

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$. Démontrer que $Y = \min(X_1, X_2)$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, ou la probabilité d'échec à chaque tirage est :

$$q = q_1 q_2$$

et la probabilité de succès est donnée par la formule du crible :

$$p = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

27.17 ◎

Une urne contient N boules, dont une proportion p de boules blanches et $q = 1 - p$ de boules noires. On tire successivement et sans remise n boules dans l'urne. X désigne le nombre de boules blanches tirées, et on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au k-ième tirage, 0 si on tire une boule noire au k-ième tirage.

1) Quelle relation y-a-t-il entre X et les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$?

2) Identifier les lois de X et des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$. En déduire $\mathrm{E}(X)$.

3) En développant $\mathrm{V}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$ par bilinéarité, vérifier :

$$\mathrm{V}(X) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_k)}_{n \text{ termes}} + \underbrace{\sum_{k \neq \ell} \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}_{n^2 - n \text{ termes}}$$

4) Démontrer que, lorsque $k \neq \ell$, la variable aléatoire $X_k X_\ell$ suit une loi de Bernoulli que l'on identifiera. En utilisant la formule de Huygens, en déduire $\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)$.

5) En déduire $\mathrm{V}(X)$.

Indications

27.7 Utiliser la formule de Huygens et le théorème de transfert pour identifier $P(X = Y = 1)$ puis remplir le tableau donnant la loi conjointe du couple (X, Y) de proche en proche.

27.8 Question 2 : on pourra développer la covariance par bilinéarité et exprimer $\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y)$ en fonction de $\mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

27.9 Question 3 : on pourra exprimer Z en fonction de X_1 et X_2, utiliser la linéarité de l'espérance et constater que, puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, pour tout k et ℓ :

$$\mathrm{E}\left(X_1^k X_2^\ell\right) = \mathrm{E}\left(X_1^k\right)\mathrm{E}\left(X_2^\ell\right)$$

27.10 Question 3 : $S = \sum_{1 \leq k \leq n} S_k$, donc l'espérance de S est la somme des espérances des S_k et la variance de S se déduit des variances et des covariances par bilinéarité.

27.12 Question 5 : on pourra vérifier :

$$\mathrm{E}(N_n) = \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} \frac{k}{n\ell}$$

et intervertir les signes sommes.

27.14 Question 3 : on pourra étudier la fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

Question 6.a : on pourra calculer

$$P\left([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\right)$$

27.15 Question 1.a : considérer l'événement « le joueur A gagne en n parties » et distinguer selon la parité de n.

Question 1.c : regarder le résultat de la première partie jouée.

27.16 Identifier la fonction d'antirépartition de $Y = \min(X_1, X_2)$ en calculant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(Y > n)$$

27.17 Question 1 et 3 : on pourra faire un dénombrement en utilisant le modèle du tirage sans remise (n listes sans répétition parmi les N boules de l'urne) en explicitant l'événement $[X_k = 1]$ (question 1) ou l'événement $[X_k X_\ell = 1] = [X_k = 1] \cap [X_\ell = 1]$.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

27.1 Notons $p_{i,j} = P([X = i] \cap [Y = j])$, $p_{i,\bullet} = P(X = i)$ et $p_{\bullet,j} = P(Y = j)$. Nous allons faire un jeu de chasse dans le tableau. Nous savons que la probabilité totale est égale à 1, donc :

$$p_{0,\bullet} + \underbrace{p_{1,\bullet}}_{0.2} = \underbrace{p_{\bullet,0}}_{0.5} + p_{\bullet,1} = 1$$

Donc $p_{1,\bullet} = 0.8$ et $p_{\bullet,1} = 0.5$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\underbrace{p_{1,\bullet}}_{0.8} = p_{1,0} + \underbrace{p_{1,1}}_{0.4}$$
$$\underbrace{p_{\bullet,1}}_{0.5} = p_{0,1} + \underbrace{p_{1,1}}_{0.4}$$

Donc $p_{1,0} = 0.4$ et $p_{0,1} = 0.1$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\underbrace{p_{\bullet,0}}_{0.5} = p_{0,0} + \underbrace{p_{1,0}}_{0.4}$$

Donc : $p_{0,0} = 0.1$. Nous en déduisons la loi conjointe du couple (X, Y) :

Y \ X	0	1	Loi de Y
0	0.1	0.4	0.5
1	0.1	0.4	0.5
Loi de X	0.2	0.8	

La loi du couple est égale au produit des lois marginales, car pour tout $(k, \ell) \in \{0, 1\}^2$:

$$P\Big([X = k] \cap [Y = \ell]\Big) = P(X = k) \times P(Y = \ell)$$

donc les variables X et Y sont indépendantes.

27.2 D'après le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \sum_{\substack{1\leq k\leq 3\\ 1\leq \ell\leq 3}} \frac{k}{\ell} P([X = k] \cap [Y = \ell])$$

X et Y sont des variables indépendantes, qui suivent la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$, donc :

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \sum_{\substack{1\leq k\leq 3\\ 1\leq \ell\leq 3}} \frac{k}{\ell} \underbrace{P(X = k)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{P(Y = \ell)}_{\frac{1}{3}}$$
$$= \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq \ell\leq n}} \frac{k}{9\ell} = \sum_{\ell=1}^{3} \Big(\frac{1}{9\ell} \underbrace{\sum_{k=1}^{3} k}_{\frac{3(3+1)}{2}}\Big)$$
$$= \underbrace{\frac{6}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{\frac{11}{6}} = \frac{11}{9}$$

27.3 Nous savons que $U = \max(X, Y) \geq \min(X, Y) = V$ donc on ne peut pas avoir simultanément $U = 0$ et $V = 2$:

$$P([U = 0] \cap [V = 2]) = 0$$

$V = 2$ lorsque $X = Y = 2$, donc :

$$P(V = 2) = P([X = 2] \cap [Y = 2])$$
$$= \underbrace{P(X = 2)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{P(Y = 2)}_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

$U = 0$ lorsque $X = Y = 0$, donc :

$$P(U = 0) = P([X = 0] \cap [Y = 0])$$
$$= \underbrace{P(X = 0)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{P(Y = 0)}_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

Nous en déduisons :

$$P([U = 0] \cap [V = 2]) \neq P(U = 0)P(U = 0)$$

Donc les variables U et V ne sont pas indépendantes.

27.4 Faux. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, aX et bY sont des variables indépendantes, donc :

$$\mathrm{V}(aX + bY) = \mathrm{V}(aX) + \mathrm{V}(bY)$$
$$= a^2 \mathrm{V}(X) + b^2 \mathrm{V}(Y)$$

Notons que lorsque $\mathrm{V}(X) \neq 0$ et $\mathrm{V}(Y) \neq 0$, et lorsque a et b sont strictement négatifs (par exemple $a = b = -1$),

$$a\,\mathrm{V}(X) + b\,\mathrm{V}(Y) < 0 \leq \mathrm{V}(aX + bY)$$

27.5 Nous pouvons calculer $\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{Cov}(X + Y, X + Y)$ en développant par bilinéarité :

$$\mathrm{V}(X + Y) = \mathrm{Cov}(X + Y, X + Y)$$
$$= \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$
$$= 1 + 2 - 2 = 1$$

27.6 Vrai. Si f et g sont les fonctions définies par $f : x \longmapsto x^k$ et $g : y \longmapsto y^\ell$, comme X et Y sont indépendantes, nous savons que $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires finies indépendantes. L'espérance du produit de deux variables aléatoires finies indépendantes est le produit des espérances, donc :

$$\mathrm{E}\left(X^k Y^\ell\right) = \mathrm{E}\left(X^k\right)\mathrm{E}\left(Y^\ell\right)$$

27.7

Pour $i = 1$ ou 2, notons $q_i = 1 - p_i$ et pour i et j égaux à 0 ou 1 : $p_{i,j} = P([X = i] \cap [Y = j])$. D'après la formule de Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

D'après le théorème de transfert :

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{0 \leq i,j \leq 1} i \times j \times p_{i,j} = p_{1,1}$$

Comme $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, nous en déduisons :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$
$$p_{1,1} = p_1 p_2$$

La loi marginale de X est :

$$P(X = 1) = p_{1,0} + p_{1,1}$$
$$p_1 = p_{1,0} + p_1 p_2$$

Donc :

$$p_{1,0} = p_1(1 - p_2) = p_1 q_2$$

De même, la loi marginale de Y est :

$$P(Y = 1) = p_{0,1} + p_{1,1}$$

Et nous en déduisons :

$$p_{0,1} = p_2 q_1$$

Enfin :

$$P(X = 0) = p_{0,0} + p_{0,1}$$
$$q_1 = p_{0,0} + q_1 p_2$$

Donc :

$$p_{0,0} = q_1(1 - p_2) = q_1 q_2$$

La loi conjointe du couple (X, Y) est donc :

Y \ X	0	1	Loi de Y
0	$q_1 q_2$	$p_1 q_2$	q_2
1	$q_1 p_2$	$p_1 p_2$	p_2
Loi de X	q_1	p_1	

La loi conjointe est le produit des lois marginales, donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

27.8

1) Si on note $q = 1 - p$, comme X et Y sont indépendantes, la loi conjointe du couple (X, Y) est le produit des lois marginales :

Y \ X	0	1	Loi de Y
0	q^2	pq	q
1	pq	p^2	p
Loi de X	q	p	

Nous en déduisons la loi du couple $(X + Y, X - Y)$:

$X - Y$ \ $X + Y$	0	1	2	Loi de $X - Y$
-1	0	pq	0	pq
0	q^2	0	p^2	$p^2 + q^2$
1	0	pq	0	pq
Loi de $X + Y$	q^2	$2pq$	p^2	

En effet, nous pouvons vérifier par exemple que $X + Y = 1$ et $X - Y = 1$ lorsque $X = 1$ et $Y = 0$, donc :

$$P([X + Y = 1] \cap [X - Y = 1])$$
$$= P([X = 1] \cap [Y = 0]) = pq$$

Les autres cases du tableau se remplissent de même par identification.

2) Nous pouvons développer par bilinéarité :

$$\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y)$$
$$= \mathrm{Cov}(X + Y, X) - \mathrm{Cov}(X + Y, Y)$$
$$= \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(Y, X)$$
$$- \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Cov}(Y, Y)$$

La covariance est symétrique, donc : $\mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. De plus $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{Cov}(Y, Y) = \mathrm{V}(Y)$. Nous en déduisons :

$$\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) = \mathrm{V}(X) - \mathrm{V}(Y)$$

Comme $\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y) = pq$ car X et Y suivent la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, nous en déduisons :

$$\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) = 0$$

3) Si les variables $X + Y$ et $X - Y$ étaient indépendantes, la loi du couple serait égale au produit des lois marginales. Ce n'est clairement pas le cas, puisque, par exemple :

$$P([X + Y = 0] \cap [X - Y = 1])$$
$$= 0 \neq \underbrace{P(X + Y = 0)}_{q^2}\,\underbrace{P(X - Y = 1)}_{pq}$$

Donc $X + Y$ et $X - Y$ ne sont pas des variables indépendantes.

Remarque – Nous avons démontré dans le cours que la covariance de deux variables finies indépendantes est nulle. La réciproque est fausse : dans cet exercice, la covariance de $X + Y$ et $X - Y$ est nulle et pourtant les variables $X + Y$ et $X - Y$ ne sont pas indépendantes.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

27.9

1) X_1 et X_2 sont à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, donc $X_1 + X_2$ est à valeurs dans $[\![0, 2n]\!]$, et $Y = 2n - (X_1 + X_2)$ est à valeurs dans $[\![2n - 2n, 2n - 0]\!]$ c'est à dire $[\![0, 2n]\!]$.

2) $Y = 0$ lorsque $X_1 = X_2 = 0$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) \\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) \\ &= q_1^n q_2^n \end{aligned}$$

si on pose $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

$Y = 2n$ lorsque $X_1 = X_2 = n$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\begin{aligned} P(Y = 2n) &= P([X_1 = n] \cap [X_2 = n]) \\ &= P(X_1 = n)P(X_2 = n) \\ &= p_1^n p_2^n \end{aligned}$$

$Y = 2n - 1$ lorsque $X_1 = n$ et $X_2 = n - 1$ ou lorsque $X_1 = n - 1$ et $X_2 = n$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\begin{aligned} P(Y = 2n - 1) &= P([X_1 = n] \cap [X_2 = n - 1]) \\ &\quad + P([X_1 = n - 1] \cap [X_2 = n]) \\ &= P(X_1 = n)P(X_2 = n - 1) \\ &\quad + P(X_1 = n)P(X_2 = n - 1) \\ &= p_1^n p_2^{n-1} q_2 + p_1^{n-1} q_1 p_2^n \\ &= (p_1 p_2)^{n-1} (p_1 q_2 + p_2 q_1) \end{aligned}$$

$Y = 1$ lorsque $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$ ou lorsque $X_1 = 0$ et $X_2 = 1$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) \\ &\quad + P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) \\ &\quad + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) \\ &= p_1 q_1^{n-1} q_2^n + q_1^n p_2 q_2^{n-1} \\ &= (q_1 q_2)^{n-1} (p_1 q_2 + p_2 q_1) \end{aligned}$$

3) Pour $k = 1$ et 2, X_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_k)$, donc :

$$\begin{cases} \mathrm{E}(X_k) = np_k \\ \mathrm{V}(X_k) = np_k q_k \end{cases}$$

D'après la formule de Huygens :

$$\mathrm{V}(X_k) = \mathrm{E}\left(X_k^2\right) - (\mathrm{E}(X_k))^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X_k^2\right) &= \mathrm{V}(X_k) + (\mathrm{E}(X_k))^2 \\ &= np_k q_k + n^2 p_k^2 \end{aligned}$$

4) $Z = X_1 X_2 (2n - X_1 - X_2)$. L'espérance étant linéaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(X_1 X_2 (2n - X_1 - X_2)) \\ &= 2n\,\mathrm{E}(X_1 X_2) - \mathrm{E}\left(X_1^2 X_2\right) \\ &\quad - \mathrm{E}\left(X_1 X_2^2\right) \end{aligned}$$

Si k et ℓ sont des entiers, sachant que X_1 et X_2 sont indépendantes, X_1^k et X_2^ℓ sont indépendantes, donc l'espérance du produit est le produit des espérances :

$$\mathrm{E}\left(X_1^k X_2^\ell\right) = \mathrm{E}\left(X_1^k\right)\mathrm{E}\left(X_2^\ell\right)$$

Donc :

$$\mathrm{E}(Z) = 2n\,\mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2) - \mathrm{E}\left(X_1^2\right)\mathrm{E}(X_2) - \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}\left(X_2^2\right)$$

D'après la question 2, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2) &= n^2 p_1 p_2 \\ \mathrm{E}\left(X_1^2\right)\mathrm{E}(X_2) &= np_2\left(np_1 q_1 + n^2 p_1^2\right) \\ &= n^2 p_1 p_2 (q_1 + np_1) \\ \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}\left(X_2^2\right) &= n^2 p_1 p_2 (q_2 + np_2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathrm{E}(Z) = n^2 p_1 p_2 (2n - (q_1 + np_1) - (q_1 + np_1))$$

Nous pouvons simplifier :

$$\begin{aligned} 2n - np_1 - np_2 &= n(1 - p_1 + 1 - p_2) \\ &= n(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Et nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= n^2 p_1 p_2 (n(q_1 + q_2) - (q_1 + q_2)) \\ &= n^2 (n - 1) p_1 p_2 (q_1 + q_2) \end{aligned}$$

27.10

1) Fixons un entier k entre 1 et n. Le numéro N_k de la boule posée sur la case k est un entier compris entre 1 et n ; par hypothèse, il y a équiprobabilité, donc pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$P(N_k = \ell) = \frac{1}{n}$$

L'évément $[S_k = 1]$ est aussi l'événement $[N_k = k]$, donc :

$$P(S_k = 1) = \frac{1}{n}$$

S_k suit donc la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{n})$. En particulier :

$$\begin{cases} \mathrm{E}(S_k) = \dfrac{1}{n} \\ \mathrm{V}(S_k) = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

2) $S_k S_\ell$ prend les valeurs 0 (lorsque $S_k = 0$ ou $S_{\ell=0}$) ou 1 lorsque $S_k = S_\ell = 1$, donc $S_k S_\ell$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(S_k = S_\ell = 1)$.

Sachant que $S_k = 1$, la boule numéro k est posé sur la case k. Le numéro N_ℓ de la boule posée sur la case ℓ est un entier compris entre 1 et n différent de k (soit $(n-1)$ possibilités) ; par hypothèse, il y a équiprobabilité, donc :

$$P_{S_k=1}(N_\ell = \ell) = \frac{1}{n-1}$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(S_k S_\ell = 1) &= P(S_k = S_\ell = 1) \\ &= P_{S_k=1}(S_\ell = 1) P(S_k = 1) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2 - n} \end{aligned}$$

3) Le nombre de coïncidence S est :

$$S = S_1 + \cdots + S_n$$

L'espérance étant linéaire :

$$\mathrm{E}(S) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(S_k)}_{\substack{n \text{ termes} \\ \text{égaux à } \frac{1}{n}}} = 1$$

En moyenne, il y a donc une seule coïncidence !

La variance se calcule par bilinéarité :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(S) &= \mathrm{V}\left(\sum_{k=1}^{n} S_k\right) \\ &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} S_k, \sum_{\ell=1}^{n} S_\ell\right) \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \ell \le n}} \mathrm{Cov}(S_k, S_\ell)}_{n^2 \text{ termes}} \end{aligned}$$

En distinguant les n cas où $k = \ell$, sachant que $\mathrm{Cov}(S_k, S_k) = \mathrm{V}(S_k)$ et les $n^2 - n$ cas où $k \neq \ell$:

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(S) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(S_k)}_{\substack{n \text{ termes} \\ \text{égaux à } \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}} + \underbrace{\sum_{k \neq \ell} \mathrm{Cov}(S_k, S_\ell)}_{\substack{n^2 - n \text{ termes} \\ \text{égaux à } \frac{1}{n^2 - n}}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

27.11

1) $X = 1$ lorsque l'on tire une boule blanche (5 possibilités), 0 sinon (4 possibilités). Nous sommes en situation d'équiprobabilité :

$$P(X = 1) = \frac{5}{9}$$

Donc X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{5}{9}\right)$.

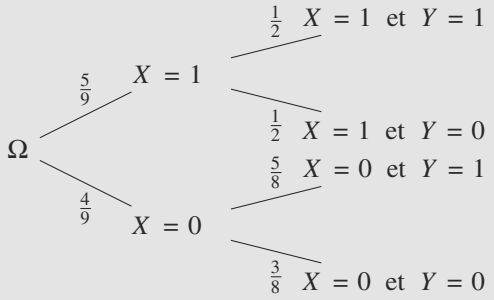
2) Lorsque $X = 1$, il reste 4 boule blanches et 4 noires dans l'urne, donc :

$$P_{X=1}(Y = 1) = P_{X=1}(Y = 0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Lorsque $X = 0$, il reste 5 boule blanches et 3 noires dans l'urne, donc :

$$\begin{aligned} P_{X=0}(Y = 1) &= \frac{5}{8} \\ P_{X=0}(Y = 0) &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Nous pouvons résumer les calculs par l'arbre de probabilité :



D'après la formule des probabilités composées, nous en déduisons la loi conjointe du couple (X, Y) (où nous avons simplifié partiellement les fractions en les écrivant toutes sous la forme $\frac{n}{18}$) :

Y \ X	0	1	Loi de Y
0	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{18}$
1	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{10}{18}$
Loi de X	$\frac{8}{18}$	$\frac{10}{18}$	

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Notons que X et Y suivent le même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p = \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{V}(Y)\\ &= p(1-p) = \frac{20}{81}\end{aligned}$$

3) Soit $Z = XY$. $Z = 0$ lorsque $X = 0$ ou $Y = 0$, et $Z = 1$ lorsque $X = Y = 1$. Z suit donc la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p')$ où

$$p' = P\Big([X = 1] \cap [Y = 1]\Big) = \frac{5}{18}$$

En particulier :

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(XY) = p' = \frac{5}{18}$$

4) Nous pouvons calculer la covariance du couple (X, Y) avec la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \underbrace{\mathrm{E}(XY)}_{\frac{5}{18}} - \underbrace{\mathrm{E}(X)}_{\frac{5}{9}}\underbrace{\mathrm{E}(Y)}_{\frac{5}{9}}\\ &= \frac{5}{9}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{9}\right) = -\frac{5}{2\times 81}\end{aligned}$$

Nous en déduisons la variance de $(X + Y)$ en développant par bilinéarité :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X+Y) &= \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y)\\ &= \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &= 2\times\frac{20}{81} + 2\times\left(-\frac{5}{2\times 81}\right)\\ &= \frac{40-5}{81} = \frac{35}{81}\end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y)$ du couple (X, Y) est défini par :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{V}(Y)}}$$

Comme $\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y)$:

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}\\ &= -\frac{5/(2\times 81)}{20/81}\\ &= -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

27.12

1) X_3 et N_3 sont à valeurs dans $[\![1, 3]\!]$. X_3 suit la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$:

$$\forall k \in [\![1,3]\!], \quad P(X_3 = k) = \frac{1}{3}$$

Sachant que $X_3 = k$, N_3 suit la loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$:

$$\forall \ell \leq k, \quad P_{X_3=k}(N_3 = \ell) = \frac{1}{k}$$

D'après la formule des probabilités composées, nous en déduisons la loi du couple (X, Y) et les lois marginales :

N_3 \ X_3	1	2	3	Loi de N_3
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{18}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
Loi de X_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

2) Nous avons identifié la loi marginale de N_3 en dressant le tableau de la loi conjointe. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N_3) &= \sum_{k=1}^{3} kP(N_3 = k)\\ &= \frac{11}{18} + 2\left(\frac{5}{18}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right)\\ &= \frac{27}{18} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(N_3^2\right) &= \sum_{k=1}^{3} k^2 P(N_3 = k)\\ &= \frac{11}{18} + 2^2\left(\frac{5}{18}\right) + 3^2\left(\frac{1}{9}\right)\\ &= \frac{49}{18}\end{aligned}$$

D'après la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(N_3) &= \mathrm{E}\left(N_3^2\right) - (\mathrm{E}(N_3))^2\\ &= \frac{49}{18} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{36}\end{aligned}$$

3) La loi conjointe n'est pas le produit des lois marginales. Par exemple :

$$P([X_3 = 1] \cap [N_3 = 3] = 0 \neq \underbrace{P(X_3 = 1)}_{\frac{1}{3}}\underbrace{P(N_3 = 3)}_{\frac{1}{9}}$$

donc N_3 et X_3 ne sont pas des variables indépendantes.

4) La famille $(X_n = \ell)_{1\leq\ell\leq n}$ est un système complet d'événements de probabilité $\dfrac{1}{n}$. Lorsque $X_n = \ell$, nous avons :

$$P_{X_n=\ell}(N_n = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } k \leq \ell \\ 0 & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

Donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$P([X_n = \ell] \cap [N_n = k]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n\ell} & \text{si } k \leq \ell \\ 0 & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

D'après la formule des probabilités totales, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} P(N_n = k) &= \sum_{\ell=1}^{n} P([X_n = \ell] \cap [N_n = k]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=k}^{n}\frac{1}{\ell} \end{aligned}$$

5) Par définition :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(N_n) &= \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=k}^{n}\frac{k}{n\ell}\Big) \\ &= \sum_{1\leq k\leq\ell\leq n}\frac{k}{n\ell} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc intervertir l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(N_n) &= \sum_{\ell=1}^{n}\Big(\frac{1}{n\ell}\sum_{k=1}^{\ell}k\Big) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\Big(\frac{1}{n\ell}\times\frac{\ell(\ell+1)}{2}\Big) \end{aligned}$$

Nous pouvons simplifier ℓ et factoriser $\frac{1}{2n}$:

$$\mathrm{E}(N_n) = \frac{1}{2n}\sum_{\ell=1}^{n}\ell + 1$$

Nous pouvons calculer la somme en décomposant :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{n}(\ell+1) &= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\ell}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}1}_{n} \\ &= \frac{n(n+3)}{2} \end{aligned}$$

Et nous concluons :

$$\mathrm{E}(N_n) = \frac{n+3}{4}$$

27.13

1) À l'instant 0, le mobile est à l'abscisse 0. Il passe à l'abscisse 1 à l'instant 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou reste à l'abscisse 0. X_1 suit donc la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

a) **Initialisation**

Par hypothèse $X_0(\Omega) = \{0\}$. Nous avons de plus vérifié à la question 1 que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$

b) **Hérédité**

Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons la au rang $n + 1$. À l'instant n, le mobile est sur une case d'abscisse 0 à n. S'il est sur la case d'abscisse k, il sera sur la case d'abscisse $k + 1$ ou sur la case d'abscisse 0 à l'instant $n + 1$: à l'instant $n + 1$, le mobile est sur une case d'abscisse 0 à $n + 1$, donc $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![0, n + 1]\!]$.

Réciproquement, si $\ell \in [\![1, n + 1]\!]$, par hypothèse :

$$P_{X_n=\ell-1}(X_{n+1} = \ell) = \frac{\ell}{\ell+1}$$

Donc :

$$P(X_{n+1} = \ell) = \frac{\ell}{\ell+1}P(X_n = \ell - 1) \neq 0$$

Enfin :

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = 0) \\ &\quad= \sum_{k=0}^{n} P([X_n = k] \cap [X_{n+1} = 0]) \\ &\quad= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}P(X_n = k) \neq 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'inclusion réciproque : $[\![0, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega)$ donc $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n + 1]\!]$.

c) **Conclusion**

La propriété est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Si le mobile est placé sur la case $k - 1$ à l'instant $n - 1$, il sera sur la case k à l'instant n avec probabilité $\frac{(k-1)+1}{(k-1)+2} = \frac{k}{k+1}$, donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P_{X_{n-1}=k-1}(X_n = k) \times P(X_{n-1} = k - 1) \\ &= \frac{k}{k+1}P(X_{n-1} = k - 1) \end{aligned}$$

4) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\forall k \leq n, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{k+1}u_{n-k}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

a) **Initialisation**

$P(X_0 = 0) = \frac{1}{0+1} u_0$ car $u_0 = P(X_0 = 0)$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

b) **Hérédité**

Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et démontrons la au rang n. Si $k = 0$, par définition de u_n :

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{0+1} u_n$$

car $u_n = P(X_n = 0)$

Si $k \geq 1$,

$$P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$$

Par hypothèse de récurrence

$$P(X_{n-1} = k-1) = \frac{1}{k} u_{(n-1)-(k-1)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &P(X_n = k) \\ &\quad = \frac{k}{k+1} \frac{1}{(k-1)+1} u_{(n-1)-(k-1)} \\ &\quad = \frac{1}{k+1} u_{n-k} \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang n.

c) **Conclusion**

La propriété est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall k \leq n, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$$

5) La probabilité totale de X_n est :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$$

Nous avons :

$$\forall k \leq n, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$$

Donc, en posant $\ell = n - k$:

$$\sum_{\ell=0}^{n} \frac{u_\ell}{n+1-\ell} = 1$$

6) Lorsque $n = 0$, la formule s'écrit :

$$u_0 = 1$$

Lorsque $n = 1$:

$$\frac{u_0}{2} + u_1 = 1$$

Donc $u_1 = \frac{1}{2}$. Lorsque $n = 2$:

$$\underbrace{\frac{u_0}{3} + \frac{u_1}{2}}_{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}} + u_2 = 1$$

donc :

$$u_2 = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

Lorsque $n = 3$:

$$\underbrace{\frac{u_0}{4} + \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{2}}_{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{15}{24}} + u_3 = 1$$

donc :

$$u_3 = 1 - \frac{15}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

7) Soit $n \geq 1$. Nous avons démontré à la question 3 :

$$P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$$

C'est à dire, en multipliant par $(k+1)$:

$$(k+1) P(X_n = k) = k P(X_{n-1} = k-1)$$

En faisant la somme pour k variant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1) P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k P(X_{n-1} = k-1)$$

Nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} (k+1) P(X_n = k) \\ &\quad = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k P(X_n = k)}_{\mathrm{E}(X_n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k)}_{1} \\ &\qquad - \underbrace{P(X_n = 0)}_{u_n} \end{aligned}$$

En posant $\ell = k - 1$, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} k P(X_n = k-1) \\ &\quad = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) P(X_{n-1} = \ell) \\ &\quad = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell P(X_n = \ell)}_{\mathrm{E}(X_{n-1})} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} P(X_n = \ell)}_{1} \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\mathrm{E}(X_n) + 1 - u_n = \mathrm{E}(X_{n-1}) + 1$$

C'est à dire :

$$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(X_{n-1}) + u_n$$

Sachant que $\mathrm{E}(X_0) = 0$, nous pouvons en déduire, par récurrence sur $n \geq 1$:

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

27.14

Notons $p = P(B) = \frac{k}{6}$ et $q = 1 - p = P(R)$.

1) L'événement $X_1 = \ell$ se décompose :

$$[X_1 = \ell] = [B_1 \cap \cdots \cap B_\ell \cap R_{\ell+1}] \cup [R_1 \cap \cdots \cap R_\ell \cap B_{\ell+1}]$$

Donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X_1 = \ell) = p^\ell q + q^\ell p$$

2) Vérifions que X_1 est bien une variable aléatoire.

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X_1 = \ell) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} p^\ell q + q^\ell p$$

Nous calculons la somme de la série géométrique de premier terme pq, de raison p, et la série géométrique de premier terme qp, de raison q. Comme $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$, les séries convergent et on en déduit :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X_1 = \ell) = \frac{pq}{1-q} + \frac{qp}{1-p}$$

Comme $p + q = 1$, nous avons $p = 1 - q$ et $q = 1 - p$:

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X_1 = \ell) = \frac{pq}{p} + \frac{qp}{q} = q + p = 1$$

X_1 admet une espérance si la série $\sum_\ell \ell P(X_1 = \ell)$ converge. Fixons $N \in \mathbb{N}$ et calculons :

$$\sum_{\ell=1}^{N} \ell P(X_1 = \ell) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell \left(p^\ell q + q^\ell p\right)$$

En développant et en regroupant :

$$\sum_{\ell=1}^{N} \ell P(X_1 = \ell) = pq\left(\sum_{\ell=1}^{N} \ell p^{\ell-1}\right) + pq\left(\sum_{\ell=1}^{N} \ell q^{\ell-1}\right)$$

La série $\sum \ell p^{\ell-1}$ est la série dérivée de la série géométrique de raison $p \in]0,1[$: elle est donc convergente. De même, la série $\sum \ell q^{\ell-1}$ est la série dérivée de la série géométrique de raison $q \in]0,1[$: elle est donc convergente. X_1 a donc une espérance, et :

$$\mathrm{E}(X_1) = pq\underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell p^{\ell-1}\right)}_{\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{q^2}} + pq\underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell q^{\ell-1}\right)}_{\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}}$$
$$= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$$

3) Posons $x = \frac{p}{q}$. Nous savons que $x > 0$ et $\mathrm{E}(X_1) = x + \frac{1}{x}$. Étudions la fonction $\varphi : x \longmapsto x + \frac{1}{x}$. φ est définie sur $]0, +\infty[$, dérivable, de dérivée :

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Le tableau de variation de φ est donc :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

En particulier, $\mathrm{E}(X) \geq 2$ avec égalité lorsque $x = 1$, c'est à dire $p = q = \frac{1}{2}$, donc $k = 3$.

$\mathrm{E}(X_1)$ est donc minimale lorsque $k = 3$, de minimum $\mathrm{E}(X_1) = 2$.

4) Si on note $B_{[\![k,\ell]\!]}$ et $R_{[\![k,\ell]\!]}$ les événements :

$$B_{[\![k,\ell]\!]} = B_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_\ell$$
$$R_{[\![k,\ell]\!]} = R_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_\ell$$

pour i et $j \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ se décompose :

$$[X_1 = i] \cap [X_2 = j] = \left[B_{[\![1,i]\!]} \cap R_{[\![i+1,i+j]\!]} \cap B_{i+j+1}\right] \cup \left[R_{[\![1,i]\!]} \cap B_{[\![i+1,i+j]\!]} \cap R_{i+j+1}\right]$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = p^i q^j p + q^i p^j q = p^{i+1} q^j + p^j q^{i+1}$$

5) La loi marginale de X_2 se calcule, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X_2 = \ell) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i \text{ et } X_2 = \ell) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(p^{i+1} q^\ell + p^\ell q^{i+1}\right)$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

On reconnaît la somme de la série géométrique de premier terme p^2q^ℓ, de raison p, et de la série géométrique de premier terme $p^\ell q^2$, de raison q. Comme $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$, les séries convergent et on en déduit :

$$P(X_2 = \ell) = \frac{p^2q^\ell}{1-p} + \frac{q^2p^\ell}{1-q}$$

C'est à dire, puisque $1 - p = q$ et $1 - q = p$:

$$P(X_2 = \ell) = p^2q^{\ell-1} + q^2p^{\ell-1}$$

X_2 est bien une variable aléatoire si $P(X_2 = \infty) = 0$, c'est à dire si la probabilité totale vérifie :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X_2 = \ell) = 1$$

Nous savons que les événements $[X_2 = \ell]$ pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux incompatibles, donc la série $\sum P(X_2 = \ell)$ est une série à terme positifs, convergente, de somme majorée par $P(\Omega) = 1$. Puisque la série est convergente, nous pouvons calculer :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X_2 = \ell) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(p^2q^{\ell-1} + q^2p^{\ell-1}\right)$$

On reconnaît la somme de la série géométrique de premier terme p^2, de raison q, et de la série géométrique de premier terme q^2, de raison p. Comme $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$, les séries convergent et on en déduit :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X_2 = \ell) = \frac{p^2}{1-q} + \frac{q^2}{1-p}$$

C'est à dire, puisque $1 - p = q$ et $1 - q = p$:

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X_2 = \ell) = p + q = 1$$

X_2 est donc bien une variable aléatoire.

X_2 admet une espérance si et seulement si la série $\sum_\ell \ell P(X_2 = \ell)$ converge. Fixons $N \in \mathbb{N}$, et calculons :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{N} \ell P(X_2 = \ell) &= \sum_{\ell=1}^{N} \ell\left(p^2q^{\ell-1} + q^2p^{\ell-1}\right)\\ &= p^2\sum_{\ell=1}^{N} \ell q^{\ell-1} + q^2\sum_{\ell=1}^{N} \ell p^{\ell-1}\end{aligned}$$

La série $\sum \ell q^{\ell-1}$ est la série dérivée de la série géométrique de raison $q \in]0,1[$: elle est donc convergente. De même, la série $\sum \ell p^{\ell-1}$ est la série dérivée de la série géométrique de raison $p \in]0,1[$: elle est donc convergente. X_2 a donc une espérance, et :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_2) &= p^2\underbrace{\Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell q^{\ell-1}\Big)}_{\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p^2}} + q^2\underbrace{\Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell p^{\ell-1}\Big)}_{\frac{1}{(1-p)^2}=\frac{1}{q^2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

6) a) Si $k \neq 3$, nous avons $p \neq q$.

$$\begin{aligned}P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1) &= p^2q + pq^2\\ &= pq(p+q) = pq\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}P(X_1 = 1) &= 2pq\\ P(X_2 = 1) &= p^2 + q^2\end{aligned}$$

Donc :

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = 2pq\left(p^2 + q^2\right)$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}&P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\\ &\qquad = P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)\\ &\iff 2pq\left(p^2 + q^2\right) = pq\end{aligned}$$

Sachant que $p \neq 0$ et $q \neq 0$, nous pouvons simplifier par pq. De plus : $q = 1 - p$, donc $q^2 = 1 - 2p + p^2$:

$$\begin{aligned}&P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\\ &\qquad = P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)\\ &\iff 2\Big(p^2 + \underbrace{1 - 2p + p^2}_{q^2}\Big) = 1\\ &\iff 4p^2 - 4p + 1 = 0\\ &\iff (2p-1)^2 = 0\end{aligned}$$

Lorsque $p \neq \frac{1}{2}$, c'est à dire lorsque $k \neq 3$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}&P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\\ &\qquad \neq P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])\end{aligned}$$

donc les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

b) Lorsque $k = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$. Les lois de X_1, X_2 et du couple sont :

$$\begin{aligned}P(X_1 = \ell) &= \frac{1}{2^\ell}\\ P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) &= \frac{1}{2^{i+j}}\\ P(X_2 = j) &= \frac{1}{2^j}\end{aligned}$$

La loi du couple est égale au produit des lois marginales, donc les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. De plus, elles suivent toutes les deux la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

27.15

1) a) Soit G_A l'événement : ńle joueur A gagneż.

En notant le vainqueur successif de chaque partie, G_A est la réunion des événements :

- AA : A remporte les deux premiers matchs,
- $(AB)^nAA$: A remporte le premier match, B le suivant, et ainsi de suite n fois, avant que A l'emporte deux fois consécutivement,
- $(BA)^nA$: B remporte le premier match, A le suivant, et ainsi de suite n fois, avant que A remporte le $2n+1$-ième match.

$$P(G_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(AB)^n}_{(pq)^n} \underbrace{P(AA)}_{p^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(BA)^n}_{(qp)^n} \underbrace{P(A)}_{p}$$

On reconnaît la somme des séries géométriques de raison pq, de premier terme respectif p^2 et qp^2. Comme $pq \in]0,1[$ les séries convergent et :

$$P(G_A) = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}$$

b) Lorsque $n \geq 1$:

$$\{X = 2n\} = \left\{(AB)^{n-1}A^2, (BA)^{n-1}B^2\right\}$$
$$P(X = 2n) = (pq)^{n-1}\left(p^2 + q^2\right)$$

De même, lorsque $n \geq 1$:

$$\{X = 2n+1\} = \{(AB)^nB, (BA)^nA\}$$
$$P(X = 2n+1) = (pq)^n \underbrace{(p+q)}_{1} = (pq)^n$$

Vérifions que X est une variable aléatoire réelle en calculant la probabilité totale :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n+1) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (pq)^{n-1}\left(p^2 + q^2\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} (pq)^n \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des séries géométriques de raison pq, de premier terme respectif $p^2 + q^2$ et pq. Comme $pq \in]0,1[$ la série converge et :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = \frac{p^2 + q^2 + pq}{1 - pq} = \frac{p^2 + (1-p)^2 + p(1-p)}{1 - p(1-p)}$$

En développant et en simplifiant :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = \frac{1 - p + p^2}{1 - p + p^2} = 1$$

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par A au cours d'un jeu.

c) Sachant que $X = 2n$, $Y = n+1$ si A l'emporte (c'est l'événement $(AB)^{n-1}A^2$).

$$P_{X=2n}(Y = n+1) = \frac{p^{n+1}q^{n-1}}{(pq)^{n-1}\left(p^2+q^2\right)} = \frac{p^2}{p^2+q^2}$$

Sachant que $X = 2n$, $Y = n-1$ si B l'emporte (c'est l'événement $(BA)^{n-1}B^2$).

$$P_{X=2n}(Y = n-1) = \frac{p^{n-1}q^{n+1}}{(pq)^{n-1}\left(p^2+q^2\right)} = \frac{q^2}{p^2+q^2}$$

La loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2n)$ est donc :

$$P_{X=2n}(Y = k) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{p^2+q^2} & \text{si } k = n+1 \\ \dfrac{q^2}{p^2+q^2} & \text{si } k = n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sachant que $X = 2n+1$, $Y = n+1$ si A l'emporte (c'est l'événement $(BA)^nA$).

$$P_{X=2n}(Y = n+1) = \frac{p^{n+1}q^n}{(pq)^n} = p$$

Sachant que $X = 2n+1$, $Y = n$ si B l'emporte (c'est l'événement $(AB)^nB$).

$$P_{X=2n}(Y = n) = \frac{p^nq^{n+1}}{(pq)^n} = q$$

La loi conditionnelle de Y sachant $X = 2n+1$ est donc :

$$P_{X=2n+1}(Y = k) = \begin{cases} p & \text{si } k = n+1 \\ q & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

d) Lorsque $k \geq 2$, nous pouvons décomposer l'événement $Y = k$:

i. si B l'emporte après avoir perdu le premier jeu, c'est l'événement $(AB)^k B$:

$$P((AB)^k B) = (pq)^k q = p^k q^{k+1}$$

ii. si B l'emporte après avoir gagné le premier jeu, c'est l'événement $(BA)^k B^2$:

$$P((BA)^k BB) = (pq)^k q^2 = p^k q^{k+2}$$

iii. si A l'emporte après avoir perdu le premier jeu, c'est l'événement $(BA)^{k-1} A$:

$$P((BA)^{k-1} A) = (pq)^{k-1} p = p^k q^{k-1}$$

iv. si A l'emporte après avoir gagné le premier jeu, c'est l'événement $(AB)^{k-2} A^2$:

$$P((AB)^{k-2} A^2) = (pq)^{k-2} p^2 = p^k q^{k-2}$$

Donc, en faisant la somme sur tous les cas possibles, lorsque $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= p^k q^{k-2} \underbrace{\left(1 + q + q^3 + q^4\right)}_{(1+q)\left(1+q^3\right)} \\ &= p^k q^{k-2} (1 + q)\left(1 + q^3\right) \end{aligned}$$

Lorsque $k = 1$, A ne peut pas l'emporter ; seul les deux premiers cas sont possibles :

$$P(Y = 1) = (1 + p)q^2$$

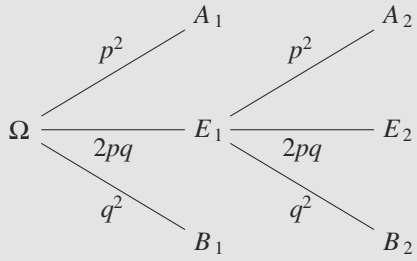
Lorsque $k = 0$, B remporte les deux premier matchs :

$$P(Y = 0) = q^2$$

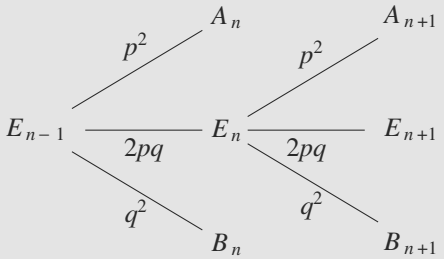
2) *Règle du jeu : pour gagner, un joueur doit gagner deux parties de plus que l'autre.*

Notons A_n l'événement « le joueur A gagne en $2n$ parties », B_n l'événement « le joueur B gagne en $2n$ parties » et E_n l'événement « les joueurs A et B sont à égalité après $2n$ parties »

a) On peut représenter le jeu par le graphe suivant :



que l'on peut prolonger :



où on note que, sachant E_n, A l'emporte s'il remporte les $2n+1$ et $2n+2$-èmes matchs :

$$P_{E_n}(A_{n+1}) = P\left(A^2\right) = p^2$$

B l'emporte s'il remporte les $2n+1$ et $2n+2$-èmes matchs :

$$P_{E_n}(B_{n+1}) = P\left(B^2\right) = q^2$$

et A et B sont à égalité après les $2n+2$ premières parties si A emporte un match et B l'autre :

$$P_{E_n}(E_{n+1}) = P(AB) + P(BA) = 2pq$$

b) D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= p^2 P(E_{n-1}) \\ P(A_{n+1}) &= p^2 \times 2pq \times P(E_{n-1}) \\ &= 2pqP(A_n) \end{aligned}$$

La suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de premier terme $P(A_1) = p^2$, de raison $2pq$:

$$\forall n \geq 1, \quad P(A_n) = (2pq)^{n-1} p^2$$

c) La probabilité que A gagne est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2pq)^{n-1} p^2$$

On calcule la somme de la série géométrique de premier terme p^2, de raison $2pq$. Comme $2pq = P(E_2) \in]0, 1[$ la série converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \frac{p^2}{1 - 2pq}$$

27.16 Soit $t \mapsto P(X > t)$ la fonction d'antirépartition de la variable aléatoire X. Elle se déduit de la fonction de répartition :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$$

La fonction de répartition caractérise la loi de X, donc la fonction d'antirépartition caractérise également la loi de X. Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \text{ où } q = 1 - p$$

Nous calculons la somme de la série géométrique de premier terme pq^n, de raisons q. Comme $q \in]0, 1[$, la série converge et :

$$P(X > n) = \frac{pq^n}{1-q} = q^n \text{ car } p = 1 - q$$

La fonction d'antirépartition du minimum de deux variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions d'antirépartition. En effet :

$$\begin{aligned} P(\min(X_1, X_2) > n) &= P(X_1 > n \text{ et } X_2 > n) \\ &= P(X_1 > n) P(X_2 > n) \end{aligned}$$

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$, nous en déduisons :

$$P(\min(X_1, X_2) > n) = (q_1 q_2)^n$$

qui est la fonction d'antirépartition de la loi $\mathcal{G}(p)$ où la probabilité d'échec est $q = q_1 q_2$. La probabilité de succès est donc :

$$\begin{aligned} p &= 1 - q \\ &= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \\ &= p_1 + p_2 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

27.17

Commençons par modéliser le problème :

• *Univers :* l'univers Ω est l'ensemble des n-listes sans répétition parmi les N boules de l'urne.

• *Probabilité :* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme.

1) Si on note $X_1, X_2, \ldots X_n$ les n variables de Bernoulli :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k\text{-ième tirage est un succès} \\ 0 & \text{si le } k\text{-ième tirage est un échec} \end{cases}$$

Le nombre de succès à l'issue des n tirages est :

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

2) X compte le nombre de succès lors d'un tirage sans remise de n boules dans une urne contenant N boules, dont une proportion p de boules gagnantes : X suit donc la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$.

a) X_k vaut 0 ou 1 : elle suit donc une loi de Bernoulli,

b) l'événement $X_k = 1$ est l'ensemble des n-listes sans répétition, telle que le k-ième élément de la liste est une boule gagnante. Une telle liste est entièrement déterminée :

i. Par le choix de la k-ième boule, parmi les pN boules gagnantes,

ii. Par le choix des $n-1$ autres boules, qui forme une $n-1$ liste sans répétition parmi les $N-1$ boules restantes

En particulier :

$$\text{card}(X_k = 1) = pN\mathcal{A}_{N-1}^{n-1} = \text{card}(X_1 = 1)$$

donc :

$$P(X_k = 1) = P(X_1 = 1)$$

$X_1 = 1$ si on tire une boule blanche au premier tirage, dans une urne contenant une proportion p de boules blanches, donc $P(X_1 = 1) = p$ et on conclut que, pour tout $k \leq n$:

$$P(X_k = 1) = P(X_1 = 1) = p$$

Les variables X_k suivent donc toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. En particulier, $\mathrm{E}(X_k) = p$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donc, par linéarité :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = np$$

3) La variance se développe par bilinéarité :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \mathrm{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\ &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell\right) \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n}} \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}_{n^2 \text{ termes}} \end{aligned}$$

En distingant les n cas où $k = \ell$, sachant que $\mathrm{Cov}(X_k, X_k) = \mathrm{V}(X_k)$ et les $n^2 - n$ cas où $k \neq \ell$:

$$\mathrm{V}(X) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_k)}_{n \text{ termes}} + \underbrace{\sum_{k \neq \ell} \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}_{n^2 - n \text{ termes}}$$

4) La covariance se calcule par la formule de Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = \mathrm{E}(X_k X_\ell) - \mathrm{E}(X_k)\mathrm{E}(X_\ell)$$

a) $X_k X_\ell$ vaut 0 ou 1 : elle suit donc une loi de Bernoulli,

b) l'événement $\{X_k X_\ell = 1\}$ est l'ensemble des n-listes sans répétition, telle que les k-ième et ℓ-ième élément de la liste sont deux boules gagnantes. Une telle liste est entièrement déterminée :

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

i. Par le choix de la k-ième boule, parmi les pN boules gagnantes,

ii. Par le choix de la ℓ-ième boule, parmi les $pN-1$ autres boules gagnantes,

iii. Par le choix des $n-2$ autres boules, qui forme une $n-2$ liste sans répétition parmi les $N-2$ boules restantes

Ainsi, card $([X_kX_\ell = 1]) = pN(pN-1)\mathcal{A}_{N-2}^{n-2}$ et

$$\begin{aligned} P(X_kX_\ell = 1) &= \ !\frac{pN(pN-1)\mathcal{A}_{N-2}^{n-2}}{\mathcal{A}_N^n} \\ &= \frac{pN(pN-1)(N-2)!(N-n)!}{(N-n)!N!} \\ &= \frac{pN(pN-1)}{N(N-1)} \\ &= p\frac{pN-1}{N-1} \end{aligned}$$

Ainsi X_kX_ℓ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p\dfrac{(pN-1)}{N-1}$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_kX_\ell) &= P(X_kX_\ell = 1) \\ &= p\left(\frac{pN-1}{N-1}\right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons la covariance :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) &= \mathrm{E}(X_kX_\ell) - \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_\ell) \\ &= p\left(\frac{pN-1}{N-1}\right) - p^2 \\ &= p\left(\frac{pN-1}{N-1} - p\right) \\ &= p\left(\frac{pN-1-pN+p}{N-1}\right) = -\frac{pq}{N-1} \end{aligned}$$

5) Le calcul de la variance de la somme est donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}(X_k)}_{\substack{n \text{ termes} \\ \text{égaux à } pq}} + \underbrace{\sum_{k\neq\ell}\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}_{\substack{n^2-n \text{ termes} \\ \text{égaux à } -\frac{pq}{N-1}}} \\ &= npq - \left(n^2-n\right)\frac{pq}{N-1} \\ &= npq\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) \\ &= npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \end{aligned}$$

Éléments d'algorithmique

CHAPITRE 28

Plan

28.1 Environnement PASCAL 735
28.2 Structures de base 738
28.3 Fonctions et procédures 743
28.4 Les Tableaux 745
28.5 Simulations en probabilité 747
28.6 Logiciel 749
Synthèse 750
Tests et exercices 751
Corrigés des exercices 756

Introduction

Les connaissances exigibles sont de deux natures : une maîtrise minimale de l'environnement PASCAL et une liste de savoir-faire en lien avec le contenu du cours de mathématiques.

L'évalutation aux concours se présente sous plusieurs formes :

- écrire un programme
- compléter un programme donné
- commenter un programme donné

Objectifs

- Initiation à l'algorithmique
- Apprentissage du langage Pascal
- Mises en oeuvre sur les notions du cours de mathématiques : nombres, suites, variables aléatoires, etc.

Prérequis

- Les notions du cours de mathématiques qui sont manipulées.

28.1 Environnement PASCAL

28.1.1 Présentation générale

Algorithmie et programmation

Un algorithme est la description d'une suite finie d'opérations permettant d'arriver à un résultat final déterminé. En rajoutant le formalisme du langage utilisé, ici le Turbo-Pascal, cette description est appelée programme. Ce langage se structure sous la forme d'un fichier-programme : il doit être compilé (c'est-à-dire traduit en un programme que peut exécuter l'ordinateur) avant d'être exécuté.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Exemple d'un algorithme et d'un programme qui calcule $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{k}$:

Initialiser la variable s à 0.
Pour k variant de 1 à 12 faire :
 rajouter $\frac{1}{k}$ à s ($s \leftarrow s + \frac{1}{k}$)
Sortie : Afficher s

```
VAR k:INTEGER;s:REAL;
BEGIN
s:=0;
FOR k:=1 TO 12 DO s:=s+1/k ;
WRITE('Le resultat est : ',s);
READLN;
END.
```

Exemple

Voici un exemple de programme plus détaillé : calcul de $\binom{12}{p}$

Partie déclarative / *Corps du programme*

```
PROGRAM Coeff_Binomial;
CONST n=12;                                          } Constantes numériques
VAR p:INTEGER;                                       } Variables utilisées dans
    resultat:REAL;                                   }   le corps du programme

FUNCTION fact(k:INTEGER):REAL;                       }
    VAR j:INTEGER;                                   }
        aux:REAL;                                    }
    BEGIN                                            } Fonction calculant k!
    aux:=1;                                          }
    FOR j:=1 TO k DO aux:=aux*j;                     }
    fact:=aux;                                       }
    END;

PROCEDURE PparmiN(p,n:INTEGER;VAR coeff:REAL);       }
    BEGIN                                            }
    IF (n<0) OR (p>n) OR (p<0) THEN coeff:=0         } Procédure calculant (n p)
    ELSE coeff:=fact(n)/fact(p)/fact(n-p);           }
    END;                                             }
        {Début de programme proprement dit !}        } Commentaire du programmeur
BEGIN
WRITE('Donner un entier : ');                        } Communication entre
READLN(p);                                           }   le programme et l'utilisateur
PparmiN(p,12,resultat);                              } Calcul de p parmi 12
WRITE(p,' parmi 12 vaut : ',resultat:0:0);           } Affichage du résultat
READLN;
END.
```

Un programme comporte deux parties :

► le **corps du programme** : cette partie est délimitée par les balises `BEGIN ... END.` et contient les instructions à exécuter de manière successive.

► une **partie déclarative** : préambule au corps du programme, cette partie est optionnelle et permet de définir des outils qui seront utilisés dans le corps du programme :

- donner un nom au programme avec l'instruction `PROGRAM Nom;`
- des contantes numériques : `CONST ...;`
- de nouveaux types de variables : `TYPE ...;`
- des variables : `VAR ...;`
- des fonctions : `FUNCTION ...;`
- des procédures : `PROCEDURE ...;`

Voici un programme de bienvenue :

```
BEGIN
WRITELN('Bonne lecture');
READLN;
END.
```

Les noms de fonction, de procédure, de variable et celui du programme sont des identificateurs du langage Pascal, ils sont composés de lettres, de chiffres et de _ et commencent nécessairement par une lettre. Il y a quelques contraintes : être différents entre eux, ne pas contenir d'espace ou d'opération (-), ne pas être un des mots du langage PASCAL (`AND`, `THEN`, `FUNCTION`, `VAR`, ...).

Quelques points de syntaxe

- Le compilateur Pascal ne fait pas la différence entre les minuscules et les majuscules : nous écrirons, par défaut, les structures du langage en majuscule.
- Chaque instruction élémentaire est suivie d'un point-virgule (exceptée celle précédant les commandes `ELSE, THEN, DO, TO, DOWNTO`, et le `END` final qui lui est suivi d'un point).
- Les nombres à virgule s'écrivent avec un point : 1.2 au lieu de 1, 2.
- Il est possible, entre accolades, d'écrire des commentaires qui ne seront pas lus par le programme lors de son exécution.

28.1.2 Variables et types

Toutes les variables utilisées dans le corps du programme doivent être déclarées, avec leur type, au début du programme après la mention `VAR`.

➜ Notion de variable

Une variable en informatique est définie par son nom (identificateur du langage Pascal) et son type : l'ensemble des valeurs possibles et des opérations qui lui sont compatibles. La variable contient une valeur qui est nécessairement du type auquel elle appartient. Par exemple, dans une variable définie comme un nombre entier, de type `INTEGER`, il ne sera pas possible de stocker le nombre 0.5

Les constantes sont des variables numériques de type `INTEGER` ou `REAL` et leur valeur n'est pas modifiable lors de l'exécution du programme : elles sont déclarées séparément. Elles permettent de rendre un programme modulable "simplement" (cf. page 745).

➜ **Le type d'une variable** : il y en a quatre à connaître,

Type	Description	Bornes
`REAL`	Nombre réel	nul ou de valeur absolue entre $2,9\ 10^{-39}$ et $1,7\ 10^{38}$
`INTEGER`	Entier	entre -2^{31} et $2^{31}-1^{\star}$
`BOOLEAN`	Booléen (test logique)	`TRUE` et `FALSE`
`ARRAY`	Tableau	

$\star$: Actuellement les compilateurs courants travaillent avec 32 bits (dont un bit pour le signe). Prochainement ils travaillerons en 64 bits. $2^{31} = 2147483648$.

Faire attention à la taille des entiers ! En particulier, dans la manipulation des factorielles, il est plus prudent de déclarer le nombre en `REAL` car le dépassement des bornes engendre des erreurs de calcul. (cf page 742)

Remarque – Une simulation d'un lancer de pièce peut donner lieu à l'utilisation d'une variable de type `CHAR` qui est un caractère : par exemple `a:='P'`.

Certaines affectations nécessitent que la variable soit initialisée :

`x:=x+1;` augmente de 1 la valeur contenue dans la variable `x`

`x:=x*x;` la valeur finale de `x` est le carré de la valeur initiale

➜ L'affectation

La commande `nb:=PI;` permet d'affecter à la variable de nom `nb` la quantité égale au membre de droite : ici, la valeur de `nb` devient une valeur approchée de π (implémentée en Turbo pascal dans la variable protégée `PI`). Cette commande ne pourra fonctionner que si le type est compatible. Ici, la variable doit être déclarée comme `REAL`.

28.1.3 Les procédures WRITELN, READLN

Il existe trois procédures d'entrée-sortie permettant une communication entre le programme et l'utilisateur via une fenêtre de texte et le clavier. Cela permet à l'utilisateur de fixer les paramètres d'éxécution du programme et d'afficher les résultats recherchés. (Par exemple au programme `Coeff_Binomial` page 736)

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Remarque – Les contraintes d'affichages (espacement et nombre de chiffre après la virgule) sont utiles pour formaliser proprement les résultats dans la fenêtre de dialogue. Au concours, l'évalutation étant à l'écrit, il n'est pas nécessaire de les préciser.



Il convient de terminer un programme par la commande `READLN;` avant le `END.` final. Cela bloque la fenêtre d'affichage jusqu'à ce que l'utilisateur appuie sur une touche quelconque : ainsi, il est possible de lire les résultats !

• `WRITELN( , , ... );` permet d'écrire dans la fenêtre en effectuant un retour à la ligne après l'écriture ; les paramètres sont séparés par des virgules et sont de deux natures : du texte entre apostrophes `'...'`, des résultats numériques ou logiques (des expression à base de nombres et des variables de type `REAL`, `INTEGER` ou `BOOLEAN`).

(i) cas d'un nombre réel : `WRITELN(PI:4:2);` réserve un espace de 4 caractères avant d'écrire le nombre π avec 2 chiffres après la virgule. Par défaut `WRITELN(PI:4)` affiche l'écriture scientifique du nombre π.

(ii) cas d'un nombre entier : `WRITELN(3*2+1:5);` affiche 7 après un espace de 5 caractères. Il n'y a pas de chiffre après la virgule à spécifier pour un entier.

(iii) `WRITELN(a);` écrit dans la fenêtre la valeur contenue dans la variable `a`. A ne pas confondre avec `WRITELN('a');` qui écrit la lettre `a` dans la fenêtre.

• `READLN( , , ... );` permet de définir la valeur de variables numériques avec des nombres entrés au clavier par l'utilisateur, séparés par la touche "Entrer".

• La commande `WRITE` réalise le même travail que `WRITELN` sans effectuer de retour à la ligne.

28.1.4 Rudiments calculatoires

➜ **Opérations élémentaires** :

Les opérations arithmétiques s'appliquent à des nombres : l'addition +, la soustraction -, la multiplication * et la division /.



La puissance n'est pas définie comme une opération usuelle ; trois alternatives sont possibles :
• taper `k*k*k` au lieu de `k^3`
• si `x>0` alors, `x^a = EXP(a*LN(x))`
• écrire une fonction spécifique pour `x^n`. (cf page 743)

➜ **Fonctions usuelles** :

Fonction	Description	Exemple
`a DIV b`	Quotient de la division d'entiers	`12 DIV 7` → `1`
`a MOD b`	Reste de la division d'entiers	`12 MOD 7` → `5`
`LN(x)`	Logarithme néperien	`LN(1)` → `0`
`EXP(x)`	Exponentielle	`EXP(1)` → `2.71...`
`TRUNC(x)`	Troncature	`TRUNC(1.2)` → `1`
		`TRUNC(-2.7)` → `-2`
`ABS(x)`	Valeur absolue	`ABS(-11.1)` → `11.1`
`SQRT(x)`	Racine carrée	`SQRT(1.44)` → `1.2`
`SIN(x)`	Sinus (en radian)	`SIN(PI/6)` → `0.5`
`COS(x)`	Cosinus (en radian)	`COS(PI/2)` → `0`
`ARCTAN(x)`	Arctan (en radian)	`ARCTAN(1)` → `0.79` ($\approx \frac{\pi}{4}$)

28.2 Structures de base

28.2.1 Structure séquentielle

La structure séquentielle est naturelle : c'est une liste d'instructions que le programme va lire et exécuter l'une après l'autre, dans l'ordre d'écriture.

Dans les structures suivantes, ces balises sont nécessaires dès qu'il y a plus d'une commande à exécuter. (cf page 740)

Remarque – Écrire pour être lu ! Penser à mettre des commentaires entre accolades et à structurer votre présentation par des tabulations, en particulier entre ces balises.

➜ Les balises `BEGIN ... END;`

Les balises de rédaction `BEGIN ... END;` informent du début et de la fin d'une suite d'instructions indissociables. Elles sont utilisées dans la déclaration d'une fonction, d'une procédure. Le corps de programme est aussi encadrée par de telles balises suivie d'un point.

➜ Notion de variable auxiliaire

Une variable ne peut contenir qu'une valeur. Lors de l'affectation d'une autre valeur, on écrase et on perd la valeur initiale. Introduire une variable auxiliaire permet : soit de faire une copie de la valeur initiale pour qu'elle puisse être réutilisée par la suite, soit de faire des calculs intermédaires sans modifier les variables *principales*. L'utilité des variables auxiliaires est temporaire, liée à une tâche particulière.

Prenons pour exemple l'échange de valeurs entre deux variables.

> Au début `a` et `b` contiennent respectivement 2 et 5. Une suite d'instructions doit amener à avoir 2 dans `b` et 5 dans `a` :

Remarque – Le problème d'affectations successives de valeurs se pose lors du calcul d'un terme d'une suite récurrente double (cf. page 742) ou d'un système récurrent (cf. page 741).
Il est conseillé d'utiliser autant de variables auxiliaires que de calculs à faire.

Contenu des variables à chaque étape

Commandes	a	b	aux	Description
	2	5		*Initialisation*
`aux:=a;`	2	5	2	*Copie de la valeur de* `a` *dans* `aux`
`a:=b;`	5	5	2	*On met dans* `a` *la valeur contenue dans* `b`
`b:=aux;`	5	2	2	*On met dans* `b` *dans la valeur initialement contenue dans* `a` *et sauvegardée dans* `aux`

28.2.2 Structure conditionnelle

Suivant la valeur d'une expression booléenne le programme effectue une opération ou une autre mais jamais les deux :

Remarque – La commande `ELSE` est optionnelle.
Lorqu'il y a plusieurs instructions, ne pas oublier les balises `BEGIN ... END;`.

Si la condition est vraie alors faire ...	`IF ... THEN ...`
sinon faire ...	`ELSE ...`

Une variable de type `BOOLEAN` contient l'information "*vrai*" ou "*faux*" (`TRUE` ou `FALSE`).

• Il est possible d'obtenir directement une expression booléenne par une comparaison :

Comparaison	`a = b`	`a <> b`	`a < b`	`a <= b`	`a > b`	`a >= b`
Expression vraie si	$a = b$	$a \neq b$	$a < b$	$a \leqslant b$	$a > b$	$a \geqslant b$

• Les opérateurs booléens `AND`, `OR` et `NOT`, associés aux connecteurs logiques (conjonction "*et*", disjonction "*ou*" et négation "*non*") permettent de composer des expressions booléennes. Par exemple : x vérifiant $-2 < x \leqslant 3$ s'écrit `(-2<x) AND (x<=3)` ; mais `-2<x<=3` n'est pas une commande valide.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

• Remarque syntaxique : il n'y a pas de point-virgule après l'expression booléenne, ni après la dernière instruction précédant la commande ELSE.
• Ne pas confondre l'affectation (:=) et le test d'égalité (=).

Exemple

Programme donnant le maximum de trois nombres réels.

```
PROGRAM max;
VAR a,c,b:REAL;
BEGIN
WRITELN('Entrer trois nombres : ');
READLN(a,b,c);
IF (a>=b) AND (a>=c) THEN WRITELN('le maximum est : ',a:0:1)
ELSE IF b>=c THEN WRITELN('le maximum est : ',b:0:1)
    ELSE WRITELN('le maximum est : ',c:0:1);
READLN;
END.
```

28.2.3 Structures répétitives

Les structures répétitives, au nombre de trois, permettent de répéter une suite d'instructions. Le nombre de répétitions peut être défini à l'avance (cas du calcul du n-ième terme d'une suite page 741) ou soumis à la réalisation d'une condition (cas d'approximation d'une limite à une précision donnée page 742).

Boucle FOR ... TO ... DO

Pour toutes les valeurs de i variant de n à m par progression de +1, on répète la boucle d'instructions : cela fait $m - n + 1$ itérations, avec n et m des variables de type INTEGER.
Si $n > m$, alors rien ne se passe.

```
FOR i:=n TO m DO ...
ou
FOR i:=n TO m DO
   BEGIN
   ...
   END;
```

Exemples

Trois exemples classiques :

• $S = \sum_{m=7}^{21} \sqrt{m}$

```
PROGRAM Somme;
VAR s: REAL;
    m: INTEGER;
BEGIN
s:=0;
FOR m:=7 TO 21 DO s:=s+SQRT(m);
WRITELN('S= ',s:0:5);
READLN;
END.
```

• $P = \prod_{k=1}^{20} \left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell}{\ell^2 + k} \right)$

```
PROGRAM Produit;
VAR p,s: REAL;
    k,l: INTEGER;
BEGIN
p:=1;
FOR k:=1 TO 20 DO
   BEGIN
   s:=0;
   FOR l:=1 TO k DO s:=s+l/(l*l+k);
   p:=p*s;
   END;
WRITELN('P= ',p:0:6);
READLN;
END.
```

• Calcul des termes de rang n d'un système récurrent :

Soit les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n \\ y_{n+1} = 2y_n - x_n \\ z_{n+1} = 2z_n - y_n + x_n \end{cases}$$

Les variables `x,y` et `z` contiennent successivement les termes des suites respectives. Les variables auxiliaires `u,v` et `w` permettent d'effectuer les calculs intermédiaires avant d'affecter à `x,y` et `z` la valeur des prochains termes.

```
PROGRAM Systeme;
VAR x,y,z,u,v,w:REAL;
    n,k:INTEGER;

BEGIN
WRITELN('Donner X0, Y0, Z0 et n');
READLN(x,y,z,n);
IF n=0 THEN WRITELN('Au rang 0 les termes sont ',x:0:2,y:10:2,z:10:2)
ELSE BEGIN
    FOR k:=1 TO n DO
       BEGIN
       u:=2*x-y;v:=2*y-x;w:=2*z-y+x;
       x:=u;y:=v;z:=w;
       END;
    WRITELN('Au rang ',n,' les termes sont ',x:0:2,y:10:2,z:10:2);
   END;
READLN;
END.
```

Remarque – Il existe une autre structure similaire :

`FOR i:=n DOWNTO m DO ...`

La répétition se fait pour toutes les valeurs de i variant de n à m par progression de -1. Si $n < m$ alors rien ne se passe. (cf la méthode de Hörner page 746)

Boucles `WHILE, REPEAT ...`

Tant qu'une expression booléenne reste vraie, on répète la boucle d'instructions.	`WHILE ... DO ...`

On répète la boucle d'instructions jusqu'à ce qu'une expression booléenne devienne vraie.	`REPEAT` `  ...` `UNTIL ...`

- Ces deux structures sont interchangeables en remarquant que la condition de réalisation de l'une est la négation de celle de l'autre.
- Remarquer que la boucle `WHILE` place le test avant les instructions et donc les instructions peuvent ne pas être exécutées. Dans la boucle `REPEAT` les instructions sont exécutées au moins une fois puisqu'elles précèdent le test.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

- Une boucle `FOR ...` peut être remplacée par une telle structure :

```
FOR i:=1 TO n DO ...
```

```
i:=0;
WHILE i<n DO
   BEGIN
   i:=i+1;
   ...
   END;
```

```
i:=0;
REPEAT
   i:=i+1;
   ...
UNTIL i=n;
```

Exemple

On considère la suite de *Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} F_0 = 1,\ F_1 = 1, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

On peut montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ converge vers le *nombre d'or* :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et $\forall n \in \mathbb{N},\ |\varphi - v_n| \leqslant \dfrac{1}{F_n F_{n+1}}$

Le programme ci-contre calcule φ à une précision 10^{-n} près.

```
PROGRAM nbdOR;
VAR p,y,F,FF,M:REAL;
   i,n:INTEGER;

BEGIN
WRITE('Entrez la precision 10^-n : n= ');
READLN(n);
p:=1;
FOR i:=1 TO n DO p:=p/10;
FF:=1;F:=1;y:=1;
WHILE y>p DO
   BEGIN
   M:=F;   {variable auxiliaire}
   F:=F+FF;
   FF:=M;
   y:=1/(F*FF);
   END;
WRITELN('Le nombre d or vaut ',F/FF:0:n);
READLN;
END.
```

Remarques

1. L'introduction de la variable auxiliaire `M` permet une affectation circulaire : à l'étape k, `F` contient F_k et `FF` contient F_{k-1} , on commence par faire une sauvegarde de F_k (`M:=F;`), puis on procède au calcul de terme suivant, F_{k+1}, que l'on affecte à `F` ; enfin, on met dans `FF` la valeur F_k contenue dans `M`.
2. Dans l'exemple ci-dessus, les variables `M`, `F` et `FF` contiennent des entiers qui peuvent être grands : elles sont déclarées en `REAL`.
3. L'affichage du résultat se fait avec n chiffres après la virgule ; c'est l'extension `:0:n` qui le permet.

Exemple

```
PROGRAM Dichotomie;
VAR p,a,b,c:REAL;
   n:INTEGER;
```

Nous voulons une valeur approchée à 10^{-n} de π, racine de $x \mapsto \cos\dfrac{x}{2}$ sur $[3;4]$.

```
BEGIN
WRITE('Entrez la precision 10^(-n) : n= ');
READLN(n);
p:=EXP(-n*LN(10));
a:=3;b:=4;
REPEAT
   c:=(a+b)/2;
   IF COS(a/2)*COS(c/2)>0 THEN a:=c
   ELSE b:=c;
UNTIL ABS(b-a)/2<p;
WRITELN('La racine est ',(a+b)/2:0:n);
READLN;
END.
```

Le programme ci-contre construit successivement par dichotomie les termes de deux suites adjacentes.

On rappelle que la limite ℓ de deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) est approchée par $\frac{u_n + v_n}{2}$ à une précision de $\frac{|u_n - v_n|}{2}$ près.

28.3 Fonctions et procédures

L'analyse descendante consiste à découper un travail en plusieurs tâches et sous-tâches plus élémentaires. Les fonctions et procédures sont définies en préambule du programme et sont des outils qui sont utilisés dans le corps du programme ou dans d'autres fonctions et procédures. Cela permet de délocaliser certains sous-calculs : par exemple, l'évaluation d'une application qui peut être utilisée plusieurs fois. La rédaction du programme devient plus structurée, plus lisible.

28.3.1 Fonction

```
FUNCTION NomF(paramètres d'entrée et leur type) :type du résultat ;
   VAR les variables éventuelles utilisées dans la fonction
   BEGIN
      corps de la fonction
   END;
```



Penser à définir le type du résultat que la fonction retourne dans la variable du même nom.

- Une fonction retourne une expression numérique ou logique (`INTEGER`, `REAL` ou `BOOLEAN` mais pas un tableau, `ARRAY`) contenue dans la variable du même nom. Il convient de travailler avec une variable auxiliaire puis de charger le résultat, à la fin, dans le nom de la fonction. Ici, ce serait à la variable `NomF` qu'il faut affecter le résultat.
- Le nom, les paramètres d'entrée et les variables de la fonction sont propres à la fonction, il ne faut pas les déclarer parmi les variables du programme.
- Les paramètres d'entrée d'une fonction sont dits "passés en valeur" : ils ne sont pas modifiables. (cf page 744)
- Une fonction peut ne pas avoir de paramètre d'entrée. (cf. page 747)

Exemples

- $f_1 : (x, n) \mapsto x^n$

```
FUNCTION f1(x :REAL; n: INTEGER):REAL;
   VAR i: INTEGER;
      aux: REAL;
   BEGIN
   aux:=1;
   FOR i:=1 TO n DO aux:=aux*x;
   f1:=aux;
   END;
```

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

- $f_2 : (x, n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

```
FUNCTION f2(x :REAL; n: INTEGER):REAL;
   VAR k: integer;
       aux,puiss,fact: real;
   BEGIN
   aux:=1;puiss:=1;fact:=1;
   FOR k:=1 TO n DO
      BEGIN
      puiss:=puiss*x;    {calcul de x^k}
      fact:=fact*k;      {calcul de k!}
      aux:=aux+puiss/fact; {somme partielle}
      END;
   f2:=aux;
   END;
```

28.3.2 Procédure

```
PROCEDURE NomP(paramètres + types; VAR paramètres + types);
   VAR les variables éventuelles utilisées dans la procédure
   BEGIN
      corps de la procédure
   END;
```

- Une procédure ne retourne aucun résultat mais peut modifier certains des paramètres d'entrée.
- Le nom, les paramètres d'entrée et les variables de la procédure sont propres à la procédure, il ne faut pas les déclarer parmi les variables du programme.

Remarque – Une procédure ne retourne aucune expression mais, contrairement à une fonction, elle permet de travailler sur plusieurs variables à la fois et de modifier des objets complexes comme les tableaux.

➜ **Paramètres passés en valeur/en variable**

Une procédure accepte des paramètres de deux natures :

- ceux **« passés en valeur »** : ils précèdent dans l'intitulé la mention VAR. Ils ne sont pas modifiables ; c'est comme si seulement l'image des variables était transmise : les éventuelles modifications ne sont pas prises en compte. A la fin de la procédure, les variables ont le même contenu qu'au début.
- ceux **« passés en variable »** : ils suivent dans l'intitulé la mention VAR. Les éventuelles modifications sont prises en compte à la fin de la procédure : c'est le moyen utilisé pour manipuler et "retourner" des objets plus ou moins compliqués.

Méthode 1 Fonction vs Procédure

On utilise une fonction pour :
- obtenir un résultat numérique (ou logique)

On utilise une procédure pour :
- obtenir plusieurs résultats simultanément
- obtenir un résultat non numérique, par exemple un tableau
- décrire un processus, par exemple l'affichage d'un tableau.

Il est recommandé d'utiliser le passage en valeur ou en variable dans les paramètres d'entrée d'une procédure plutôt que de manipuler des variables globales.

➜ **Variable locale/globale**

Cette notion concerne aussi les fonctions. Il y a deux familles de variables :

- Une variable est dite **locale** lorsqu'elle est définie dans une procédure (ou une fonction) ; sa portée est limitée à l'intérieur de la dite procédure. Des procédures ayant des variables locales de même nom peuvent s'imbriquer sans qu'il y ait de conflit.
- Une variable est dite **globale** lorsqu'elle est définie au début du programme et donc concerne tout le programme. Elle peut être modifiée à l'intérieur d'une procédure mais cela est à éviter en général et demande beaucoup d'attention dans son utilisation (effet de bords).

Des exemples de procédures suivent dans la section *Tableaux*.

28.4 Les Tableaux

28.4.1 Type `array`

Une variable de type `ARRAY` ne peut être manipulée dans sa globalité, en particulier pour l'affichage : on travaillera sur ses éléments en précisant leur(s) position(s).
Cependant, considérant deux tableaux de même taille (avec même numérotation des cases), l'affectation (:=) est autorisée : cela permet de dupliquer un tableau.

Rappelons qu'il y a quatre types : `REAL`, `INTEGER`, `BOOLEAN` et `ARRAY`. Ce dernier permet de travailler sur des tableaux.

```
VAR t:ARRAY[-2..5] OF INTEGER;
    m:ARRAY[1..2,1..5] OF REAL;
```

Le tableau `t` est de dimension 1 et possède 8 cases numérotées de -2 à 5. Chaque case est obtenue par la commande `t[i]` avec $i \in [\![-2;5]\!]$ et `t[i]` est une variable de type `INTEGER` : c'est une liste d'entiers.
L'instruction `t[-1]:=12` affecte la valeur 12 à la case numérotée -1 de `t`.

Le tableau `m` est de dimension 2. Une case particulière est obtenue par les commandes `m[i,j]` ou `m[i][j]` avec $(i, j) \in [\![1;2]\!] \times [\![1;5]\!]$; `m[i,j]` est une variable de type `REAL` : c'est une matrice de réels.

28.4.2 Définition d'un nouveau type

Il est possible de définir de nouveaux types à partir de ceux existants. Ils se placent dans le préambule entre les constantes et les variables du programme. Noter que la taillle d'un tableau doit être soit un nombre donné, soit une constante : on ne peut pas créer de tableau de taille indéterminée.

Par exemple, voici le préambule d'un programme manipulant un tableau de 10 nombres complexes.

Remarque – Définir la constante `n=10` pour ensuite travailler avec la variable `n`, rend le programme facilement adaptable à des tableaux d'une autre taille : il suffit de changer la valeur de `n`.

Exemple

Le type `complexe` est un tableau de deux réels identifiables comme respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre.
La partie imaginaire du troisième complexe est contenue dans `t[3,2]`.

```
CONST n=10;
TYPE complexe=ARRAY[1..2] OF REAL;
    table=ARRAY[1..n] OF complexe;
VAR t:table;
...
```

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit



Pour utiliser un tableau comme paramètre d'entrée d'une fonction ou d'une procédure, il faut au préalable avoir défini son type. Voir l'exemple ci-dessous.

Exemple

La procédure suivante effectue le produit de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $C = AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

```
CONST n=3;
TYPE matrice=ARRAY[1..n,1..n] OF REAL;
...
PROCEDURE prod(A,B:matrice;VAR C:matrice);
VAR i,j,k:INTEGER;
BEGIN
FOR i:=1 TO n DO
   FOR j:=1 TO n DO
      BEGIN
      C[i,j]:=0;
      FOR k:=1 TO n DO C[i,j]:=C[i,j]+A[i,k]*B[k,j];
      END;
END ;
```

Un nouveau type est introduit : `matrice`. C'est un tableau de réel avec n lignes et n colonnes. Dans la procédure, A, B et C sont des variables de type `matrice`. A et B sont passées en valeur (puisque précédant la mention `VAR`) donc ne sont pas modifiables pendant l'exécution ; C est passée en variable (car suivant la mention `VAR`) donc est modifiable. La procédure va affecter à chaque coefficient de C la valeur du coefficient correspondant de AB.
L'instruction à mettre dans le corps du programme est `prod(M,N,P) ;` pour obtenir dans P le produit des matrices M et N.

28.4.3 Les polynômes

Un polynôme peut être représenté par un tableau formé de ses coefficients : ses coordonnées dans la base canonique !

La fonction ci-contre effectue l'évaluation d'un polynôme de degré au plus n par la méthode de Hörner.
La variable P est un tableau dont les cases sont numérotées de 0 à n et contiennent respectivement les coefficients du polynôme.
C'est l'occasion de mettre en oeuvre la structure répétitive :

`FOR ... DOWN ... TO.`

```
CONST n=12;
TYPE poly=ARRAY[0..n] OF REAL;
...
FUNCTION Horner(P:poly;x:REAL):REAL;
   VAR k:INTEGER;
       e:REAL;
   BEGIN
   e:=P[n];
   FOR k:=n-1 DOWNTO 0 DO e:=e*x+P[k];
   Horner:=e;
   END;
```

28.5 Simulations en probabilité

28.5.1 Les fonctions spécifiques

Il y a trois commandes :

`RANDOM`	*simule la loi uniforme sur* [0; 1[(nombres réels).
`RANDOM(n)`	*simule la loi uniforme sur* $[\![0; n-1]\!]$ (nombres entiers).
`RANDOMIZE;`	*réinitialise l'aléatoire des commandes précédentes* (à mettre au début du corps du programme).

Remarque – Nous utilisons une fonction n'ayant pas de paramètre d'entrée.

Exemple

Exemple de simulation d'un dé non pipé : l'univers est de cardinal 6 et il y a équiprobabilité des résultats, ainsi le simulateur `RANDOM(6)` convient, il suffit de lui ajouter 1 pour obtenir un nombre aléatoire entre 1 et 6.

```
FUNCTION De6:INTEGER;
   BEGIN
   De6:=RANDOM(6)+1;
   END;
```

Exemple

Développons cet exemple en déterminant la fréquence empirique de chaque résultat. On demande à l'utilisateur de déterminer le nombre n de lancers :

```
VAR F:ARRAY[1..6] OF REAL;
   k,n,r:INTEGER;

FUNCTION De6:INTEGER;
   BEGIN
   De6:=RANDOM(6)+1;
   END;

BEGIN
RANDOMIZE;
WRITE('Donner le nombre de lancer : n= ');
READLN(n);
WRITELN;
FOR k:=1 TO n DO
   BEGIN
   r:=De6;
   F[r]:=F[r]+1;
   END;
FOR k:=1 TO 6 DO
   BEGIN
   F[k]:=F[k]/n;
   WRITE(' F',k,' = ',F[k]:0 :2);
   END;
READLN;
END.
```

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

À titre d'exemple, voici les résultats obtenus lors d'une simulation (précision à 10^{-2} près) :

i	1	2	3	4	5	6
F_i pour $n = 2$	0	0.5	0	0	0.5	0
F_i pour $n = 200$	0.23	0.15	0.14	0.14	0.17	0.15
F_i pour $n = 200\,000$	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17

Ceci illustre la loi faible des grands nombres : *les fréquences empiriques tendent vers la loi de probabilité*.

28.5.2 Quelques lois usuelles

Voici des fonctions simulant les lois usuelles :

- Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

```
FUNCTION bernoulli(p:REAL):INTEGER;
   BEGIN
   IF RANDOM <=p THEN bernoulli:=1
   ELSE bernoulli:=0;
   END;
```

- Loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$:

```
FUNCTION uniformeD(a,b:INTEGER):INTEGER;
   BEGIN
   uniformeD:=a+RANDOM(b-a+1);
   END;
```

- Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

```
FUNCTION binomiale(n:INTEGER; p:REAL):INTEGER;
   VAR k,succes:INTEGER;
   BEGIN
   succes:=0;
   FOR k:=1 TO n DO
   IF RANDOM <=p THEN succes:=succes+1;
   binomiale:=succes;
   END;
```

- Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

```
FUNCTION geometrique(p:REAL):INTEGER;
   VAR rang:INTEGER;
   BEGIN
   rang:=0;
   REPEAT
      rang:=rang+1;
   UNTIL RANDOM<=p;
   geometrique:=rang;
   END;
```

Remarque – On note usuellement $\mathcal{H}(N, n, p)$ pour une loi hypergéométrique. Mais Turbo-Pascal ne distinguant pas lettre majuscule de lettre minuscule, il a fallu donner un autre nom à *N*, si on voulait par ailleurs garder le paramètre *n*, d'où le *nn*.

• Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(nn, n, p)$:

```
FUNCTION H(nn,n :INTEGER; p:REAL):INTEGER;
   VAR T,k,succes:INTEGER;
      a:REAL;
   BEGIN
   T:=nn;    {taille de la population}
   a:=p*nn;     {nombre d'éléments de type 1 (entier)}
   succes:=0;     {nombre de succes}
   FOR k:=1 TO n DO
      BEGIN
      IF RANDOM <=a/T THEN
         BEGIN
         succes:=succes+1;
         a:=a-1;
         END;
      T:=T-1;
      END;
   H:=succes;
   END;
```

28.6 Logiciel

Plusieurs logiciels gratuits permettent d'implémenter le langage PASCAL, il vous suffit d'interroger un moteur de recherche sur internet.

Exemples de logiciel

► *Dev-Pascal* :
• Ouvrir un "*New Source file*" (ne pas travailler dans un *project*)
Effacer le contenu et taper votre programme.
• Sauvegarder votre fichier (*Save unit as*)
• Compiler le ficher : onglet *Execute / Compile* ou icône *Compile project*
A ce moment là, une fenêtre s'affiche donnant le nombre d'erreurs de syntaxe. La position des erreurs apparaît en bas du progamme sous la forme : numéro de la ligne/numero du caractère dans la ligne.
• Exécuter le projet : onglet *Execute / Compile* ou icône *Run project*
Le programme s'exécute et ouvre une fenêtre de dialogue.

► *Lazarus* :
• Ouvrir un programme : onglet *Projet / Nouveau projet* et choisir *Programme* dans la liste proposée.
Effacer le contenu et taper votre programme.
• Exécuter le projet : onglet *Exécuter / Exécuter*
S'il y a une erreur de syntaxe, la ligne concernée est en surbrillance ; sinon, le programme s'exécute et ouvre une fenêtre de dialogue.

➜ **Les erreurs classiques** :
• oubli d'un point-virgule : l'erreur est signalée sur la ligne suivante !
• pas de point-virgule avant l'instruction ELSE
• dans une expression : recomptez les parenthèses ouvrantes et fermantes
• une variable est utilisée sans avoir été déclarée

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

- un test d'égalité (=) a été mis à la place d'une affectation (`:=`) ou vice-versa
- dans une variable de type `INTEGER`, une affectation lui propose un réel
- la puissance n'est pas définie : pas de `x^2`
- oubli de la commande `READLN ;` avant le `END.` final : le programme fait le travail mais ferme la fenêtre sans laisser le temps de voir les résultats
- ne pas spécifier le nombre de chiffres après la virgule lors de l'affichage d'une variable déclarée comme `INTEGER`
- la fraction $\frac{1}{x+1}$ s'écrit `1/(x+1)` : attention aux parenthèses
- ne pas mettre de point-virgule après un `DO` sinon, la structure répétitive tourne sans rien faire
- deux objets ne peuvent porter le même nom sachant que Pascal ne fait pas de distinction entre les minuscules et les majuscules : programme, constante, type, fonction, procédure, variable, mot du langage PASCAL
- le logiciel semble bloqué, vous ne pouvez plus compiler le programme : vérifier que la fenêtre de dialogue de la précédente exécution est bien fermée

Synthèse

Savoirs

- fondement du langage Pascal
- structures séquentielle, conditionnelle, répétitives
- procédures et fonctions
- notions de variable (locale, globale)
- notions de paramètre (passé en valeur/ en variable)

Savoir-faire

- calculer un somme, un produit, le terme général d'une suite, une valeur approchée de la limite d'une suite.
- mettre en place l'agorithme de dichotomie
- simulation de phénomènes aléatoires

Mots-clés

- Pascal,
- dichotomie,
- Random,
- approximation,
- variable,
- paramètre,
- programme,
- fonction,
- procédure.

Tests de connaissances

28.1 Donner la différence entre `a:=b` et `a=b`.

28.2 Suivant le cas, traduire en français l'instruction donnée, répondre à la question ou traduire en langage PASCAL la phrase donnée.
1) affecter la valeur 3 à la variable `x`.
2) affecter la valeur -2 à la variable `y`.
3) `WRITE(x=5);`
4) Que se passe-t-il suite à la commande précédente ?
5) Si y^2 est supérieur à `x` alors doubler la valeur de `x`.
6) `FOR i:=1 TO 12 DO y:=y+1;`
7) Quelle est la valeur contenue dans la variable `y` juste après cette étape ?

28.3 Cette fonction est censée calculer $n!$; saurez-vous détecter les *erreurs* qu'elle contient ?

```
FUNCTION factorielle(n:INTEGER);
   VAR k,p:INTEGER;
   BEGIN
   p:=1;
   FOR k:=1 TO n DO p:=p*k;
   END;
```

28.4 Simulation d'une variable aléatoire : on lance un dé à 12 faces, soit $r \in [\![1, 12]\!]$ le résultat ; on définit la variable aléatoire X par :

$$X = \begin{cases} 0 \text{ si } r < 9 \\ 1 \text{ si } r \in [\![9, 11]\!] \\ 2 \text{ si } r = 12 \end{cases}$$

La fonction suivante est censée simuler X, mais ce n'est pas le cas. Saurez-vous trouver l'erreur ?

```
FUNCTION De12:INTEGER;
   BEGIN
   De12:=RANDOM(12)+1;
   END;

FUNCTION X:=INTEGER;
   VAR va:INTEGER;
   BEGIN
   IF De12<9 THEN va:=0;
   IF (De12>=9) AND (De12<=11) THEN va:=1;
   IF De12=12 THEN va:=2;
   X:=va;
   END;
```

Exercices d'application

Le picto ◎ signale des énoncés pour lesquels des indications sont données page 755.

■ Calculs numériques - suites

28.5

Le nombre n étant donné par l'utilisateur, écrire un programme pour chaque expression :

$$A = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k} \quad B = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$$

$$C = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{i+j} \quad D = \sum_{k=5}^{21} \prod_{j=3}^{2k} \frac{jk}{j^2-1}$$

28.6

Écrire un programme qui demande un temps `T` (entier) exprimé en secondes, et qui le transforme en heures, minutes, secondes.

28.7 ◎

1) Écrire un programme permettant de calculer :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ où } (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$$

2) Comparer $S_n(x)$ et $\exp(x)$ sur quelques valeurs de x et de n. Commenter.

28.8 Série ◎

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Écrire un programme permettant de calculer $\ln 2$ à une précision $\varepsilon > 0$ donnée par l'utilisateur, et comparer cette valeur avec celle de la fonction `LN` de Pascal évaluée en 2.

28.9 ◎

On rappelle que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Écrire un programme qui pour $A > 0$, donné par l'utilisateur, détermine le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \geqslant A$.

28.10 Suite récurrente d'ordre 1 ◎

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme v_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \cos(v_n^2) + \frac{2}{3} v_n$.

Écrire un programme demandant à l'utilisateur n et v_0 et affichant v_n.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

28.11 Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes u_0 et $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{n + u_{n+1} + u_n^2}$$

Écrire un programme demandant à l'utilisateur n, u_0, et u_1 et affichant u_n.

28.12 Dichotomie

Le nombre π est la solution de l'équation :

$\sin x = 0$ pour $x \in [2, 4]$.

L'objectif est de déterminer une approximation de π à 10^{-p} près.

1) Question de cours : On considére deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de limite commune ℓ. Au rang n, donner une approximation de ℓ en fonction de a_n et b_n ainsi que la précision obtenue.

2) Sur le principe de dichotomie, décrire la construction de suites adjacentes de limite commune π.

3) Écrire un programme utilisant une boucle conditionnelle (`WHILE` ou `REPEAT`) donnant une approximation de π à 10^{-p} près ; p étant donné par l'utilisateur.

4) Considérant le principe de dichotomie et la taille de l'intervalle de départ, donner une condition en fonction de p, sur le rang n, qui garantisse la précision souhaitée.

5) Écrire un programme qui utilise une boucle `FOR` et qui donne une approximation de π à 10^{-p} près ; p étant donné par l'utilisateur.

28.13 Approximations successives

Considérons la suite :

$$\begin{cases} u_0 \in [1\,;2] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2) \end{cases}.$$

Une étude (comme celle décrite dans une méthode du chapitre 16 : Dérivation) permet d'établir :

- $f : x \in [1;2] \mapsto x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$ admet pour unique point fixe $\sqrt{2}$.
- $|f'| \leqslant \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

1) Déterminer en fonction de p, une valeur de n telle que u_n soit une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près.

2) Écrire un programme qui détermine une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près ; p étant donné par l'utilisateur.

■ Fonctions et procédures

28.14 Dichotomie

L'équation suivante admet une unique solution sur $[1, 2]$:

$$e^{3x} = x + 30$$

Définir une fonction associée qui s'annule en cette solution. Écrire un programme utilisant le principe de dichotomie pour donner une approximation de la solution à 10^{-p} près.

28.15 Sommes de Riemann

Les sommes de Riemann (cf chapitre 17) correspondent à une méthode d'intégration numérique : la méthode des rectangles (la fonction est localement remplacée par une fonction constante). L'objectif est de calculer une intégrale en utilisant uniquement l'expression de f, c'est-à-dire, sans faire de calcul d'intégration et en particulier, sans rechercher une primitive.

Le résultat est : Si f est continue sur $[a, b]$ alors

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$$

Dans cet exercice, nous allons vérifier numériquement que :

$$\int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2} = \pi.$$

Écrire un programme contenant :

a) une fonction `f` définie par $t \mapsto \dfrac{4}{1+t^2}$.

b) une procédure `Riemann` qui calcule S_n à partir des paramètres d'entrée `a,b,n`.

c) le corps du programme qui demande à l'utilisateur de déterminer `a,b,n` et retourne S_n.

28.16

Écrire un programme Pascal permettant de calculer :

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

où $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Comparer $P(x)$ et $\sin(x)$ sur quelques valeurs réelles.

■ Tableaux

28.17 ◎

On suppose qu'on a déclaré dans l'en-tête d'un programme :

```
CONST N=100;
TYPE tableau=ARRAY[0..N] OF REAL;
```

On considère la procédure `EXT` suivante :

```
PROCEDURE EXT(T:tableau;VAR u,v:REAL);
  VAR k:INTEGER;
  BEGIN
  u:=T[0];v:=T[0];
  FOR k:=1 TO N DO
     BEGIN
     IF T[k]<u THEN u:=T[k];
     IF T[k]>v THEN v:=T[k];
     END;
  END;
```

1) Quelle est la différence entre les paramètres `T` d'une part et `u` et `v` d'autre part ?
2) On suppose que `S` est une variable de type `tableau`, et que `x` et `y` sont de type `REAL`. Que contiennent les variables `x` et `y` après la ligne de programme suivante : `EXT(S,x,y);` ?
3) Maintenant, nous disposons d'une fonction `FUNCTION f(t:REAL):REAL;` donnant les valeurs d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.
Écrire un programme donnant une estimation du maximum et du minimum de f sur le segment $[a, b]$ à une précision de $\varepsilon > 0$ où a, b et ε sont entrés par l'utilisateur *(on rédigera seulement la déclaration des variables globales et le corps du programme)*.

■ Simulations en probabilité

28.18 Liste

1) Écrire une procédure créant une liste de 10 nombres simulant une loi $\mathcal{U}(\llbracket -5, 5 \rrbracket)$.
2) Écrire une procédure qui affiche une telle liste.
3) Dans un programme, générer une telle liste et donner le nombre de termes négatifs ou nuls qu'elle contient.

28.19

Définir deux constantes `n=12` et `m=20`.
a) Une expérience aléatoire consiste à piocher avec remise n boules dans une urne contenant m boules numérotées de 1 à m.
Écrire une procédure simulant cette expérience. Le résultat sera donné sous la forme d'une liste.
b) Écrire une procédure qui construit à partir d'une telle expérience, les variables aléatoires suivantes :
- S : la position du premier six et $n + 1$ s'il n'y en a pas ;
- M : le maximum de la liste ;
- P : la position de la première apparition du maximum ;
- D : la position éventuellement différente de la dernière apparition du maximum.

c) Écrire un programme réalisant cette expérience.

28.20 ◎ Simulation d'un dé pipé

1) Écrire une fonction qui simule le lancer d'un dé pipé dont les caractéristiques sont données par :

i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,15	0,15	0,1	0,05	0,2	0,35

2) Écrire un programme qui demande à l'utilisateur le nombre n de lancers et qui retourne les fréquences empiriques de chaque numéro.

28.21 Loi binomiale et loi de Poisson

Illustrons ici l'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson.
Définir les constantes `n=30` et `p=5/n`.
1) Écrire une fonction `B` qui simule une loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2) Écrire un programme effectuant :
- nb simulations de B où nb est donné par l'utilisateur,
- renseigner dans un tableau les fréquences empiriques des résultats obtenus,
- afficher ces fréquences et les valeurs associées de la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$,
- faire varier le nombre de simulations et commenter.

28.22 Paradoxe du Duc de Toscane

On considère l'expérience qui consiste à lancer trois dés simultanément. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des trois numéros obtenus.

1) Écrire une fonction qui simule X.
2) Compléter cette fonction en un programme qui effectue 20000 lancers et compte le nombre fois où X vaut 9 et celui où X vaut 10.

Remarque – Le paradoxe vient du fait qu'il y a exactement le même nombre de décompositions pour obtenir 9 ou 10 (il y en a 6) mais que $\mathbf{P}(X = 9) \neq \mathbf{P}(X = 10)$.
Saurez-vous résoudre ce paradoxe ?

28.23

Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Y définie de la façon suivante :
On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée, on note Y la variable aléatoire qui vaut 0 si *pile* tombe au plus une fois, et qui dans le cas contraire prend pour valeur le rang du deuxième *pile*.

28.24

Écrire un programme simulant le tirage de deux boules (sans remise) dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On écrira deux fonctions : `Boule1(n)` et `Boule2(n,b1)`.
Comment faire la différence entre un tirage avec ordre ou sans ordre ?

28.25 d'après oral ESCP 2006

Une urne contient b boules blanches, n boules noires et r boules rouges. Le jeu consiste à effectuer une succession de tirages d'une boule dans l'urne, sans remise, jusqu'à ce que la boule tirée soit :
- ou blanche, auquel cas la partie est gagnée,
- ou noire, et la partie est perdue.

La longueur de la partie est le nombre de boules sorties à la fin de la partie.
Compléter le programme Pascal qui suit pour qu'il simule le déroulement d'une partie :

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

```
PROGRAM ESCP2006;
VAR b, n, r, L,alea:INTEGER; x:CHAR;
BEGIN
RANDOMIZE;
...
READLN(b,n,r);
...
REPEAT
   ...
   alea:=1+RANDOM(b+n+r);
   IF ( 1<=alea) AND (alea<=b) THEN ...
   ...
UNTIL (x<>'r');
IF (x='n') THEN WRITE('perdu')
ELSE WRITE('gagne');
WRITELN(' et en ',L,' coups.');
READLN;
END.
```

28.26

On considère une urne contenant une boule blanche et trois boules noires. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. Écrire un programme simulant ces tirages et déterminant le rang où pour la première fois on obtient deux boules blanches consécutives.

28.27 d'après ESC 1999 S

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne $\mathcal{U}_n$ contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro k, avant de procéder au tirage suivant, on enlève toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne $\mathcal{U}_n$ de toutes ses boules.

Compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience :

```
PROGRAM ESC1999;
VAR b,tirages,numero:INTEGER;

BEGIN
RANDOMIZE;
WRITE('Entrez le nombre initial de boules ');
READLN(b);
tirages:=0;
WHILE ... DO
BEGIN
numero:=RANDOM(...)+...;
b:=...;
tirages:=...;
END;
WRITE('L urne est videe en ',tirages,' tirages');
READLN;
END.
```

28.28 d'après ESSEC 2006 E

Considérons l'expérience suivante : on lance n fois une pièce donnant *Pile* avec probabilité p_1 et on note X le nombre de fois où l'on obtient *Pile*. Puis on lance X fois une seconde pièce donnant *Pile* avec probabilité p_2 et on note Y le nombre de fois où l'on obtient *Pile* lors de cette seconde série de lancers.

1) Compléter cette fonction qui simule Y :

```
FUNCTION SimulY(n:INTEGER;p1,p2:...):INTEGER;
VAR x,y,k,u:INTEGER;

BEGIN
x:=0;
FOR k:=1 TO n DO
   BEGIN
   u:=RANDOM;
   IF u<p1 THEN x:=x+1;
   END;
y:=0;
FOR k:=1 TO ...
...
END;
```

2) Déterminer le nombre moyen d'appels à la fonction `RANDOM` effectués dans cette fonction.

28.29 d'après oral ESCP 2004

1.a) Compléter les lignes de programme suivantes pour en faire un programme complet :

```
RANDOMIZE;
N:=RANDOM(m)+1;
X:=0 ;
FOR i:=1 TO N DO X:=X+RANDOM(2);
WRITELN( N,'   ', X);
```

1.b) On suppose que la première valeur affichée est 4. Quelles sont les valeurs possibles pour la seconde valeur affichée ?

2) On suppose que le programme précédent simule une expérience aléatoire. Quelle est alors la loi suivie par la variable aléatoire N simulée par `N`, son espérance, sa variance ?

3) Préciser $X(\Omega)$ et calculer, pour tout couple (i,k), $\mathbf{P}(X = i \cap N = k)$. En déduire la loi de X.

4) Déterminer l'espérance de X.

Indications

28.7 Pour $k \in \mathbb{N}$, poser $u_k = \frac{x^k}{k!}$ et établir une relation de récurrence entre (S_n, u_n) et (S_{n-1}, u_{n-1}).

28.8 À l'aide de la notion de partie entière, déterminer une valeur de n telle que $\frac{1}{1+n} \leqslant \varepsilon$. Ensuite calculer la somme partielle.

28.9 Calculer successivement les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une boucle conditionnelle (`WHILE` ou `REPEAT`) en remarquant que :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}.$$

Il faut introduire une variable pour repèrer le rang du terme.

28.10 Considérer une seule variable dans laquelle se succèdent les différents termes de la suite. Contrôler le nombre de calculs par une structure répétitive adaptée.

28.17

3) Les éléments dans une liste sont répérés par des entiers consécutifs. Dans le cas d'une fonction, la précision peut jouer un rôle similaire en considérant un parcours de l'intervalle d'étude par pas de ε.

28.20 Utiliser la fonction `RANDOM` qui donne un nombre aléatoire sur [0,1[et exploiter le lien entre la fonction de répartition et la loi de probabilité.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

28.1

• `a:=b` est une affectation : la valeur de la variable `a` est remplacée par la valeur de `b`.
• `a=b` est un test d'égalité : expression booléenne qui vaut `true` si les variables ont la même valeur et `false` sinon.

28.2

1) `x:=3;`
2) `y:=-2;`
3) Afficher le résultat du test : Est-ce que `x` égale 5 ?
4) Dans la fenêtre de dialogue s'affiche : false.
5) `IF y*y>=x THEN x:=2*x;`
6) Pour `i` variant de 1 à 12, augmenter la variable `y` de un.
7) La valeur de `y` est 10 car $-2 + 12 = 10$.

28.3

Il y a trois *erreurs* :
• Le type du résultat de sortie de la fonction n'est pas définie, la première ligne aurait dû être :
`FUNCTION factorielle(n :INTEGER):INTEGER;`
• Le résultat du calcul n'est pas affecté à la variable de sortie : `factorielle`. L'avant dernière ligne aurait dû être : `factorielle:=p;`.
• Les factorielles sont des entiers de grandes tailles, avec n pas forcément très grand. Ainsi, il est judicieux de prendre une variable de type `REAL` pour calculer des factorielles
Finalement, une fonction bien définie serait :

```
FUNCTION factorielle(n:INTEGER):REAL;
   VAR k:INTEGER;
       p:REAL;
   BEGIN
   p:=1;
   FOR k:=1 TO n DO p:=p*k;
   factorielle:=p;
   END;
```

28.4

À chaque appel de la fonction `De12` un nouveau lancer de dé est simulé ; ainsi, la fonction `X` fait appel à quatre lancers. Il est même possible que `X` ne soit pas définie (et prenne la valeur 0 par défaut) : par exemple, si les lancers donnent 12,3,6,10 alors, aucun test n'est valide et donc aucune affectation n'est faite !
Une fonction bien définie est :

```
FUNCTION X:=INTEGER;
   VAR va,r:INTEGER;
   BEGIN
   r:=De12;
   IF r<9 THEN va:=0;
   IF (r>=9) AND (r<=11) THEN va:=1;
   IF r=12 THEN va:=2;
   X:=va;
   END;
```

Cette fois-ci, il n'y a qu'un seul appel de la fonction `De12` ; le résultat est enregistré dans la variable `r`. C'est le même résultat qui sert lors des tests.

28.5

• *A* :

```
PROGRAM A;
VAR p:REAL;k,n:INTEGER;

BEGIN
WRITE('Entrez un entier naturel n= ');
READLN(n);
p:=1; {Initialiser un produit à 1}
FOR k:=1 TO n DO p:=p*(2*k+1)/2/k;
WRITE('A = ',p:0:3);
READLN;
END.
```

Pour $n = 21$, on a $A \approx 5,263$.

• *B* :

```
PROGRAM B;
VAR s:REAL;k,n:INTEGER;

BEGIN
WRITE('Entrez un entier naturel n= ');
READLN(n);
s:=0; {Initialiser une somme à 0}
FOR k:=1 TO 2*n DO s:=s+1/(n+k);
WRITE('B = ',s:0:3);
READLN;
END.
```

Pour $n = 17$, on a $B \approx 1,079$.

• *C* : on discute sur les valeurs possibles de i, puis sur celles de j. On a : $C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{i+j}$

```
PROGRAM C;
VAR s: REAL;
   i,j,n: INTEGER;

BEGIN
WRITE('Entrez un entier naturel n= ');
READLN(n);
s:=0;
FOR i:=1 TO n DO
BEGIN
FOR j:=i TO n DO s:=s+1/(i+j);
END;
WRITE('C = ',s:0:3);
READLN;
END.
```

Pour $n = 12$, on a $C \approx 7,634$.

• *D* :

```
PROGRAM D;
VAR p,s: REAL;
k,j: INTEGER;
BEGIN
s:=0;
FOR k:=5 TO 21 DO
```

```
BEGIN
p:=1; {penser à réinitialiser le produit}
FOR j:=3 TO 2*k DO p:=p*(j*k)/(j*j-1);
s:=s+p;
END;
WRITELN('D = ',s:0:2);
READLN;
END.
```

On trouve $D \approx 432,36$

28.6 Pour T=12345 secondes, le programme renvoie 3 h 25 min 45 sec.

```
VAR h,m,s,T:INTEGER;

BEGIN
WRITE('Donner un nombre de secondes : T = ');
READLN(T);
h:= T DIV 3600;
T:= T MOD 3600;
m:= T DIV 60;
s:= T MOD 60;
WRITELN(h,' h ',m,' min ',s,' sec.');
READLN;
END.
```

28.7 Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k = \frac{x^k}{k!}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = u_n + S_{n-1} = \frac{x}{n}u_{n-1} + S_{n-1}$$

Une relation de récurrence apparaît et permet de calculer simplement S_n :

```
VAR n,k: integer;
    s,u,x: real;

BEGIN
WRITELN('Donner un entier postif et un reel : ');
READLN(n,x);
u:=1;
s:=1; {Terme k = 0 de la somme}
FOR k:=1 TO n DO
   BEGIN
   u:=x*u/k;
   s:=s+u;
   END;
WRITELN('exp(',x:0:2,')=',EXP(x):0:2);
WRITELN('approchee par : ',s:0:2);
WRITELN('la precision est de ',ABS(EXP(x)-s));
READLN;
END.
```

La somme est une approximation polynômiale au voisinage de zéro de la fonction exp (cf chapitre 18). Ainsi, à n fixé, la précision diminue lorsque l'on écarte de l'origine ; et à x fixé, la précision augmente avec n. La tableau suivant donne la précision obtenue :

x \ n	5	10
0.5	3.10^{-5}	2.10^{-11}
3	2.10^{0}	6.10^{-3}

28.8 Premièrement, cherchons la valeur de n fournissant une précision suffisante :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n+1 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Leftarrow n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$$

```
PROGRAM Approx_LN2;
VAR k,n,sg:INTEGER;
    e,s:REAL;

BEGIN
WRITE('Donner la precision e>0 : ');
READLN(e);
n:=TRUNC(1/e);
s:=0;
sg:=1; {signe du terme général}
FOR k:=1 TO n DO
   BEGIN
   s:=s+sg/k;
   sg:=-sg;
   END;
WRITELN('valeur approchee LN(2) = ',s:0:4);
WRITELN('valeur de Pascal LN(2) = ',LN(2):0:4);
WRITELN('la precision est de ',ABS(LN(2)-s));
READLN;
END.
```

28.9 Le programme donne $n = 91380$ pour $A = 12$.

```
VAR A,s: REAL;
    k:INTEGER;
BEGIN
WRITE('Donner un reel A>0 : A = ');
READLN(A);
s:=0;
k:=0;
WHILE s<A DO
   BEGIN
   k:=k+1;
   s:=s+1/k;
   END;
WRITE('L entier recherche est ',k:0);
READLN;
END.
```

28.10 Il ne s'agit pas de créer une variable pour chaque terme de la suite mais plutôt de faire se succéder les termes de la suite dans une même variable.

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Si la variable v contient v_k alors, l'instruction `v:=COS(v*v)+2*v/3;` affecte à v la quantité $\cos(v_k^2) + \frac{2}{3}v_k$ autrement dit, la valeur de v devient v_{k+1}.

```
VAR n,k :INTEGER;
    v:REAL;

BEGIN
WRITE('Entrez n et v0 : ');
READLN(n,v);
FOR k:=1 TO n DO v:=COS(v*v)+2*v/3;
WRITE('Le ',n,'ieme terme est : ',v:0:2);
READLN;
END.
```

Comme la variable v est de type REAL, elle est affichée en notation scientifique par défaut ; le complément :0:2 formate l'affiche avec deux chiffres après la virgule (et zéro caractère d'espacement).

Avec $u_0 = 4$, on a $u_{24} \approx 1,35$.

28.11

Comme la suite est récurrente d'ordre 2, il convient de travailler sur deux rangs pour obtenir le terme suivant : deux informations et un calcul ! Nous considérons donc trois variables : u, v et w de type REAL. On initialise u à u_0, v à u_1 ; puis avec une structure répétitive contrôlée par le nombre de répétition (pour k variant de 2 à n), on construit les termes de la suites qui sont successivement stockés dans u et v ; la variable w servant seulement à faire le calcul : à la fin de l'étape k, u contient u_{k-1} et v contient u_k.

Afin d'éviter une erreur d'indice, on calcule au rang k le terme u_k et donc on réécrit la relation de récurrence :

$$\forall k \geqslant 2,\ u_k = \sqrt{(k-2) + u_{k-1} + u_{k-2}^2}$$

```
VAR n,k:INTEGER;
    u,v,w:REAL;

BEGIN
WRITELN('Entrez n (>1) u0 et u1 (>0) : ');
READLN(n,u,v);
FOR k:=2 TO n DO
   BEGIN
   w:=SQRT((k-2)+v+u*u);
   u:=v;
   v:=w;
   END;
WRITE('Le ',n,'ieme terme est : ',v:0:2);
READLN;
END.
```

Remarquer l'ordre des affectations : `w:=...`, `u:=...` et `v:=...`. On transfère la valeur u_{k-1} de la variable v dans la variable u avant de modifier v.

Pour $u_0 = 3$ et $u_1 = 1$, on a $u_{31} = 19,61$.

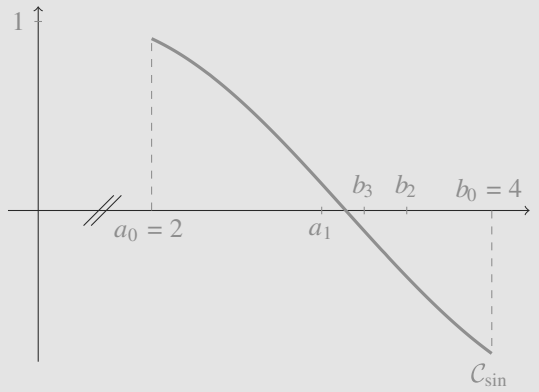
28.12

1) Au rang n, nous avons :

$$\left|\frac{a_n + b_n}{2} - \ell\right| \leqslant \frac{|a_n - b_n|}{2}$$

Ainsi, $\frac{a_n+b_n}{2}$ est une approximation de ℓ à la précision $\frac{|a_n-b_n|}{2}$ près.

2) Schéma de la construction :



Décrivons la récurrence :

Initialisation : $a_0 = 2$ avec $\sin 2 > 0$ et $b_0 = 4$ avec $\sin 4 < 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose a_n et b_n construits tels que $2 \leqslant a_n < b_n \leqslant 2$, $\sin a_n > 0$ et $\sin b_n \leqslant 0$.

Posons $c = \frac{a_n+b_n}{2}$; les termes de rang $n+1$ sont définis par :

- si $\sin c > 0$ alors, $a_{n+1} = c$ et $b_{n+1} = b_n$;
- si $\sin c \leqslant 0$ alors, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c$.

Conclusion : les suites sont bien définies.

On note que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$$

Ces suites sont adjacentes et admettent pour limite la solution de $\sin x = 0$ sur $[2, 4]$, donc π.

3) Le programme avec une boucle REPEAT est :

```
PROGRAM Approx_Pi_REPEAT;
VAR a,b,c,e: REAL;
    p: INTEGER;

BEGIN
WRITE('Donner la precision en 10^(-p) : p = ');
READLN(p);
e:=EXP(-p*LN(10));
a:=2;
b:=4;
REPEAT
   c:=(a+b)/2;
   IF sin(c)>0 THEN a:=c
   ELSE b:=c;
UNTIL (b-a)/2 < e;
WRITELN('Pi est approche par ',(a+b)/2:0:p);
READLN;
END.
```

À chaque étape, l'intervalle est coupé en deux, mais une de ses bornes reste inchangée. Ainsi, dans le programme, une seule affectation suffit pour actualiser l'intervalle de travail.

4) D'après l'approximation de la limite de suites adjacentes, vue en **1)**, et la construction par dichotomie, vue en **2)**, la précision de l'approximation au rang n est donnée par :

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Déterminons une valeur de n assurant une précision à 10^{-p} près :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-p} &\Leftrightarrow -n\ln 2 \leqslant -p\ln 10\\ &\Leftrightarrow n \geqslant p\frac{\ln 10}{\ln 2}\\ &\Leftarrow n \geqslant \left\lfloor p\frac{\ln 10}{\ln 2}\right\rfloor + 1\end{aligned}$$

5) Le programme avec une boucle FOR se ramène à déterminer $\frac{b_n + a_n}{2}$ pour $n = \left\lfloor p\frac{\ln 10}{\ln 2}\right\rfloor + 1$.

```
PROGRAM Approx_Pi_FOR;
VAR a,b,c: REAL;
    k,p,n: INTEGER;

BEGIN
WRITE('Donner la precision en 10^(-p) : p = ');
READLN(p);
n:=TRUNC(p*LN(10)/LN(2))+1;
a:=2;
b:=4;
FOR k:=1 TO n DO
   BEGIN
   c:=(a+b)/2;
   IF sin(c)>0 THEN a:=c
   ELSE b:=c;
   END;
WRITELN('Pi est approche par ',(a+b)/2:0:p);
READLN;
END.
```

28.13

1) Au rang n, la précision de l'approximation de $\sqrt{2}$ par u_n est $\frac{1}{2^n}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-p} &\Leftrightarrow -n\ln 2 \leqslant -p\ln 10\\ &\Leftrightarrow n \geqslant p\frac{\ln 10}{\ln 2}\\ &\Leftarrow n \geqslant \left\lfloor p\frac{\ln 10}{\ln 2}\right\rfloor + 1\end{aligned}$$

Le rang $n = \left\lfloor p\frac{\ln 10}{\ln 2}\right\rfloor + 1$ convient.

2) La précision donnée ne dépend pas du premier terme. Dans le programme, nous prenons $u_0 = 1$:

```
PROGRAM Eval_sqrt2;
VAR u: REAL;
    i,p,n: INTEGER;
BEGIN
WRITE('Donner la precision en 10^(-p) : p = ');
READLN(p);
n:=TRUNC(p*LN(10)/LN(2))+1;
u:=1;
FOR i:=1 TO n DO u:=u+(2-u*u)/4;
WRITELN('sqrt(2) est approchee par ',u:0:p);
READLN;
END.
```

28.14

On définit la fonction $f : x \mapsto e^{3x} - x - 30$ (qui est bien continue) et l'on note que $f(1) = e^3 - 31 < 0$ (puisque $e < 3$) et $f(2) = e^6 - 32 > 0$ (puisque $e > 2$). En particulier, $f(1) \times f(2) < 0$, le principe de dichotomie peut s'appliquer.

```
VAR p:INTEGER;a,b,c,e:REAL;

FUNCTION f(x:REAL):REAL;
   BEGIN
   f:=EXP(3*x)-x-30;
END;

BEGIN
WRITE('Donner la precision en 10^(-p) : p = ');
READLN(p);
e:=EXP(-p*LN(10));
a:=1;
b:=2;
REPEAT
   c:=(a+b)/2;
   IF f(a)*f(c)>0 THEN a:=c
   ELSE b:=c;
UNTIL ABS(b-a)/2 < e;
WRITELN('la solution vaut environ ',(a+b)/2:0:p);
READLN;
END.
```

28.15

```
VAR a,b,S:REAL;
n:INTEGER;

FUNCTION f(x:REAL):REAL;
   BEGIN    f:=4/(1+x*x);
   END;

PROCEDURE Riemann(a,b:REAL;n:INTEGER;VAR Sn:REAL);
   VAR k:INTEGER;
   BEGIN
   Sn:=0;
   FOR k:=0 TO n-1 DO Sn:=Sn+f(a+k*(b-a)/n);
   Sn:=Sn*(b-a)/n;
   END;

BEGIN
WRITELN('Donner a,b et n : ');
```

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

```
READLN(a,b,n);
Riemann(a,b,n,S);
WRITELN('L approximation est ',S:2:7);
WRITELN('PASCAL donne Pi = ',PI:2:7);
READLN;
END.
```

On sait que $\pi \approx 3,11415927$. Ce programme donne :

n	approximation	précision
20	3.1911760	5.10^{-2}
1000	3.1425925	2.10^{-3}
1000000	3,1415937	10^{-6}

28.16

Le terme général nécessite de savoir calculer une puissance et une factorielle. Nous allons concevoir des fonctions associées :

```
VAR n: INTEGER;
   x: REAL;

FUNCTION puiss(y:REAL;q:INTEGER):REAL;
   VAR i: INTEGER;
   BEGIN
   puiss:=1;
   FOR i:=1 TO q DO puiss:=puiss*y;
   END;

FUNCTION fact(n: INTEGER):REAL;
   VAR j:INTEGER;
   BEGIN
   fact:=1;
   FOR j:=1 TO n DO fact:=fact*j;
   END;

FUNCTION P(z :REAL; m: INTEGER):REAL;
   VAR i: INTEGER;
   BEGIN
   P:=z;
   FOR i:=1 TO m DO
    P:=P+puiss(-1,i)*puiss(z,2*i+1)/fact(2*i+1);
   END;

BEGIN
WRITELN('Donner un entier positif et un reel : ');
READLN(n,x);
WRITELN('sin(',x:0:2,')=',SIN(x):0:3);
WRITELN('approchee par : ',P(x,n):0:3);
WRITELN('la precision : ',ABS(SIN(x)-P(x,n)));
READLN;
END.
```

Remarque – Nous aurions pu, comme à l'exercice 3 établir une récurrence :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Posant $u_n = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ on obtient

$$u_n = -\frac{x \times x}{2n(2n+1)} u_{n-1}.$$

28.17

1) T, u et v sont des paramètres d'entrée de la procédure, mais :
• T est **passée en valeur** car introduite avant la mention VAR : T reste inchangée après l'exécution de la procédure.
• u et v sont **passées en variable** : les modifications au cours de la procédure restent valides une fois la procédure terminée.
2) x contient le minimum de S : y contient son maximum.
3) L'idée est de faire comme pour le tableau ci-dessus, mais en avançant d'un pas de ε. Le parcours est contrôlé par une boucle conditionnelle :

```
VAR a,b,e,u,v: REAL;

FUNCTION f(t:REAL):REAL;
   ...

BEGIN
WRITELN('Donner a b et e : ');
READLN(a,b,e);
u:=f(a);v:=f(a);
WHILE a+e<=b DO
   BEGIN
   a:=a+e;
   IF f(a)<u THEN u:=f(a);
   IF f(a)>v THEN v:=f(a);
   END ;
WRITELN('Le minimum de f est : ',u);
WRITELN('Le maximum de f est : ',v);
READLN;
END.
```

28.18

1) Il y a 11 valeurs entre −5 et 5 d'où l'utilisation de RANDOM(11).
2) Dans la procédure aff, on note l'utilisation :
• des fonctions WRITE et WRITELN pour structurer l'affichage : un retour à la ligne puis l'affichage sur une même ligne des éléments de la liste et enfin un autre retour à la ligne ;
• de l'utilisation de l'espacement dans WRITE(L[k]:3,' ');.
3) Voici le programme avec ses procédures :

```
CONST n=10;
TYPE liste=ARRAY[1..10] OF INTEGER;
VAR T:liste;

PROCEDURE gene(VAR L:liste);
   VAR k:INTEGER;
   BEGIN
   FOR k:=1 TO n DO L[k]:=RANDOM(11)-5;
   END;

PROCEDURE aff(L:liste);
   VAR k:INTEGER;
   BEGIN
   WRITELN; {retour à la ligne}
   FOR k:=1 TO n DO WRITE(L[k]:3,' ');
   WRITELN;
   END;
```

```
FUNCTION Nbnegatif(L:liste):INTEGER;
   VAR j,nb:INTEGER;
   BEGIN
   nb:=0;
   FOR j:=1 TO n DO IF L[j]<=0 THEN nb:=nb+1;
   Nbnegatif:=nb;
   END;

BEGIN
RANDOMIZE;
gene(T);
aff(T);
WRITELN('Nombres negatifs : ',Nbnegatif(T));
READLN;
END.
```

28.19

L'utilisation de procédures est adaptée :

a) la première opération consiste à créer une liste ;

b) la deuxième consiste à retouner plusieurs informations sur cette liste.

c) Voici le programme avec ses procédures :

```
CONST n=12;m=20;
TYPE liste=ARRAY[1..n] OF INTEGER;
VAR L:liste;
   six,max,p,d:INTEGER;

PROCEDURE Gene(VAR T:liste);
   VAR k:INTEGER;
   BEGIN
   WRITELN('La liste est ');
   FOR k:=1 to n DO
      BEGIN
      T[k]:=RANDOM(m)+1;
      WRITE(T[k]:3,' ');
      END;
   END;

PROCEDURE Infos(T:liste;VAR six,max,p,d:INTEGER);
   VAR k:INTEGER;
   BEGIN
   six:=n+1;
   max:=-1;
   FOR k:=1 TO n DO
      BEGIN
      IF (six=n+1) AND (T[k]=6) THEN six:=k;
      IF max<T[k] THEN
         BEGIN
         p:=k;
         max:=T[k];
         END;
      IF max=T[k] THEN d:=k;
      END;
   END;

BEGIN
RANDOMIZE;
Gene(L);
Infos(L,six,max,p,d);
WRITELN;
WRITELN('place du premier 6 = ',six);
WRITELN('maximum de la liste = ',max);
WRITELN('premier maximum en = ',p);
WRITELN('dernier maximum en = ',d);
READLN;
END.
```

Exemple de simulation :

5,10,7,5,6,15,19,10,17,8,19,15

- place du premier 6 : 5
- maximum de la liste : 19
- premier maximum en : 7
- dernier maximum en : 11

28.20

1) La fonction de répartition associée est donnée par :

i	1	2	3	4	5	6
F_i	0,15	0,3	0,4	0,45	0,65	1

L'idée est d'associer à un nombre $p \in [F_{i-1}, F_i[$ le résultat i (avec la convention $F_0 = 0$).

2) Voici le programme avec la fonction `Depipe` :

```
VAR k,n,x:INTEGER;
    F:ARRAY[1..6] OF REAL;
FUNCTION Depipe:INTEGER;
   VAR p:REAL;
       r:INTEGER;
   BEGIN
   p:=RANDOM;
   IF p <0.15 THEN r:=1;
   IF (p >=0.15) AND (p<0.3) THEN r:=2;
   IF (p >=0.3) AND (p<0.4) THEN r:=3;
   IF (p >=0.4) AND (p<0.45) THEN r:=4;
   IF (p >=0.45) AND (p<0.65) THEN r:=5;
   IF p>=0.65 THEN r:=6;
   Depipe:=r;
   END;

BEGIN
RANDOMIZE;
WRITELN('Donner le nombre de lancer : n = ');
READLN(n);
WRITELN;
FOR k:=1 TO n DO
   BEGIN
   x:=Depipe;
   F[x]:=F[x]+1;
   END;
FOR k:=1 TO 6 DO
   BEGIN
   F[k]:=F[k]/n;
   WRITE(' F',k,' = ',F[k]:0 :2);
   END;
READLN;
END.
```

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

À titre d'exemple, voici les résultats obtenus lors d'une simulation (à 10^{-2} près) :

i	1	2	3	4	5	6
F_i ($n = 10$)	0.1	0.1	0.1	0	0.5	0.2
F_i ($n = 10000$)	0.15	0.15	0.1	0.05	0.2	0.35

Ceci illustre la loi faible des grands nombres : *les fréquences empiriques tendend vers la loi de probabilité.*

28.21

1) Précisons qu'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$ prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Voir la fonction B.
2) Pour donner la loi de Poisson, nous aurons besoin de la fonction factorielle.

```
CONST n=30;p=5/n;
TYPE simul=ARRAY[0..n] OF REAL;
VAR nb,k,r:INTEGER;S:simul;

FUNCTION B:INTEGER;
   VAR j,succes:INTEGER;
   BEGIN
   succes:=0;
   FOR j:=1 TO n DO
      IF RANDOM<=p THEN succes:=succes+1;
   B:=succes;
   END;

FUNCTION fact(k:INTEGER):REAL;
   VAR j:INTEGER;r:REAL;
   BEGIN
   r:=1;
   FOR j:=1 TO k DO r:=r*j;
   fact:=r;
   END;
            {LoiP : loi de Poisson}
FUNCTION LoiP(k:INTEGER):REAL;
   BEGIN
   LoiP:=EXP(k*LN(n*p)-n*p)/fact(k);
   END;

BEGIN
RANDOMIZE;
WRITE('Nombre de simulations : nb = ');
READLN(nb);
FOR k:=0 TO n DO S[k]:=0;
FOR k:=1 TO nb DO
   BEGIN
   r:=B;
   S[r]:=S[r]+1;
   END;
FOR k:=0 TO n DO S[k]:=S[k]/nb;
WRITELN('Freq empiriques / Loi de Poisson');
FOR k:=0 TO n DO WRITELN(k,S[k]:5:2,LoiP(k):5:3);
READLN;
END.
```

À titre d'exemple, voici un extrait de quelques simulations : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(30, \frac{1}{6}\right)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$, $n_1 = 20$, $n_2 = 100000$,

k	0	1	2	3	4	5	6	$7\cdots$
$\mathbf{P}(X = k)$ (n_1)	0,00	0,05	0,10	0,20	0,20	0,10	0,10	$0,10\cdots$
$\mathbf{P}(X = k)$ (n_2)	0,00	0,02	0,07	0,14	0,19	0,19	0,16	$0,11\cdots$
$\mathbf{P}(Y = k)$	0,01	0,03	0,08	0,14	0,18	0,18	0,15	$0,10\cdots$

28.22

```
PROGRAM Som3Des;
VAR i,neuf,dix,s: INTEGER;

FUNCTION De6:INTEGER; { simulation d'un dé }
   BEGIN
   De6:=RANDOM(6)+1;
   END;

FUNCTION Som3De6:INTEGER;
   BEGIN
   Som3De6:=De6+De6+De6;
   END;

BEGIN
RANDOMIZE;
neuf:=0;dix:=0;
FOR i:=1 TO 20000 DO
   BEGIN
   s:=Som3De6;
   IF s=9 THEN neuf:=neuf+1;
   IF s=10 THEN dix:=dix+1;
   END;
WRITELN('Nombre de neuf : ',neuf);
WRITELN('Nombre de dix : ',dix);
READLN;
END.
```

Les décompositions sont :
$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$
$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4$
En considérant les dés différentiables, la sortie d'un 9 correspond à un anagramme d'une de ses décompositions. Nombre de configuration possible :
pour 9 : $3! + 3! + 3 + 3 + 3! + 1 = 25$
pour 10 : $3! + 3! + 3 + 3! + 3 + 3 = 27$
En situation d'équiprobabilité ; cela donne :

$$\mathbf{P}(X = 9) = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216} \text{ et } \mathbf{P}(X = 10) = \frac{27}{216}.$$

28.23

```
VAR n,k,lancer,nbP:INTEGER;

BEGIN
RANDOMIZE;
WRITE('Nombre de lancers : n = ');
READLN(n);
k:=0;
nbP:=0;
```

```
REPEAT
   k:=k+1;
   IF RANDOM(2)=1 THEN nbP:=nbP+1;
UNTIL (nbP=2) OR (k=n);
IF nbP=2 THEN WRITE(k)
ELSE WRITE(0);
READLN;
END.
```

28.24

```
VAR t1,t2,n:INTEGER;

FUNCTION Boule1(n:INTEGER):INTEGER;
BEGIN
Boule1:=RANDOM(n)+1;
END;

FUNCTION Boule2(n,b1:INTEGER):INTEGER;
VAR b:INTEGER;
BEGIN
b:=RANDOM(n-1)+1;
IF b<b1 THEN Boule2:=b
ELSE Boule2:=b+1;
END;

BEGIN
RANDOMIZE;
WRITE('Entrez n ');
READLN(n);
t1:=Boule1(n);
t2:=Boule2(n,t1);
WRITELN('Tirage avec ordre : ',t1:3,t2:3);
IF t1<t2 THEN
   WRITELN('Tirage sans ordre : ',t1:3,t2:3)
ELSE WRITELN('Tirage sans ordre : ',t2:3,t1:3);
READLN;
END.
```

La différence entre un tirage avec ordre ou sans ordre correspond à la problématique de l'anagramme. Le tirage programmé est ordonné : donc le premier affichage donne des numéros ordonnés, il y a $\mathcal{A}_n^2$ résultats possibles. Pour enlever l'ordre il suffit de considérer un représentant unique à toutes les permutations possibles : pour cela on affiche les résultats par ordre croissant, il y a $\binom{n}{2}$ résultats possibles.

28.25 Le programme propose d'utiliser une variable de type CHAR, c'est-à-dire un caractère, pour matérialiser la couleur de la boule tirée : par exemple, `x='N'` si la boule tirée est noire ...

```
PROGRAM ESCP2006;
VAR b, n, r, L,alea:INTEGER; x:CHAR;
BEGIN
RANDOMIZE;
WRITELN("Nb de boules blanches, noires et rouges :');
READLN(b,n,r);
L:=0; {Initialiser le nombre de tirage}
REPEAT
   L:=L+1; {Comptabiliser le nombre de tirage}
   alea :=1+RANDOM(b+n+r);
   IF (1<=alea) AND (alea<=b) THEN x:='B';
   IF (b+1<=alea) AND (alea<=b+n) THEN x:='N';
   IF (b+n+1<=alea) THEN
      BEGIN
      x:='R';
      r:=r-1; {Tirage sans remise}
      END; UNTIL (x<>'R');
IF (x='n') THEN WRITE('perdu')
ELSE WRITE('gagne');
WRITELN(' et en ',L,' coups.');
READLN;
END.
```

Comme le tirage est sans remise, il est normal de diminuer le nombre de boules rouges lorsqu'une telle boule sort. En revanche, si c'est une boule noire ou blanche qui sort alors la partie s'arrête ; il est donc inutile de gérer le nombre de boules blanches ou noires.

28.26 Cette situation relève d'un espace probabilisé infini. Il n'est pas impossible que l'expérience ne s'arrête pas, mais on peut montrer que cet évènement est négligeable. Ainsi, on ne s'inquiète pas de savoir si le programme va s'arrêter en temps fini.

À une étape donnée, il suffit de connaître le résultat du précédent tirage pour pouvoir conclure, ainsi on ne gardera pas en mémoire tous les tirages.

Les boules ont toutes la même probabilité de sortir ; on modélise le tirage par une loi uniforme sur $[\![0, 3]\!]$, le résultat 0 étant associé à la boule blanche.

La variable `b` compte le nombre de boules blanches consécutives qui viennent de sortir. La variable `n` compte le nombre de tirages.

```
VAR b,n:INTEGER;

BEGIN
RANDOMIZE;
n:=0;
b:=0;
REPEAT
   n:=n+1;
   IF RANDOM(4)=0 THEN b:=b+1
   ELSE b:=0;
UNTIL b=2;
WRITELN('le rang est ',n);
READLN;
END.
```

28.27 On complète successivement les quatre lignes par :

- Tant qu'il y a des boules dans l'urne : `b>=1`

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

• Choisir un numéro au hasard sur $[\![1, b]\!]$ par l'instruction `numero:=RANDOM(b)+1;`
• Nombre de boules restant dans l'urne : `numero-1`. En effet, on retire toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal au numéro obtenu.
• On comptabilise un tirage de plus : `tirages:=tirages+1;`

```
PROGRAM ESC1999;
VAR b,tirages,numero:INTEGER;

BEGIN
RANDOMIZE;
WRITE('Entrez le nombre initial de boules ');
READLN(b);
tirages:=0;
WHILE b>=1 DO
    BEGIN
    numero:=RANDOM(b)+1;
    b:=numero-1;
    tirages:=tirages+1;
    END;
WRITE('L urne est videe en ',tirages,' tirages');
READLN;
END.
```

28.28

Ne pas oublier à la fin de charger le résultat dans la variable de même nom que la fonction.

```
FUNCTION SimulY(n:INTEGER; p1,p2:REAL): INTEGER;
VAR x,y,k,u:INTEGER;

BEGIN
x:=0;
FOR k:=1 TO n DO
   BEGIN
   u:=RANDOM;
   IF u<p1 THEN x:=x+1;
   END;
y:=0;
FOR k:=1 TO x DO
   BEGIN
   u:=RANDOM;
   IF u<p2 THEN y:=y+1;
   END;
SimulY:=y;
END;
```

Déterminons le nombre moyen d'appels de la fonction `RANDOM` : dans la première partie, il y a n appels ; dans la deuxième il y a en X. Donc le nombre cherché est : $n + \mathbf{E}(X) = n + np_1 = n(p_1 + 1)$.

28.29

1.a) Il convient d'écrire la partie déclarative et de proposer un moyen pour déterminer la valeur de la variable `m` : on peut la demander à l'utilisateur ou la définir comme une constante.

```
VAR N,m,X,i:INTEGER;

BEGIN
RANDOMIZE;
WRITE('Donner (le nombre d essais) m : m =');
READLN(m);
N:=RANDOM(m)+1;
X:=0;
FOR i:=1 TO N DO X:=X+RANDOM(2);
WRITELN(N,'   ',X);
READLN;
END.
```

1.b) X correspond à une somme de N variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$: la loi de X sachant $[N = k]$ est une loi binomiale de paramètres $\left(k, \frac{1}{2}\right)$. Pour $N = 4$, les valeurs possibles sont 0, 1, 2, 3, 4.
2) `RANDOM(m)` simule une loi uniforme sur $[\![0, m-1]\!]$ donc N suit une loi uniforme sur $[\![1, m]\!]$, son espérance est $\dfrac{m+1}{2}$ et sa variance est $\dfrac{m^2-1}{12}$.
3) X est le nombre de succès lors d'une répétition de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes où le nombre de répétitions peut varier entre 1 et m. Donc $X(\Omega) = [\![0, m]\!]$.
Comme la loi de X sachant $[N = k]$ est $\mathcal{B}\left(k, \frac{1}{2}\right)$ avec $k \in [\![1, m]\!]$, il vient : pour tout $(i, k) \in [\![0, m]\!] \times [\![1, m]\!]$,

$$\mathbf{P}(X = i \cap N = k) = \mathbf{P}(N = k)\mathbf{P}_{N=k}\mathbf{P}(X = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k \\ \frac{1}{m2^k}\binom{k}{i} & \text{sinon} \end{cases}$$

La notion de loi marginale donne (c'est en fait la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements associé à la variable aléatoire N) :
Pour $i \in [\![1, m]\!]$,

$$\mathbf{P}(X = i) = \sum_{k=i}^{m} \frac{1}{m2^k}\binom{k}{i}$$

et $\mathbf{P}(X = 0) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$.

4) $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} i\mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i}$

$= \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}k2^{k-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2} = \frac{m+1}{4}$.

Index

A

Absurde, 33
Accroissements finis égalité, 423, 424
Adhérence, 363
Affectation, 737, 740
Alembert-Gauss, 102
Algèbre d'événements, 594
 associée à une variable aléatoire, 622
 engendrée par une partie, 595
 σ-algèbre, 657
 engendrée par une famille, 657
Algorithme, 735
`AND`, 739, 753
Analyse-synthèse, 28, 37, 56, 57
Application & fonction, 42
Application, 14
 bijective, 46
 injective, 45
 linéaire, 41
 surjective, 45
Approximation
 π, 742
 exp, 744
 loi de Poisson, 691
 Nombre d'or, 742
 affine, 417
 par une loi de Poisson, 753
 rationnelle, 305
Arbre de probabilité
 formule de Bayes, 602
 formule des probabilités composées, 599
 probabilité conditionnelle, 598
Arc tangente, 402
Argument (nombre complexe), 65
`ARRAY`, 745
Associativité, 12
Asymptote, 377, 378
Automorphisme, 41

B

Base, 25
 canonique, 25
`BEGIN ... END`, 739
Bijection (théorème), 400, 420
Binôme
 de Newton, 10, 51
 négatif (formule), 509
`BOOLEAN`, 737, 739
Borne
 d'un ensemble, 302
 d'une fonction, 394
Boucle
 `FOR ... TO ... DO`, 740
 `FOR ... DOWN ... DO`, 741
 `REPEAT ...UNTIL` , 741
 `WHILE ... DO`, 741
Boule ouverte ou fermée, 532
Branche parabolique, 379

C

Caractérisation séquentielle, 369
Cardinal, 555
Cauchy-Schwarz (inégalité), 531
Changement
 d'indice, 4
 de variable, 460
Classe modale, 585
Coefficient binomial, 560, 563, 736
 complémentaire, 561
 double produit binomial, 562
 formule de Pascal, 561
 généralisée, 562
 identité de Van der Monde, 561
 notation
 $\binom{n}{k}$, 560
 triangle de Pascal, 562
 $\binom{n}{p}$, 8

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Coefficient
dominant, 88
polynôme, 85
Coefficients (matrice), 95
Combinaison linéaire, 5, 14, 15, 19, 22, 25
Commutativité, 12
Comparaison, 739
Comparaison (théorème), 301, 374, 505
Complexe, 62
Composée, 44
Composition à
droite, 375, 376
gauche, 540
Conjonction, 739
Conjugué, 64
Connecteur logique, 739
Constante, 737, 745
Continuité
composition, 397
composition à gauche, 536
des fonctions usuelles, 366, 397
opérations algébriques, 536
opérations algébriques, 397
par morceaux, 453
sur un segment, 400
Contraposition, 33
Convergente absolue (série), 506
Coordonnées, 115, 116
Courbes de niveau, 535
Covariance, 711
formule de Huygens, 712
Croissance comparée
des fonctions usuelles, 375
des suites usuelles, 347

D

Décile, 589
Degré, 88
Dérivabilité
en un point $\mathbb{R}$, 416
opérations algébriques, 419
sur un intervalle de $\mathbb{R}$, 420
Dérivées
directionnelles, 542
partielles, 538
successives, 428
Développement limité à
l'ordre 0, 366
l'ordre 1, 417, 540
l'ordre n en 0, 483
l'ordre n en x_0, 487
l'ordre partie régulière, 483
Développements limités usuels, 484
Diagramme en bâtons, 583
Dichotomie, 297, 742, 743, 752
Dimension, 73, 75
Disjonction, 34, 739
Distance euclidienne, 531
Division euclidienne, 92
Droite, 529
Droite vectorielle, 74

E

Écart
moyen, 586
quadratique moyen, 586, 686
Écart-type, 629, 686
empirique, 589
Échelonnée, 105
Effectif, 582
Égalité, 740
Encadrement (théorème), 295, 374
Endomorphisme, 41, 42, 50
Ensemble-image, 44
Ensembles disjoints, 40
Équation de compatibilité, 4, 5
Équivalents usuels pour
les fonctions, 377
les suites, 351
Espace
probabilisable, 594, 657
probabilisé, 595, 658
vectoriel, 12, 13, 16, 18
Espérance, 626
loi binomiale, 630, 636
loi de Bernoulli, 635
loi de Poisson, 693
loi géométrique, 689
loi hypergéométrique, 640, 642
loi uniforme, 633
paradoxe de Saint Pétersbourg, 684
théorème de transfert, 628, 684, 709
variable discrète, 683
Euler (formule), 68
Evaluation, 746
Événement
certain, 593
contraire, 593
impossible, 593
négligeable, 662
presque certain, 663

incompatibles, 593
système complet d'événements, 595
∃, 31
Extremum, 421

F

Factorielle, 7, 559, 736
Factorisation, 100
Famille
échelonnée, 24
génératrice, 20, 22
libre, 22, 24, 74
Fibonacci, 742
Fonction, 743, 745, 747
convexité ou concavité, 430
convexe ou concave, 430
ne s'annulant pas, 393
non nulle, 393
usuelle, 738
affine de deux variables, 535
affine tangente, 541
atteignant ses bornes, 399
bornée, 394
caractéristique, 43, 555
constante, 425
de deux variables, 534
de répartition, 586, 625, 682
en escalier, 449
identité, 43
injective, 45
monotone, 395, 425
négligeable devant une autre, 374
paire ou impaire, 393
périodique, 394
polynomiale de deux variables, 536
positive ou négative, 392
rationnelle de deux variables, 537
surjective, 46
équivalente, 376
∀, 31
Forme
algébrique, 62
linéaire, 41
linéaire, 82
linéaire, 48
trigonométrique, 67
Formule de Bayes, 602, 667
paradoxe de Bayes, 602
Formule de Huygens
covariance, 712
variance, 630, 687
Formule de Pascal, 9, 561
généralisée, 562
Formule des probabilités
composées, 599, 664
totales, 600, 665
Formule du binôme
endomorphismes, 51
Formule du crible
dénombrement, 555, 556
méthode du crible, 558
probabilité, 597, 661
Fréquence, 582
cumulée, 582
empirique, 747
`FUNCTION`, 743

G

Gradient, 539
Graphe, 534
Grassmann, 78

H

Hörner, 746
Histogramme, 583
Homothétie, 42, 259, 261
Hörner, 101, 746
Hyperplan, 83

I

Identité de Van der Monde, 561
Image, 44, 45, 46, 47
d'une application linéaire, 45
directe, 43
Images, 54
Implication, 30
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, 632, 687
Inconnue, 1
principale, 4
secondaire, 4, 119
Indépendance, 603, 667
couple de variables indépendantes, 708
indépendance mutuelle, 708
indépendance mutuelle, 603, 667
tribus indépendantes, 668
variables discrètes, 683
variables finies, 625
Indicatrice, 43

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Inégalité
de Taylor-Lagrange, 510
de la moyenne, 451
de Taylor-Lagrange, 481
triangulaire, 14, 65, 532
Intégrale
d'une fonction continue, 450
d'une fonction continue par morceaux, 453
d'une fonction en escalier, 449
fonction de ses bornes, 456
propriétés élémentaires, 451
INTEGER, 737
Intégration
par parties, 459
théorème fondamental, 455
Intervalle ouvert ou fermé, 537
Inversible, 115, 118
Isomorphisme, 41, 51, 52, 54
espaces isomorphes, 51

L

Leibniz (formule), 429
Libre, 25, 54, 75
Liée, 22
Limite
à gauche au à droite, 366
compatibilité avec la relation d'ordre, 294
composition, 294, 301, 372
d'une fonction en un point, 364
d'une suite, 298
d'une suite, 291
monotone (théoréme), 296
monotone (théorème), 396
opérations algébriques, 299
opérations algébriques, 293
par valeurs supérieures ou inférieures, 370
par valeurs supérieures/inférieures, 293
unicité, 292
Linéarisation, 68
Logique, 29
Loi usuelle, 644, 695, 748
Binomiale, 635, 748
De Bernoulli, 634, 748
de Poisson, 691
Géométrique, 688, 748
Hypergéométrique, 637, 749
Uniforme, 632, 748
Loi d'une variable aléatoire
loi conditionnelle, 708
loi conjointe, 706
loi marginale, 706
somme, 714
variable discrète, 681
variable finie, 623
Loi
faible des grands nombres, 716, 748
sans mémoire, 690

M

Matrice, 95, 746
antisymétrique, 103
de passage, 114, 115
du système linéaire, 118
inversible, 108, 109
symétrique, 103
colonne, 96, 115, 116
ligne, 96
produit, 101
unité, 96
Maximum, 303
local, 421
Médiane, 586
Minimum, 303
local, 421
Mode, 585
Module (nombre complexe), 64
Moivre (formule), 67
Moment d'ordre n, 685
Moyenne, 585
empirique, 716

N

Négation, 739, 741
Norme euclidienne, 530
NOT, 739
Noyau, 44, 45, 47

O

Opérateur booléen, 739, 753
Opérations, 738
algébriques, 371
élémentaire, 2
OR, 739
Ordre de multiplicité, 97

P

p-listes, 559
sans répétition, 560

Paradoxe
de Bayes, 602
de Saint Pétersbourg, 684
Paramètre, 743, 744, 747
Partie
bornée, 531
convexe, 529
entière d'un nombre réel, 302
fermée, 533
imaginaire, 63
ouverte, 533
réelle, 63
Passage, 745
En valeur, 743, 744
En variable, 744
Permutation, 558
Pivot de Gauss, 1, 5, 111, 113, 265
Plan affine, 534
tangent, 541
vectoriel, 74
Point d'inflexion, 432
Point-virgule, 737, 740
Polynôme, 13, 75, 85, 746
d'endomorphisme, 51
irréductible, 94
unitaire, 88
Primitive, 454
Privot de Gauss, 6
Probabilité, 747
ensemble fini, 595
ensemble quelconque, 658
probabilité conditionnelle, 598, 664
uniforme, 596
Problème du chevalier de Méré, 591
Procédure, 744
`PROCEDURE`, 744
Processus de Bernoulli, 635, 656
Produit
Π, 740
scalaire, 530
Programme, 735
Projecteur, 56
Projection, 54, 59, 260, 262
Prolongement
d'une dérivée, 426
par continuité, 368
Propriété
vraie presque sûrement, 663
vraie à partir d'un certain rang, 291
Puissance, 7, 738, 743

Q

Quantificateurs, 31
Quartile, 589
Quotient, 92

R

Racine, 97
carrée, 71
n-ième, 70, 71
`RANDOM`, 747
Rang, 81, 104, 265
`READLN`, 737
`REAL`, 737
Réciproque, 51
(d'une bijection), 47, 420
Récurrence, 34
`REPEAT ... UNTIL ...`, 741
Reste, 92
Rolle (théorème), 422

S

σ-addivité, 658
Schéma de Bernoulli, 635
Second membre, 1
Segment, 399, 529
Série, 744, 751
à termes positifs, 504
convergente, 502
exponentielle, 509
géométrique et ses dérivées, 507
de Riemann, 511
convergente, 507
harmonique, 504
géométrique, 507
somme partielle, 501
Somme
de sous-espaces vectoriels, 26
de variables aléatoires
variables de Poisson, 714
directe sous-espaces vectoriels, 26
$\sum$, 1

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit

Sommes de Riemann, 452, 752
Sous-espace
 propre, 259
 vectoriel, 14
Spectre, 258
Statistiques
 caractéristique de dispersion
 décile, 589
 écart-type empirique, 589
 quartile, 589
 variance corrigée, 590
 variance empirique, 589
 caractéristique de position
 classe modale, 585
 médiane, 586
 mode, 585
 moyenne, 585
 écart moyen, 586
 écart quadratique moyen, 586
 effectif, 582
 fonction de répartition, 586
 fréquence, 582
 fréquence cumulée, 582
 représentation graphique
 diagramme en bâtons, 583
 histogramme, 583
Structure
 Conditionnelle, 739
 Répétitive, 740, 746
 Séquentielle, 738
Suite
 adjacente, 296, 743, 752
 arithmétique, 289
 arithmétique, 17
 bornée, 290
 convergente, 291
 équivalente, 348
 fixe, 325
 géométrique, 18, 289
 monotone, 289, 327
 négligeable devant une autre, 345
 récurrence d'ordre 2, 323
 récurrente, 325, 741, 742, 751
 récurrente linéaire d'ordre 2, 742
 réelle, 287
Symétrie, 58, 60, 61, 260, 262
Système complet d'événements, 595, 658
 associé à une variable aléatoire, 622
Système (s), 741
 de Cramer, 118
 échelonné, 3
 équivalent, 2, 6
 homogène, 2, 118, 119
 impossible, 2
 indéterminé, 2
 linéaire, 1, 2

T

Tableau, 745
Taylor (formule), 96
 avec reste intégral, 480
 Lagrange, 481
 Young, 482
Terme dominant, 88
Théorème de transfert, 628, 684, 709
Tirage
 avec remise, 559
 p-listes, 559
 loi binomiale, 635
 processus de Bernoulli, 635
 schéma de Bernoulli, 635
 sans remise, 560
 p-listes sans répétition, 560
 loi hypergéométrique, 637
 simultané, 560
 coefficient binomial, 560
Triangle de Pascal, 9, 562
Tribu, 657
 engendrée par une partie, 657
 indépendance, 668
 grossière, 657
 triviale, 657
Trigonométrie, 69
`TYPE`, 737, 745

U

Unicité de la limite, 365

V

Valeur, 737
 absolue, 13
 moyenne d'une fonction, 450
 propre, 258
Valeurs intermédiaires (théorème), 398
`VAR`, 737, 744
Variable, 737, 744
 Auxiliaire, 739, 741–743
 Globale, 745
 Locale, 745

Variable aléatoire
écart type, 629, 686
espérance, 626, 683
fonction de répartition, 625, 682
indépendance, 625, 683
loi, 623, 681
moment d'ordre n, 685
variable discrète, 680
variable finie, 622
variance, 629, 686
Variance, 629, 686
formule de Huygens, 630, 687
loi binomiale, 630, 636
loi de Bernoulli, 635
loi de Poisson, 693
loi géométrique, 689
loi hypergéométrique, 640
loi uniforme, 633
variance corrigée, 590
variance d'une somme, 715
variance empirique, 589
Vecteur, 13
nul, 13, 22
propre, 258
unitaire, 542
linéairement dépendant, 22
linéairement indépendant, 22
propres, 262
Voisinage, 363

W

`WHILE ... DO ...`, 741
`WRITELN`, 737

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit